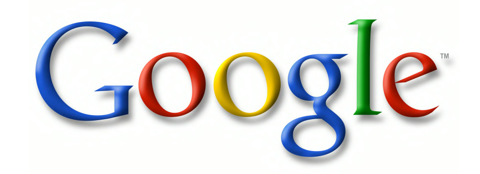




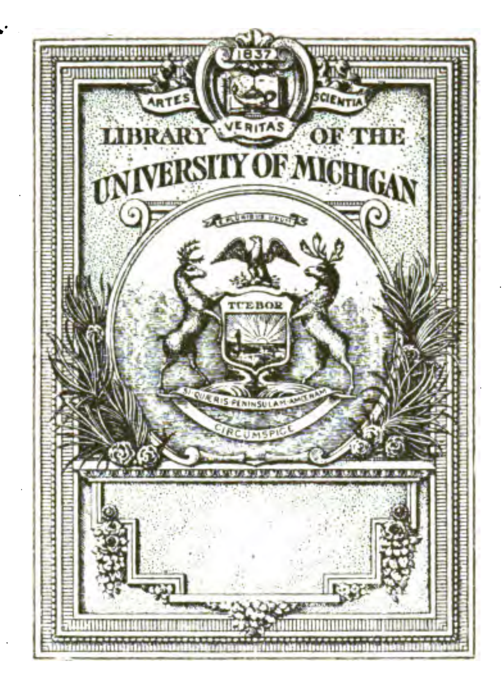
W. FIEDLER

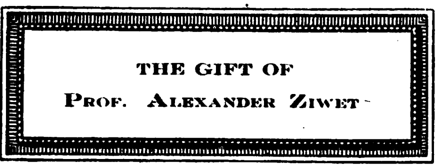
DIE

DARSTELLENDE GEOMETRI

I

VIERTE AUFLAGE



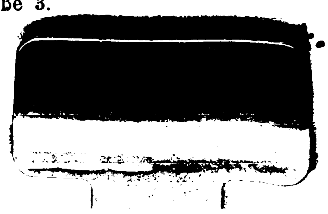


I iematischen,
der T ichtungen hin
weite d Wohlwollen
zahlr lg begleitetes
Bemü ß bei gleicher
Unte In- und Aus-
lande nd Lernenden
in W n. **Verlags-**
aner e werden mir
desh er denselben
Gege kommen sein.
I anz besonders
auf en und Wien
und rausgegebene
Enc aufmerksam,
die i ie Geometrie,
die I nd die Astro-
nomi philosophische
und ter zu obigen
Bänd

n und natur-
wiss : Die **Mathe-**
mat s **Archiv der**
Mat **Deutschen**
Mat **ematik und**
Phy **t für mathe-**
mat ferner **Natur**
und Schule (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich in kurzen Zwischenräumen: „**Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner**". Diese „Mitteilungen", welche unentgeltlich in 30 000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, welches meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte jährlich zwei- bis dreimal neu gedruckte **Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten,** 96. Ausgabe [XL u. 168 S. gr. 8], sowie der Nachtrag 1901—1903 [XII u. 56 S.] zu diesem Katalog in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.


. Teubner.

DIE DARSTELLENDE GEOMETRIE

IN ORGANISCHER VERBINDUNG
MIT DER GEOMETRIE DER LAGE.

VON

DR. WILHELM FIEDLER.

VIERTE AUFLAGE.

I. TEIL.

DIE METHODEN DER DARSTELLENDEN UND DIE ELEMENTE
DER PROJEKTIVISCHEN GEOMETRIE.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

DIE METHODEN DER DARSTELLENDEN UND DIE ELEMENTE DER PROJEKTIVISCHEN GEOMETRIE.

FÜR VORLESUNGEN UND ZUM SELBSTSTUDIUM

VON

DR. WILHELM FIEDLER.

VIERTE AUFLAGE.

MIT ZAHLREICHEN FIGUREN IM TEXT UND AUF 2 TAFELN.

BG

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

Vorwort.

Indem mir unerwarteterweise vergönnt ist, dem wissenschaftlichen Publikum diesen ersten Teil meines Werkes über die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage nochmals neu vorzulegen, kann ich auf wiederholte sorgfältige Durcharbeitung und vielfache Ergänzungen zurückblicken, die ich ihm zu weiterer Ausgestaltung des alten Planes von 1863 gewidmet habe.

Sein Ziel ist die Entwicklung des geistigen Vermögens der Raumanschauung an der Hand der zeichnenden und modellierenden Darstellung und in wissenschaftlicher Durchbildung zum sicheren räumlichen Denken. Die Methoden der Projektion und des Modellierens, die aus der mathematischen Auffassung der Vorgänge beim Sehen des Menschen mit einem Auge im Laufe der Untersuchung entspringen, führen in ihrer Anwendung auf die Raumelemente zu den Gesetzen und fundamentalen Konstruktionen der projektivischen Geometrie, die Behandlung des Kreises gibt dazu in der projektivischen Theorie der Kegelschnitte das reichste Anwendungsgebiet; als ihre wichtigste Frucht erkennen wir die Involutionskonstruktionen. Diese bilden zugleich die strenge Schule der Genauigkeit, die den Konstruktionen erst ihren großen technisch praktischen Wert für den gelehrten Techniker gibt; im Anschluß an sie ist in der Schlußübersicht eine Darstellung der Konstruktionsbehandlung der imaginären Raumelemente beigefügt worden, welche von der Zahl und Wichtigkeit der Fälle ihres Auftretens in jenen Konstruktionen gefordert wird.

Die neue Auflage bringt etwa zwanzig neue Figuren im Text, die ich meinem Assistenten Herrn G. Neuweiler verdanke; die zwei lithographischen Tafeln betreffen nur einige Fälle, wo die Größe der Zeichnung sich mit Text nicht ver-

trug, bez. wo nicht eine bestimmte Textstelle, sondern mehrere getrennte zur Konstruktion der Figuren gehören. Auch für Mithilfe an der Korrektur und für Erneuerung und Vervollständigung des alphabetischen Registers habe ich Herrn Neuweiler zu danken.

So nehme ich wohl Abschied von diesem Werke; ich hege den Wunsch und die Hoffnung, daß es auch weiterhin geeignet befunden werde zur Verbreitung und weiteren Förderung der graphischen Methoden.

Schließlich möchte ich nach fast fünfundvierzigjähriger Verbindung mit der Verlagsfirma B. G. Teubner doch einmal anerkennend aussprechen, daß sie stets allen meinen Wünschen in Bezug auf den Druck und die Ausstattung meiner Arbeiten bereitwillig entgegengekommen ist.

Zürich im November 1903.

Dr. Wilh. Fiedler.

Darstellende Geometrie.

Seite

Einleitung über Zweck und Bedeutung 1
Methoden der Abbildung und Modellierung 2
Perspektivische Raumansicht 4
Entwickelungsgang 6

Erster Teil. **Die Methodenlehre, entwickelt an der Untersuchung der geometrischen Elementarformen und ihrer einfachen Verbindungen.**

A. Die Zentralprojektion als Darstellungsmethode und nach ihren allgemeinen Gesetzen.
§§ 1—23; S. 8—135.

§

1. Die Data der Zentralprojektion: Zentrum und Distanzkreis; die projizierenden Strahlen 8
Beispiel 9
2. Die projizierenden Ebenen; die Verschwindungsebene . . . . —
Beispiele 1—3 10
3. Die Bestimmung der geraden Linie; Durchstoßpunkt, Fluchtpunkt und Verschwindungspunkt; zweite Parallelebene. . . . 11
Beispiele 1—10. Parallelen, Bildlänge und Bildmitte 13
4. Das projizierende Strahlenbüschel der Geraden und die Umlegung desselben in die Bildebene. Die Abschnitte der Geraden und ihres Bildes; Teilungspunkte. . . . . —
Beispiele 1—7. Abtragen und Teilen von Strecken 15
5. Bie Bestimmung der Ebene: Spur, Fluchtlinie und Verschwindungslinie 16
Beispiele 1—10. Parallelebenen, Bildbreite und Bildmitte . . 17
6. Die Regionen der Ebene und ihres Bildes; Strahlenbüschel und Ebenenbüschel bei der Projektion der Ebene 18
Beispiele 1—6. Ebenen und Gerade von bestimmter Tafelneigung im Büschel. . . . . —
6*. Die allgemeine Zentralprojektion mit der Fixebene **U** im Endlichen. Beispiel; Umlegung der projizierenden Ebene 19
7. Die Normalebene zur Tafel durch eine Gerade; Auftragung der Tafelordinaten, Teilpunkt und Teilverhältnis; Teilungspunkte und Distanzpunkte. Die Normalebene zur Tafel in der allgemeinen Zentralprojektion 21
Beispiele 1—8. Die Zentralprojektion aus der orthogonalen . 23
(7). Abbildung der Punkte des Raumes durch die Kreise der Ebene. Lineare Reihen und ihre Moduln, Ähnlichkeitspunkte; planare Systeme und ihre Moduln, Ähnlichkeitsachsen. Die gleichseitigen Rotationskegel mit zur Tafel normaler Achse und die Kreise, die einen Kreis berühren 24
Beispiele 1—5. Über lineare Reihen und planare Systeme . . 28
8. Die zur Bildebene parallelen Geraden und Ebenen und ihr Eintreten in die Aufgaben 28

§ Seite

Beispiele 1—12. Elementaraufgaben über die Beziehung von Punkten, Ebenen und Geraden zueinander; das Parallelepiped und seine vier typischen Bilder; Parallelogrammschnitte des Tetraeders 29

9. Der Winkel von zwei sich schneidenden Geraden, Bestimmung seiner wahren Größe aus den Bildern seiner Schenkel; die Teilungskreise der Geraden einer Ebene 33

Beispiele 1—5. Teilung der Ebene in gleiche Quadrate, etc.. 35

10. Die Normalen zu einer Ebene und die Normalebenen zu einer Geraden; die Winkel zwischen Ebenen und Geraden und zwischen Ebenen 35

Beispiele 1—24. Die gleichgeneigten Ebenen und Geraden zu zwei Ebenen bez. Geraden, Ebenen aus Winkelangaben; gemeinsame Normale. Trirektanguläre Ecke. Äquidistante Gerade und Punkte zu zwei, drei und vier Punkten, bez. vier Ebenen 37

11. Die Umlegung der Ebene d. i. ihrer Geraden und Punkte in die Bildebene (Hauptteilungspunkte); die Aufstellung der Ebene aus derselben (auch in der allgemeinen Zentralprojektion) . . 43

Beispiele 1—8. Projizierender Kegel aus Kreisschnitten; einfaches orthogonales Hyperboloid; Zentralprojektion des Kreises aus Ebene, Zentrum und Radius 46

12. Die Transformationen als Mittel zur Sicherung der praktischen Ausführung der theoretischen Lösungen; Transformationen des Zentrums. Von der Zentralprojektion zur Perspektive 49

Beispiele 1—11. Konstruktion stereoskopischer Bilder; Darstellung eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit reduzierter Distanz; Auftragen rechtwinkliger Koordinaten; Orthogonalprojektion 52

13. Die Verschiebungen des Objekts und diejenigen der Bildebene 55

Beispiele 1—2 56

14. Untersuchung der Beziehung zwischen dem ebenen System und seinem Bilde; Kollineation in zentraler Lage; Zentrum und Achse der Kollineation; Gegenachsen derselben; symmetrisch gleiche entsprechende Reihen und Büschel 56

Beispiele 1—8. Kollinearverwandte Figuren; entsprechend gleiche Büschel (Kollineationsstrahlen) 59

15. Die Abhängigkeit des Bildes der Geraden vom Original; perspektivische Potenz; Bedingung der Gleichheit entsprechender Strecken. Zwei Systeme in entsprechenden Geraden; ihre Zusammenlegungen zu verkehrter Deckung und die zugehörigen Kreisbüschel; Involutionen, elliptische und hyperbolische . . . 61

Beispiele 1—6. Entsprechend gleiche Strecken aus ihrer Länge; Nullstrecken und symmetrisches Paar; Teilungspunkte 65

16. Das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden wird durch Projektion nicht geändert; Doppelverhältnis von Strahlen- und Ebenenbüscheln 66

Beispiele 1—16. Harmonische Teilung; Doppelverhältnisse einer Gruppe; uneigentliche und harmonische; das vollständige Viereck und Vierseit. Punkte und Linien der harmonischen Ebene in der allgemeinen Zentralprojektion 70

17. Projektivische Reihen und Büschel: perspektivische Lage, entsprechender Bewegungssinn. Die lineare Konstruktion projektivischer Reihen in allgemeiner Lage: die perspektivischen Achsen. 76

Beispiele 1—10. Gegenpunkte. Die Ähnlichkeit der Reihen; Überführung in perspektivische Lage; die zentralprojektivische

§ Seite

Bestimmung der Geraden; perspektivische Lagen der drei Elementargebilde erster Stufe 78

18. Die lineare Konstruktion projektivischer Strahlenbüschel in allgemeiner Lage: die perspektivischen Zentra. 81
Beispiele 1—10. Überführung in perspektivische Lage; entsprechende Rechtwinkelpaare und entsprechend gleiche Winkel; Gesetze der Symmetrie in vereinigten projektivischen Büscheln 83

19. Die Projektivität der Reihen und Büschel im ebenen System und seinem Bilde; das charakteristische Doppelverhältnis einer Zentralprojektion 87
Beispiele 1—14. Die Charakteristik als einfaches Verhältnis und dessen geometrische Bedeutung; entsprechende Rechtwinkelpaare in konzentrischen projektivischen Büscheln; perspektivische Dreiecke (fundamentaler Beweis); Umlegung ebener Systeme; Konstruktion vereinigter projektivischer Reihen und Büschel 89

20. Klassifikation der Zentralprojektionen nach den Werten der Charakteristik; Involution, hyperbolische involutorische Reihen und Büschel; die Doppelelemente und die harmonische Teilung 94
Beispiele 1—18. Die Überführung von projektivischen Reihen und Büscheln in involutorische Lage; projektivische Reihen und Büschel und ihre involutorischen Scheine und Schnitte; Konstruktion der Involutionen mit dem Lineal; Satz von den perspektivischen ebenen Vierecken und Vierseiten, auch mit Ableitung aus den Definitionen. Harmonische Gruppen als Spezialfälle der Involution. 97

21. Die Doppelelemente vereinigter projektivischer Reihen und Büschel nach dem Bewegungssinn, aus der Betrachtung der Projektion; ihre Realität 104
Beispiele 1—10. Polygone, die anderen ein- und umgeschrieben sind. Paare von gegebener Mitte in vereinigten projektivischen Reihen. Sectio spatii des Apollonius. Linsenkollineation 109

22. Die sechs Spezialfälle der Kollineation ebener Systeme: Affinität, achsiale Symmetrie, Flächengleichheit, Ähnlichkeit, zentrische Symmetrie, Kongruenz. Kollineationen mit singulären Elementen 112
Beispiele 1—5. Umlegung symmetrischer Figuren mit zur Tafel paralleler Achse; zwei Zentralprojektionen desselben ebenen Systems. Involution als Schule der Konstruktionsgenauigkeit 118

23. Allgemeine Bestimmung und Konstruktion der Projektivität ebener Systeme. Überführung zweier Vierecke in zentrisch kollineare Lage und Probleme der umgekehrten Perspektive . 119
Beispiele 1—7. Kongruente Vierecke; geometrische Netze; zwei zu einem dritten System zentrisch kollineare Systeme 124

Überblick. Der Prozeß der Projektion und die projektivischen Grundgebilde erster Stufe; ihre Zusammensetzung zu ebenen Systemen und zu Bündeln, zentralkollineare Bündel; der Raum als System von Punkten und von Ebenen und die Modellierungsmethoden; der Raum als Strahlensystem. Das Gesetz der Dualität als Symmetriegesetz des natürlichen Systems der Geometrie. Die Reziprozität, speziell die involutorische (Orthogonalsystem). Reziprozitäten mit singulären Elementen. Dualität der Projektionsmethoden 126
Beispiele 1—5 der Dualität und 1—4 über die Konstruktion kollinearer und reziproker Bündel 130, 134

§ Seite

B. Die konstruktive Theorie der Kegelschnitte als Kreisprojektionen. §§ 24—36; S. 136—272.

24. Der Kreis als Punktreihe und Linienenveloppe. Die projektivischen Fundamentaleigenschaften des Kreises und der Kegelschnitte, Doppelverhältnis von vier Punkten und von ihren Tangenten 136
Beispiele 1—3. Kreis und gleichseitige Hyperbel 139
25. Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung aus projektivischen Büscheln, der Kurven zweiter Klasse aus projektivischen Reihen; Bestimmung durch fünf Punkte oder Tangenten. Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar 141
Beispiele 1—7. Die involutorischen Haupteigenschaften des Kegelschnittbüschels und der Kegelschnittschaar; daraus Linealkonstruktion der Involution aus zwei Paaren 144
26. Die Bilder des Kreises; ihre Unterscheidung als Hyperbeln, Ellipsen, Parabeln und die Kollinearverwandten der Kegelschnitte; zentrische Kollineation von zwei Kegelschnitten in zwölf oder in vier Arten 146
Beispiele 1—5. Zwei Kreise als zentrisch ähnlich und als zentrisch kollinear; ihre Potenzlinie 150
27. Der Satz vom Pascalschen Sechseck und seine konstruktive Verwendung 151
Beispiele 1—10. Konstruktion der Kegelschnitte aus Punkten; ihre Tangenten in denselben; spezielle Fälle und Sätze Die Wurfparabel. § 11, 6 als Konstruktion projektivischer Büschel 152
28. Der Satz vom Brianchonschen Sechsseit und seine konstruktive Verwendung 155
Beispiele 1—12. Konstruktion der Kegelschnitte aus Tangenten; ihre Berührungspunkte in denselben; spezielle Fälle und Sätze; Viereck und zugehöriges Vierseit am Kegelschnitt. Identität der Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse; die Erzeugnisse aus projektivischen Büscheln und Reihen in einer Ebene sind Kreisprojektionen 156
29. Projektivische Konstruktionen der Schnittpunkte einer Geraden und der Tangenten aus einem Punkte mit einem Kegelschnitt. Prinzip des Hilfskegelschnittes 161
Beispiele 1—11. Kegelschnitte (4, 1) und (1, 4). Gattung des Kegelschnittes aus fünf Punkten. Gleichseitige Hyperbel . . 166
30. Der Kegelschnitt als sich selbst entsprechend in einer involutorischen Kollineation; Zentrum und Achse als Pol und Polare. Die konstruktiven Übergänge zwischen denselben. Involution auf dem Kegelschnitt, drei aus zwei Paaren. 169
Beispiele 1—6. Polare und Pol im Kegelschnitt aus fünf Punkten bez. fünf Tangenten desselben; der Kegelschnitt aus Pol, Polare und drei Punkten, etc. 174
31. Die Probleme über involutorische Büschel und Reihen in Lösung durch den Hilfskreis 176
Beispiele 1—20. Die Vervollständigung gegebener Involutionen; die Arten derselben. Die Involution rechter Winkel und die Kreispunkte der Ebene; Zentra kollinearer Ebenen; Überführung allgemeiner Involutionen in symmetrische und rechtwinklige; gemeinsames Paar von zwei Involutionen mit Anwendungen; Involution zu vereinigten projektivischen Gebilden 176
32. Die Involutionen harmonischer Pole und Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt; ihre direkte Ableitung aus den projektivischen Erzeugungen 185
Beispiele 1—20. Orthogonale Kreise. Konstruktionen der Kegel-

§ Seite

schnitte aus einem Tripel und zwei Punkten oder Tangenten, aus einem Tripel und einem Paar (Polarsystem); der rein imaginäre Kegelschnitt. Konstruktionen aus Involutionen harmonischer Pole und Polaren mit Anwendung bei reellen Peripherieelementen 190

33. Die Spezialfälle der Involutionen harmonischer Pole und Polaren mit unendlich fernem Träger in Bezug auf einen Kegelschnitt 199

Beispiele 1—24. Der Mittelpunkt, die konjugierten Durchmesser, die Asymptoten und Achsen; Gleichungen der Kegelschnitte. Konstruktion der Achsen, etc. aus den Bestimmungselementen; Behandlung des Kreises; Konstruktion der Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern, speziell aus dem Kreise; der Kegelschnitte aus den Polinvolutionen in zwei konjugierten oder nicht konjugierten Durchmessern; die entsprechenden Nullkreise kollinearer Ebenen; ihre entsprechenden Kreisbüschel; die sich selbst entsprechenden der involutorischen Kollineation; Projektion eines Kegelschnittes oder zweier Kegelschnitte in Kreise bez. gleichseitige Hyperbeln. Kegelschnitte aus gemischten Elementen (4, 1), (3, 2). Fünf einfache Kegelschnittsysteme 200

34. Von den reziproken Polarfiguren in der Ebene 213

Beispiele 1—9. Die Polarfigur des Kreises; das Orthogonalsystem. Das Normalenproblem der Kegelschnitte 215

35. Die Kollinearverwandten des Kreises in Berührung zweiter Ordnung mit demselben: Oskulationskreis u. Krümmungshalbmesser 218

Beispiele 1—9. Parabel aus dem Krümmungskreis im Scheitel; oskulierende Parabel. Krümmungsmittelpunkt 219

36. Kollinearverwandte des Kreises für seinen Mittelpunkt als Kollineationszentrum, oder die Scheitel rechtwinkliger Involutionen in Bezug auf einen Kegelschnitt: Brennpunkte und Direktrixen 222

Beispiele 1—21. Die Beziehungen der Brennpunkte zu den Tangenten und Punkten des Kegelschnittes; konjugierte Fokalsehnen; der Brennpunkt als Konstruktionselement. Die entsprechenden Schaaren konfokaler Kegelschnitte in kollinearen Ebenen. Konstruktion des K. aus Brennpunkt, Direktrix und Peripherieelement: Scheitel, Hauptparameter, Asymptoten; aus Peripherieelement und Polinvolution in der Direktrix. Projektion des K. aus Brennpunkt, Direktrix und Peripherieelement 226

(36). Die Kegelschnitte aus Kreissystemen durch Kreis und Gerade: Ebener Schnitt eines gleichseitigen Rotationskegels 236

Beispiel 239

(36ᵃ). Die Kegelschnitte aus Kreissystemen durch zwei Kreise: Durchdringung von zwei gleichseitigen Rotationskegeln 239

Beispiele 1—4. Kegelschnitte aus einem Brennpunkt und drei Punkten, oder aus drei Bildkreisen. Apollonisches Problem 241

(36ᵇ). Die Kreisbüschel mit Grundpunkten bez. mit Grenzpunkten als Grenzfall; die Kreisnetze 243

Beispiel. Zyklographisches Bild der Kugel 247

(36ᶜ). Zwei Netze in derselben Ebene: drei Netze 247

Beispiele 1—6. Gleichungen der gleichseitigen Rotationshyperboloide 249

(36ᵈ). Abbildung durch reziproke Radien; Netze der gleichwinklig schneidenden zu zwei Kreisen 251

Beispiele 1—14. Rein imaginäre Direktrix. Stereographische Projektion. Kugelnetze: gleichwinklig schneidende zu zwei Kugeln; sphärische Kreisbüschel und Netze 255

§ Seite
(36e). Kreise, die einen festen Kreis unter vorgeschriebenem Winkel schneiden; exzentrische Netzhyperboloide 257
Beispiele 1—5. Doppeltberührende Kreise eines Kegelschnittes. Der unendlich ferne imaginäre Kreis 261
Überblick. Die Kegel zweiten Grades nach ihrer Bestimmung und Konstruktion; die Involution an denselben und ihre Zentralkollineation mit sich selbst: Achsen des schiefen Kreiskegels; Fokalstrahlen und Direktrixebenen. Sphärische Zentralkollineation 262
Beispiele 1—12. Ponceletsche Probleme. Sphärische Büschel und Netze von Kreisen. Involutionstheorie der Kegel 268

C. Die zentrische Kollineation räumlicher Systeme als Theorie der Modellierungsmethoden.
§§ 37—45; S. 173—297.

37. Das Zentrum, die Kollineationsebene und die Gegenebenen der Zentralkollineation räumlicher Systeme 273
38. Das charakteristische Doppelverhältnis derselben 274
Beispiele 1—3. Perspektivische Tetraeder, Pyramiden und Kegel 275
39. Die Konstruktion der entsprechenden Elemente zu gegebenen Geraden, Punkten und Ebenen in zentrisch kollinearen räumlichen Systemen 276
Beispiele 1—9. Entsprechende ebene Systeme in denselben; entsprechend gleiche Strecken und Winkel 277
40. Die Ableitung der Projektionen des zentrisch kollinearen Systems zu einem gegebenen räumlichen System 279
Beispiele 1—2 281
41. Die Bildlichkeit der zentrisch kollinearen räumlichen Systeme; die Reliefperspektive und ihre Anwendungen; Einmodellierung der Sonnenschatten, etc.. 281
Beispiele 1—10. Kegel, Kugel und gleichseitige Rotationshyperboloide als Originale 284
42. Die involutorische Kollineation räumlicher Systeme und die Spezialfälle der Symmetrie in Bezug auf eine Ebene oder ein Zentrum; die Affinität und die Kongruenz. Die Modellierungsmethoden der Technik 286
Beispiel 1—5. Kugel und zweifaches gleichseitiges Rotationshyperboloid. Volumengleichheit 288
43. Die Methoden der Abbildung auf eine Ebene als Grenzfälle der zentrischen Kollineation der Räume. Vorzüge der orthogonalen Projektion. Die Kombination von zwei Parallelprojektionen für die Bestimmung der Raumformen 289
Beispiele 1—5. Bilder als unendlich dünne Reliefs; bizentrale Projektion 292
44. Von den projektivisch kollinearen räumlichen Systemen und ihrer Bestimmung. 293
Beispiele 1—3. Perspektivische Lage 294
45. Die Beziehung von drei räumlichen Systemen, welche paarweis zentrisch kollinear sind 295
Beispiele 1—5. Das zentrisch kollineare Modell bei Veränderung des Zentrums. Kreise und Kugeln 296

D. Die Grundgesetze der orthogonalen Parallelprojektion, ihre Transformation und die Achsonometrie.
§§ 46—61; S. 298—404.

46. Die Bestimmung der Punkte des Raumes durch eine Orthogonalprojektion; durch Bezug auf drei zueinander rechtwinklige Projektionsebenen; das projizierende Parallelepiped und die Neigungen der Geraden 298

§ Seite

Beispiele 1—5. Die Halbierungsebenen und die Halbierungsachsen des Projektionssystems 300

47. Die Ebene und ihre Spuren in den Projektionsebenen, ihre Schnitte mit den Halbierungsebenen und Halbierungsachsen, die Neigungen der Ebene 301

Beispiele 1—16. Das Orthogonalsystem der S, s, H, h in der Ebene; Zeichen der Koordinaten ihrer Punkte; spezielle Lagen; Abstände des Punktes von den Halbierungsebenen. 303

48. Die Gerade und ihre projizierenden Ebenen, ihre Durchstoßpunkte S_i und Punkte $\mathfrak{H}_i$; die in ihr liegenden Punkte und die durch sie gehenden Ebenen. 306

Beispiele 1—10. Zeichenwechsel der Koordinaten ihrer Punkte; Involution der $\mathfrak{H}_i$ 307

49. Die Darstellung der Projektionen eines Punktes und die sie verbindenden Gesetze; die Gerade von ihm nach dem Anfangspunkt und ihre Tafelneigungen β_i 308

Beispiele 1—6. Punkte der Halbierungsebenen und -achsen . 309

50. Die Darstellungen der Projektionen der geraden Linie, ihrer Durchstoßpunkte, etc. 309

Beispiele 1—10. Gerade durch P aus β_1, β_2. Spezielle Lagen der Geraden 310

51. Die Darstellung einer Ebene durch ihre Spuren; die des Systems ihrer h_i und H_i; ihre Tafelneigungen und Normalen; Ebenen durch P aus α_i, α_k; die Schnittlinie von zwei Ebenen 312

Beispiele 1—20. Bestimmung von Ebenen; die Ebenen mit zwei gleichen Winkeln α; durch eine Gerade — als Normalebenen der Halbierungsebenen 314

52. Die Darstellung einer Ebene durch zwei sich schneidende Gerade; die Konstruktion des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene und der Schnittlinie von zwei Ebenen; das Parallelepiped aus drei windschiefen Kanten. 316

Beispiele 1—9. Mittelpunkt der Kugel durch vier Punkte; der Rotationskegel 318

53. Die Geraden $h_{x'}$, $h_{z'}$ als Achsen der Affinitäten zwischen den Projektionen ihres ebenen Systems; ihre Verwendung zur Bestimmung der auf der Ebene liegenden Punkte und Geraden; ihre Bestimmung aus den Daten. Die Unterscheidung der Flächen nach dem Vorzeichen ihres Inhaltes. Der Kegelschnitt durch fünf Punkte 318

Beispiele 1—20. Spezielle Lagen der Affinitätsachsen; Projektionen eines Kegelschnittes; speziell aus Brennpunkt und Direktrix mit einem Peripherieelement; Bestimmung der Ebenen aus ihren Δ_{ik} 325

54. Der Winkel von zwei Geraden und die Umlegung und Aufrichtung ebener Figuren 330

Beispiele 1—30. Projektionen des Kreises; ebener Schnitt einer Kugel; Projektion eines Dreiecks ähnlich einem gegebenen; Transversale zweier Geraden von gegebener Länge und parallel gegebener Ebene; die Probleme der dreiseitigen Ecke; reguläre Polyeder 331

54*. Bestimmung der Raumelemente durch eine Orthogonalprojektion insbesondere mit der unter 45° zur Tafel geneigten Fixebene. Normalen der Ebene und Normalebenen der Geraden; Winkel von zwei Ebenen. Querschnitt der Pyramide 340

Beispiele 1—7. Dreiflächige Abstumpfungen der dreiseitigen Ecke. Kotierte Darstellung 343

55. Vom ebenen Schnitt eines Polyeders, speziell von den Schnitten der Pyramiden und Prismen 344

§ Seite

Beispiele 1—6. Zentrische Kollineation von Pyramidenschnitten. Das Prisma und sein Normalschnitt 347

56. Die Durchdringung von zwei Polyedern 347
Beispiele 1—3. Speziell mit Prisma und Pyramide 350

57. Von den Transformationen, ihren Vorteilen bez. ihrer Notwendigkeit; insbesondere von den Parallelverschiebungen des Projektionssystems oder der Objekte 351
Beispiele 1—2 352

58. Von den Drehungen der Objekte um Projektionsachsen oder um solche Gerade, die ihnen parallel sind 352
Beispiele 1—12. Allgemeine Polyederprojektionen durch Drehungen aus speziellen, Rhombendodekaeder. Überführung von Geraden und Ebenen in parallele Lage zu den Projektionsachsen und -ebenen; eingeschriebene Kugel des Tetraeders und und acht berührende Kugeln zu vier Ebenen; Kugeln, welche vier Kanten eines Tetraeders berühren, etc. 353

59. Von den Drehungen des Projektionssystems 359
Beispiele 1—18. Umklappung, Distanzen und Winkel. Konstruktion der Sonnenuhren; Transversalen zu drei Geraden. Die Ebenen durch eine Gerade unter bestimmten Winkeln zu einer anderen Geraden. Gemeinsame Punkte und Tangentialebenen von drei Kugeln, gemeinsame Elemente von zwei konzentrischen Rotationskegeln. Projektionen eines Prisma's . . 360

60. Das Problem der Achsonometrie für orthogonale Parallelprojektion; seine Lösung durch Transformation, durch direkte Konstruktion aus dem Spurendreieck der Projektionsebene und durch Rechnung; die einfachen Verhältnisse der Maßstäbe, die isometrische, monodimetrische und anisometrische Darstellung 364
Beispiele 1—13. Der Schlömilchsche Satz; die Ableitung wahrer Größen durch Umklappung in eine Bildebene; der Drehungswinkel der Umklappung; Behandlung von Kreis und Kugel; die Transformation der orthogonalen Achsonometrie 369

61. Das Problem der Achsonometrie für schiefwinklige Parallelprojektion und der Pohlke'sche Satz als Spezialfall der Bestimmung kollinearer Systeme; die gegenseitige Lage der Bildebene und des projizierenden Strahles und die wahren Maßstäbe 377
Beispiele 1—14. Achsonometrie und Zentralprojektion im Vergleich; Parameterkörper 382

Schlußüberblick zu den Abschnitten C, D. Die Methoden und ihre Objekte 385
Speziell: Transformatienen der allgemeinen Zentral- und Parallelprojektion; symmetrische Parallelprojektionen; Méthode des plans cotées und von Monge 388
Notwendige und eventuell entbehrliche Data des Projektionssystems. Vieldeutigkeit von Konstruktionen 389
Die benutzten Objekte als eine natürliche Gruppe; ihre speziellen und allgemeinen Symmetrieeigenschaften; drei Arten der elementaren Symmetrie im dreidimensionalen Raume 397
Die imaginären Raumelemente: Imaginäre Punkte in reellen Geraden, imaginäre Ebenen durch reelle Gerade, imaginäre Gerade mit einem reellen Punkt und in einer reellen Ebene; rein imaginäre Gerade, der Spurpunkt und die projizierende Ebene 400

Übersicht der Figuren und Tafeln

des ersten Teiles.

Im allgemeinen kann für die nähere Erläuterung der Figuren überall auf den Text verwiesen werden; nur in einigen Fällen, besonders bei Tafeln, ist dieselbe der Natur der Sache nach hier zu geben.

Abschnitt A. S. 8—135.

§ 1, S. 9. Der projizierende Strahl, seine Länge l und Tafelneigung β; Neigungskreise.

§ 2, - 10. Die projizierende Ebene, ihre Breite l und Tafelneigung α; Neigungskreise.

§ 3, - 11. Die Zentralprojektion SQ' der Geraden und ihre Tafelneigung β.

§ 3, - 12. Die Abschnitte der Geraden; Bildlänge SQ' und Bildmitte M'. Schematische Skizze: Achsonometrisch.

§ 4, - 14. Die Umlegungen SR, SR^* der Geraden SQ' mit ihrer projizierenden Ebene in die Bildebene.

§ 5, - 16. Die Zentralprojektion der Ebene und ihre vier Regionen. Achsonometrisch.

§ 5, - 17. Bestimmung der Ebenen aus der Fluchtlinie q' und dem Abstand e vom Zentrum.

§ 6*, - 20. Allgemeine Zentralprojektion mit fester Ebene U im Endlichen für eine Gerade (S, U') und eine Ebene (s, u'). Achsonometrisch.

§ 7, - 21. Die Umlegung (g) der Geraden g' oder SQ' mit ihrer zur Tafel normalen Ebene.

§ (7), - 25. Die lineare Kreisreihe vom Durchstoßpunkt S und dem Kreis vom Radius r aus P_1; ihr Schnittwinkel σ mit einem Strahl durch S.

§ (7), - 27. Das planare Kreissystem von der Spur s und dem Kreis P_1, r; sein Schnittwinkel σ mit der Spur, Tafelneigung β und Abweichung θ für eine seiner linearen Reihen S, r, P_1.

§ 9, - 32. Die vier allgemeinen typischen Bilder des Parallelepipedes aus drei Schichten für ein Auge außerhalb der drei Schichten, für eins in einer Schicht, in zwei Schichten und das Zentrum im Innern des Parallelepipeds, von welchem die Verschwindungsebene einer Ecke abschneidet.

§ 9, - 34. Die Umlegung des Winkels von zwei sich schneidenden Geraden in die Bildebene; wiederholt gebraucht S. 44 für die Umlegung des ebenen Systems.

§ 10, - 36. Der Normalenfluchtpunkt einer Schaar von Parallelebenen und die Fluchtlinie der Normalebenen einer Schaar von parallelen Geraden.

§ 10, - 38. Die Winkel zwischen zwei Ebenen Cq_1', Cq_2' und ihre Halbierungsebenen q_{1H}, q_{2H}, sowie die zu beiden Ebenen gleich geneigten.

§ 10, - 40 oben. Die Konstruktion von Ebenen aus ihrer Schnittlinie SQ' und ihrem Neigungswinkel mit einer gegebenen Ebene sq'.

§ 10, S. 40 unten. Die Konstruktion von Ebenen durch eine gegebene Gerade SQ' und unter vorgeschriebenem Winkel α gegen eine gegebene Ebene sq' mittelst der Fluchtelemente.
§ 10, - 42 oben. Konstruktion der gemeinschaftlichen Normale $S_n Q_n'$ zu zwei Geraden $S_1 Q_1'$ und $S_2 Q_2'$.
§ 10, - 42 unten. Die trirektanguläre Ecke $C . Q_1' Q_2' Q_3'$ von projizierenden Strahlen und Ebenen.
§ 11, - 44. Umlegung und Aufstellung der Ebene sq' mittelst ihres Hauptpunktes H' und ihrer Distanzpunkte H_1', H_2'.
§ 11, - 47. Das einfache Hyperboloid **SQ**$'$ der Schnittlinien von zueinander rechtwinkligen Ebenenpaaren durch zwei feste Gerade $S_1 Q_1'$ und $S_2 Q_2'$.
§ 11, - 48. Zentralprojektion des Kreises aus Ebene sq', Mittelpunkt M' und Radius r als Ort der Schnittpunkte rechtwinkliger Strahlenpaare aus den Endpunkten seines zur Tafel parallelen Durchmessers.
§ 12, - 51 links und rechts. Transformation durch Verschiebung des Zentrums in der Verschwindungsebene und bez. in der Tafelnormale: Veränderung der Bestimmungsstücke von Gerade, Ebene und Punkt.
§ 12, - 53. Zentralprojektion eines rechtwinkligen Parallelepipeds aus seinen Bestimmungsstücken unter Benutzung der auf ein Drittel reduzierten Distanz.
§ 13, - 56. Transformation durch Verschiebung der Bildebene in Normalen zu ihr: Gerade, Ebene und Punkt.
§ 14, - 58. Die symmetrisch gleichen Reihen t, (t) und Büschel T', (T) in zentrisch kollinearen Ebenen aus der Zentralprojektion abgeleitet.
§ 14, - 60. Kollinearverwandte des Vierecks.
§ 15, - 62. Abhängigkeit des Bildes der Geraden vom Original, perspektivische Potenz.
§ 15, - 64. Die beiden Systeme von entsprechend gleichen Strecken in der Geraden g und ihrem Bild g'; ihre Vereinigung (oben) zur elliptischen bez. (unten) hyperbolischen Involution: entsprechende Nullstrecken — kleinste Strecke.
§ 16, - 68 oben. Die Gleichheit der Doppelverhältnisse in der Geraden und ihrem Bilde mit denen des projizierenden Strahlenbüschels.
§ 16, - 68 unten. Die Doppelverhältnisgleichheit von Reihen, Strahlen- und Ebenenbüscheln in perspektivischer Lage.
§ 16, - 71. Konstruktion des vierten Punktes D zu drei gegebenen Punkten A, B, C einer Reihe bei vorgeschriebenem Doppelverhältnis.
§ 16, - 74 links, rechts oben und unten. Viereck $A'B'C'D'$ und Quadrat $ABCD$ in Projektivität zur Begründung ihrer projektivischen Eigenschaften.
§ 17, - 79. Konstruktion projektivischer Reihen t, t' aus drei Paaren entsprechender Punkte AA', BB', CC'; speziell mittelst paralleler Büschel.
§ 17, - 80 a, b. Bestimmung der Geraden aus den Bildern A', B', C' und Tafelabständen y_1, y_2, y_3 von drei Punkten derselben. Figur a, links: achsonometrisches Bild; b, rechts; Konstruktion.
§ 18, - 82. Konstruktion projektivischer Büschel T, T' aus drei Paaren entsprechender Strahlen aa', bb', cc'.
§ 18, - 84. Konstruktion der entsprechenden Rechtwinkelpaare qr, $q'r'$ in zwei perspektivischen Büscheln T, T'.
§ 19, - 88. Die projektivischen vereinigten Reihen und vereinigten Büschel in zentrisch kollinearen ebenen Systemen.

§ 19, S. 90. Die geometrische Bedeutung der charakteristischen Konstanten der Zentralkollineation ebener Systeme. Achsonometrisch.
§ 19, - 92. Die entsprechenden Rechtwinkelpaare der projektivischen vereinigten Büschel in zentrisch kollinearen ebenen Systemen.
§ 19, - 93 oben: Perspektivische Dreiecke $A_1 A_2 A_3$, $A_1' A_2' A_3'$: Zentrum 𝔈 und Achse s.
§ 19, - 93 unten: Die Drehung zentralprojektivischer ebener Systeme um ihre Durchschnittslinie.
§ 20, - 95. Die involutor. Zentralkollineation 𝔈, s, $q'r$ ebener Systeme.
§ 20, - 100. Linealkonstruktion der involutorischen Reihe aus zwei Paaren XX_1, YY_1.
§ 20, - 101. Linealkonstruktion des involutorischen Büschels aus zwei Paaren xx_1, yy_1.
§ 21, - 108. Die Doppelpunkte projektivischer Reihen in derselben geraden Linie, a. bei gleichem Sinn, b. bei ungleichem Sinn, aus den Gegenpunkten und einem Paare.
§ 22, - 112 a, links: Parallelprojektion ebener Systeme; b, rechts: achsonometrisch.
§ 22, - 113. Achsensymmetrie ebener Systeme.
§ 22, - 114. Flächengleichheit ebener Systeme; ihr Zusammenhang mit der achsialen Symmetrie.
§ 22, - 114 a, unten links: Ähnlichkeit und ähnliche Lage ebener Systeme; b, rechts: achsonometrisch.
§ 22, - 116 a, links: Kongruenz ebener Systeme, b, rechts: achsonometrisch.
§ 23, - 123 a, b, c: Die zentrische Kollineation ebener Systeme wird durch zwei einander entsprechende Vierecke bestimmt; a) die Vierecke $ABCD$, $A'B'C'D'$, Ableitung der Gegenachsen r und q' und der Zentra $𝔈_1$, $𝔈_2$, bez. $𝔈_1'$, $𝔈_2'$ aus denselben mittelst der projektivischen Reihen in zwei Gegenseiten. (Vergl. S. 179). b) Die vier zentrisch kollinearen Anordungen in der Ebene, ihre Achsen und Gegenachsen. c) Achsonometrische Skizze über die beiden räumlichen zentralprojektivischen Lagen.
Überblick. S. 132. Die Reihe der Durchstoßpunkte eines projizierenden Strahlenbüschels und das Büschel der Spuren der zu ihnen bez. normalen projizierenden Ebenen: Orthogonalsystem.

Abschnitt B. S. 136—272.

§ 24, - 137. Die Fundamentaleigenschaften des Kreises, seiner Punkte $A, B, \ldots$ und seiner Tangenten $a, b, \ldots$
§ 24, - 138. Der Übergang derselben auf die Projektionen des Kreises, und zwar die elliptischen.
§ 24, - 139. Der Übergang derselben auf die Projektionen des Kreises, nämlich die hyperbolischen.
§ 25, - 143 links, rechts. Fundamentaleigenschaften des Kegelschnittbüschels und bez. der Kegelschnittschaar mit lauter reellen gemeinsamen Punkten bez. Tangenten.
§ 26, - 146. Die zentrischen Kollinearverwandten des Kreises als Hyperbel, Ellipse, Parabel.
§ 26, - 148. Die Kollineation zweier Kegelschnitte K, K' überhaupt.
§ 26, - 149. Die zentrische Kollineation zweier Kegelschnitte.
§ 27, - 151. Das Pascalsche Sechseck $AB_1\, CA_1\, BC_1$.
§ 27, - 152. Die Konstruktion des Kegelschnittes aus fünf Punkten und die der Tangente in jedem seiner Punkte.

§ 27, S. 153 oben. Konstruktion der Tangenten in zweien der fünf Bestimmungspunkte eines Kegelschnittes.

§ 27, - 153 unten. Konstruktion eines Kegelschnittes aus drei Punkten und den Tangenten in zweien derselben.

§ 28, - 156. Das Brianchonsche Sechsseit $ab_1ca_1bc_1$.

§ 28, - 157. Das einem Kegelschnitt eingeschriebene Viereck $ABCD$ und das zugehörige umgeschriebene Vierseit $abcd$ mit den Diagonalpunkten E, F, G und Diagonalen e, f, g.

§ 28, - 159. Die Identität der Kurven zweiter Klasse mit denen zweiter Ordnung.

§ 29, - 163. Konstruktion der Tangenten f_1, f_2 aus einem Punkte T an einen durch fünf Tangenten a, b, c, t, t' bestimmten Kegelschnitt.

§ 29, - 165. Konstruktion der Schnittpunkte F_1, F_2 einer Geraden t mit einem durch fünf Punkte 1, 2, 3, T, T' gegebenen Kegelschnitt.

§ 29, - 167. Konstruktion der Kegelschnitte, welche durch vier Punkte 1, 2, 3, 4 gehen und eine Gerade t berühren.

§ 30, - 171 oben, Mitte, unten. Der Kegelschnitt als in involutorischer Zentralkollineation mit sich selbst für einen Punkt seiner Ebene als Zentrum oder eine Gerade derselben als Achse. Oben: Elliptisch mit Doppelelementen. Mitte: Hyperbolisch mit Doppelelementen. Unten: Elliptisch ohne Doppelelemente und parabolisch mit solchen.

§ 30, - 174 oben. Die Gerade von einem Punkte S nach dem unzugänglichen Schnittpunkt von zwei Geraden g, g' mittelst der Involution (vergl Figur S. 74).

§ 30, - 174 unten. Konstruktion der Polare p eines Punktes P in Bezug auf den durch fünf Punkte 1,2,3,4,5 bestimmten Kegelschnitt.

§ 20, - 175. Konstruktion des Mittelpunktes für den durch fünf Tangenten 1, 2, 3, 4, 5 bestimmten Kegelschnitt.

§ 31, - 176 links und rechts. Konstruktion der Involution von Punkten (links) und von Strahlen (rechts) aus zwei Paaren, insbesondere ihrer Doppelelemente; mittelst des Hilfskreises.

§ 31, - 177. Konstruktion der Rechtwinkelstrahlen r, r_1 eines involutorischen Büschels aus zwei Paaren aa_1, bb_1.

§ 31, - 179. Die Zentra $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2'$ der kollinearen ebenen Systeme aus zwei Vierecken mittelst der Entsprechenden zur Involution rechtwinkliger Richtungen in den Gegenachsen r, q'. Vergl. S. 123.

§ 32, - 187. Die Involutionen harmonischer Pole XX_1, YY_1, ZZ_1 und Polaren xx_1, yy_1, zz_1 auf der Polare p und um ihren Pol P in Bezug auf den Kegelschnitt.

§ 32, - 190. Konstruktion der Involution harmonischer Pole in einer Geraden p und der Involution harmonischer Polaren um ihren Pol P in Bezug auf einen durch fünf Punkte 1, . . ., 5 bestimmten Kegelschnitt.

§ 32, - 191. Radikal-konjugierte Punkte P, P^* in Bezug auf einen Kreis K und orthogonale Kreise.

§ 32, - 195. Konstruktion der Punkte A, A' etc. und Tangenten a, a' etc. des Kegelschnittes aus Pol P, Polare p, nebst Involutionen T'', T_1''; X, X_1; etc. und einem Peripherieelement T, t.

§ 33, - 200. Ein Durchmesser der Hyperbel und zu ihm konjugierte Sehnen derselben.

§ 33, - 204. Konstruktionen der Tangenten und der Punkte der Ellipse links und der Hyperbel rechts aus zwei konjugierten Durchmessern mittelst ihrer Involutionen.

§ 33, - 205. Konstruktion der Tangenten und Punkte der Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern nach Brianchon-Pascal.

§ 33, S. 209. Konstruktion der Schnittpunkte einer Geraden g und der Tangenten aus einem Punkte P mit einer Ellipse, die durch zwei konjugierte Durchmesser bestimmt ist; mit Hilfe der Affinität derselben zum Kreise.
§ 35, - 218. Der Krümmungskreis für einen Punkt $\mathfrak{C}$ im Kegelschnitt und seine Konstruktion: Bestimmung seines Mittelpunktes.
§ 35, - 220. Konstruktion des Krümmungskreises im Scheitel $\mathfrak{C}$ aus der Hauptachse und einem Punkte 3 des Kegelschnittes.
§ 36, - 224. Die Kollinearverwandten des Kreises für seinen Mittelpunkt als Kollineationszentrum: Ellipse, Hyperbel, Parabel mit $\mathfrak{C}$ als Brennpunkt und q' als zugehöriger Direktrix; bez. obere, mittlere, untere Figur.
§ 36, - 225. Die Brennpunkte des Kegelschnittes als Scheitel rechtwinkliger Involutionen harmonischer Polaren: Ellipse unten und Hyperbel oben.
§ 36, - 228. Die Beziehungen der Brennpunkte zu den Tangenten der Kegelschnitte: Ellipse, Hyperbel bez. links, rechts.
§ 36, - 233. Der Kegelschnitt aus Brennpunkt F, Direktrix f und Peripherieelement T oder t.
§ (36), - 236. Der Kegelschnitt als Ort der Zentra der berührenden zu zwei festen Kreisen; wieder benutzt für reziproke Radien auf S. 252.
§ 36*, - 258. Das Kreisbüschel und die Kreise unter Winkeln von gegebenem Kosinus zu einem festen Kreis; Netzhyperboloide und Winkelschnitthyperboloide.

§ 32, S. 197 unten. Tafel I links, Mitte und rechts. Büschel und Scharen von Kegelschnitten Figur a bis n. Alle Hauptfälle sind dargestellt, für jeden Fall ist der Kegelschnitt eingezeichnet, welcher die Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels enthält, und ebenso die gerade Linie, in der die Mittelpunkte der Kegelschnitte der Schaar liegen. Die gemeinschaftlichen Punkte sind überall durch A, B, C, D und die Ecken des gemeinsamen Tripels harmonischer Pole durch X, Y, Z bezeichnet; ein imaginäres Paar C, D ist durch die elliptische Involution harmonischer Pole CC_1, DD_1 ersetzt; etc. Ebenso heißen die gemeinsamen Tangenten a, b, c, d und die sie ersetzenden Involutionen aa_1, bb_1; cc_1, dd_1. Der Ort der Mittelpunkte ist durch **M** bezeichnet und in punktierter Linie ausgeführt, die Mittelpunkte der verzeichneten Kegelschnitte sind angegeben.

Tafel I, Figur a bis d. Figur a enthält das Büschel mit vier reellen gemeinsamen Punkten, die ein konvexes Viereck bilden; man sieht die beiden Parabeln desselben, eine Ellipse, zwei Hyperbeln und die Hyperbel der Mittelpunkte, die durch die Diagonalpunkte des Vierecks geht und die Durchmesserrichtungen der Parabeln enthält. Wenn die vier gemeinsamen Punkte auf einem Kreise lägen, so sind die Durchmesserrichtungen der Parabeln rechtwinklig zueinander und der Mittelpunktsort ist eine gleichseitige Hyperbel. (Vergl. Figur i.)

In Figur b ist das Büschel durch vier reelle Grundpunkte dargestellt, von denen einer im Dreieck der andern liegt; das daher keine Ellipsen und Parabeln, sondern nur Hyperbeln enthält, dessen Mittelpunktsort somit eine Ellipse ist. Die Figur gibt die gleichseitige, die beiden Hyperbeln mit 60° Asymptotenwinkel und die mit dem Minimalwert desselben. Wäre die Gruppe der vier Punkte aus den Ecken eines Dreiecks und dem Schnittpunkt seiner Höhen gebildet, so würden alle Hyperbeln gleichseitig und der Mittelpunktsort der durch die Höhenfußpunkte des Dreiecks gehende Kreis — der Feuerbachsche.

Figur c gibt das Büschel für zwei reelle und zwei konjugiert imaginäre gemeinsame Punkte, dessen Mittelpunktskegel-

schnitt eine Ellipse ist, von seinen Hyperbeln ist die gleichseitige und die mit dem kleinsten Asymptotenwinkel hervorgehoben; auch die beiden mit 75° sind eingetragen. Die Gerade der elliptischen Involution, die die imaginären Punkte definiert, schneidet die Verbindungslinie der reellen Punkte zwischen diesen.

Figur d ist das Büschel für zwei reelle und zwei konjugiert imaginäre gemeinsame Punkte, dessen Mittelpunktskegelschnitt eine Hyperbel ist, das also zwei Parabeln und neben unendlich vielen Hyperbeln auch unendlich viele Ellipsen enthält. Die Gerade der elliptischen die imaginären Punkte definierenden Involution schneidet die der reellen außerhalb ihres endlichen Segments. Beide Parabeln und die gleichseitige Hyperbel des Büschels sind eingezeichnet. Hier kann die Mittelpunktshyperbel gleichseitig werden, d. h. unter den Ellipsen des Büschels der Kreis auftreten; in c) kann der Mittelpunktsort zum Kreise werden und das Büschel aus lauter gleichseitigen Hyperbeln bestehen.

Figur e bis h. Figur e ist das Büschel mit zwei Paaren konjugiert imaginärer gemeinsamer Punkte; der Mittelpunktskegelschnitt ist eine Hyperbel, die beiden Parabeln und die gleichseitige Hyperbel des Büschels sind eingezeichnet. Das Büschel von Kreisen mit Grenzpunkten ist ein Büschel dieser Art, sowie das Kreis büschel mit Grundpunkten eines der vorigen Art.

Figur f gibt die Schar von Kegelschnitten mit vier reellen gemeinsamen Tangenten; die Gruppe von Ellipsen, die Parabel der Schar und ihre Hyperbelreihen sind angegeben; die Linie der Mittelpunkte ist eingetragen.

Figur g ist die Schar der Kegelschnitte mit zwei reellen und zwei konjugiert imaginären gemeinsamen Tangenten. wenn diese letzten speziell parallel sind — für den Fall von lauter Hyperbeln. Man ist veranlaßt, nach dem Falle von lauter Ellipsen zu fragen.

Figur h enthält eine Schar mit zwei Paaren von konjugiert imaginären gemeinsamen Tangenten; die Parabel der Schar, zwei Ellipsen und drei Hyperbeln sind angegeben. Sind die beiden elliptischen Polarinvolutionen aa_1, bb_1 uud $a'a_1'$, $b'b_1'$ speziell rechtwinklig, so hat man die Schaar der konfokalen Kegelschnitte.

Figur i bis n; die hauptsächlichen Grenz- und Spezialfälle der Büschel und Scharen. Wir erwähnen hier zugleich die nicht gezeichneten in Anknüpfung an die Figuren, aus denen sie am einfachsten vorstellbar sind. Wenn man in Figur a zwei der gemeinsamen Punkte, etwa die beiden unteren, unendlich nahe zusammengerückt denkt, so entsteht das Büschel mit Berührung und noch zwei reellen gemeinsamen Punkten. Ebenso kann aus d) ein Büschel mit Berührung und zwei konjugiert imaginären gemeinsamen Punkten gemacht werden. (Warum nicht analog beides aus b) und c)?) Eine Schaar mit Berührung und zwei reellen gemeinsamen Tangenten läßt sich aus Fig. f, und eine Schaar mit Berührung und zwei konjugiert imaginären gemeinsamen Tangenten aus g) entwickeln. Es folgen gezeichnet die Hauptfälle der Oskulation oder der Berührung zweiten Grades unter den Kegelschnitten; in Figur i für das Büschel mit Angabe der zwei Parabeln und der gleichseitigen Hyperbel. Der Mittelpunktsort ist eine gleichseitige Hyperbel, die im Oskulationspunkte die Kegelschnitte berührt. (Vergl. Figur a.)

Sodann in Figur k die Schar der oskulierenden Kegelschnitte Ellipsen und Hyperbeln mit der Parabel des Überganges und der geraden Linie der Mittelpunkte.

In Figur l die vierpunktig berührenden Kegelschnitte, die zugleich ein Büschel und eine Schar bilden.

Die Figuren m und n geben endlich die Typen der doppeltberührenden Kegelschnitte, die wiederum gleichzeitig Büschel und

Schar sind; m) mit reellen Berührungspunkten, n) mit konjugiert imaginären. Wir kennen beide in Form der Konstruktion aus Pol, Polare, Involution und Peripherieelement, als Ergebnis der Veränderung derselben aus S. 195 des Textes.

Zur Ableitung von Spezialfällen aus den typischen Formen vergleiche man die Erörterungen im Text § 33, 20. Man verwandelt die Figur n durch eine zentrische Kollineation mit x als Gegenachse in ein System konzentrischer ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen und durch gleichzeitige Überführung der Involution um X in eine rektanguläre in ein System konzentrischer Kreise; ebenso m) durch Kollineation mit x als Gegenachse unter gleichzeitiger Verwandlung der Involution in eine symmetrische in das System gleichseitiger Hyperbeln mit denselben Asymptoten. Man verwandelt h) durch eine gewisse Umformung dieser Art a) in die Schar der konfokalen Kegelschnitte, b) in das Büschel aus lauter gleichseitigen Hyperbeln mit dem Feuerbachschen Kreise der gemeinsamen Punkte als Mittelpunktsort; etc., etc.

Abschnitt C, S. 273—297.

§ 40, S. 279. Der konstruktive Zusammenhang von zwei zentrisch kollinearen Raumfiguren; achsonometrisch. Die Grundform $A_1 \, . \, . \, A_4 \, A_4{}^* \, . \, . \, A_1{}^* A_5$ eines Gebäudes und ihr Reliefmodell.

§ 41, - 282 und 283. Die Ableitung der orthogonalen Parallelprojektionen der zentrisch kollinearen Raumfigur zu einer gegebenen aus den Projektionen der letzteren; die Kollineationsebene normal zur Achse x bez. in der Ebene xz.

§ 42, - 287. Perspektivisch affine räumliche Systeme; achsonometrisch.

§ 43, - 290. Die Charakteristik der Parallelprojektion und der Vorzug der orthogonalen vor der schiefen.

§ 44, - 294. Zur Bestimmung von projektivisch kollinearen räumlichen Systemen.

§ 45, - 295. Drei in Paaren zentrisch kollineare räumliche Systeme haben ihre Zentra in einer Geraden.

Abschnitt D, S. 298—404.

§ 46, - 298. Die Bestimmung des Punktes A in Bezug auf zwei Ebenen und einen Anfangspunkt O in ihrer Schnittlinie x; achsonometrisch.

§ 46, - 299 und 365 oben. Die Bestimmung des Punktes A in Bezug auf drei Projektions- oder Koordinatenebenen XOY. XOZ, YOZ; achsonometrisch.

§ 47, - 301. Die sechs Halbierungsebenen und ihre Schnittlinien zu dreien, die vier Halbierungsachsen $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_x$, $\mathfrak{h}_y$, $\mathfrak{h}_z$ des Projektionssystems als Diagonalebenen und Diagonalen eines Würfels; achsonometrisch. (Vergl. die Anm. von S. 368.)

§ 47, - 302 und 366 unten. Die Spuren einer Ebene $S_x S_y S_z$, ihre Normale ON vom Anfangspunkte und ihre Schnittlinien $h_x, h_{x'}$; $h_{y'}, h_{y''}$; $h_z, h_{z'}$ mit den Halbierungsebenen des Projektionssystems; achsonometrisch.

§ 47, - 303. Die Konstruktion des vollständigen Vierecks $H H_x H_y H_z$ der Schnittpunkte der Halbierungsachsen einer Ebene aus dem Spurendreieck $S_x S_y S_z$ derselben.

§ 47, - 305. Der Zeichenwechsel der Koordinaten in den Flächenteilen der Ebene, welche die Koordinatenebenen begrenzen.

§ 48, - 306 oben. Die projizierenden Ebenen gg', gg'', gg''' und die Durchstoßpunkte S_1, S_2, S_3 der Geraden g mit den Projektionsebenen; achsonometrisch.

§ 48, S. 306 unten und S. 310. Die Punkte $\mathfrak{H}_i$ und S_i einer Geraden in ihrer Beziehung zu dem System der Linien h_i und der Spuren s_i einer durch sie gehenden Ebene $S_x S_y S_z$.
§ 49, - 308. Die drei Projektionen A', A'', A''' eines Punktes A und sein Abstand vom Anfangspunkt O.
§ 50, - 309. Die drei Projektionen g', g'', g''' einer Geraden und ihre Durchstoßpunkte S_1, S_2, S_3.
§ 51, - 312. Die drei Spuren s_i einer Ebene und die Projektionen ihrer Punkte H_i, das Dreieck derselben und das vollständige Viereck der h_i in wahrer Größe.
§ 51, - 313. Die Tafelneigungen α_i einer Ebene aus ihren Spuren s_i.
§ 52, - 316. Konstruktion der Projektionen des Schnittpunktes D einer Geraden g_1 mit der durch zwei Gerade g, l bestimmten Ebene.
§ 52, - 317. Konstruktion der Projektionen der Schnittlinie d von zwei Ebenen. deren jede durch zwei sich schneidende Gerade g, l; g_1, l_1 bestimmt ist.
§ 53, - 319. Die Bestimmung der Projektionen eines ebenen Systems, das durch die Affinitätsachse $h'_x{}''$ und die Projektionen A', A'' eines Punktes A außer ihr gegeben ist.
§ 53, - 320. Die Bestimmung der Projektionen eines ebenen Systems, das durch die beiden Affinitätsachsen $h'_x{}''$ und $h''_z{}'''$ bestimmt ist.
§ 53, - 328. Projektion eines Kegelschnitts aus Brennpunkt, Direktrix und Peripherieelement. Grundriss.
§ 54, - 330. Die Konstruktion der wahren Größe des Winkels φ von zwei Geraden g und l.
§ 54, - 332. Die Umlegung einer ebenen Figur und die Halbierungsebenen H, H* des bezüglichen Drehungswinkels.
§ 54, - 333. Die Bestimmung der Orthogonalprojektion, in welcher ein gegebenes Dreieck einem andern Dreieck ähnlich wird.
§ 54, - 334. Zur Konstruktion der Transversalen zweier Geraden g und l, welche gegebene Länge e haben und einer bestimmten Ebene parallel sind; achsonometrisch.
§ 54, - 335. Die konstruktive Auflösung der dreiseitigen Ecke: aus drei Kantenwinkeln a, b, c die Flächenwinkel α, β, γ.
§ 54, - 336 oben. Die Probleme der dreiseitigen Ecke im symmetrischen Zusammenhang mit dem sphärischen Dreieck: achsonometrisch.
§ 54, - 336 unten. Die Auflösung der sechs Probleme über die dreiseitige Ecke mit Hilfe einer einzigen Konstruktionsfigur.
§ 54, - 338. Konstruktion derjenigen Ebenen, welche gegen die erste Projektionsebene und eine gegebene vertikal projizierende Ebene vorgeschriebene Winkel machen.

Tafel II, rechts, unten; Fig. a, b, c. Die dreiflächigen Abstumpfungen der dreiseitigen Ecke. (§ 54.) Die dreiseitige Ecke vom Scheitel S ist in jedem Falle durch drei Ebenen abgeschnitten, die als erste, zweite und dritte bezeichnet werden können, da ihre Schnittpunkte mit den Kanten durch die Ziffern 1, 2 bez. 3 bezeichnet sind; für ihre Schnittlinien untereinander sind in jedem Falle die Durchstoßpunkte mit zwei Flächen der Ecke markiert, nämlich Punkte I in der Schnittlinie der Ebenen 2 und 3, II in der der Ebenen 3 und 1 und III in derjenigen der Ebenen 1 und 2. Die schließliche Gestalt der Eckenabstumpfung ist durch stärkere Linien hervorgehoben. Augenscheinlich könnte die Vertikalprojektion weggelassen werden, wenn man nur die Höhe von S über der Grundrißebene markierte. Die Konstruktion belegt den Satz: Wenn drei Dreiecke für dasselbe Zentrum in Paaren zentrisch kollinear sind, so schneiden sich ihre Kollineationsachsen in einem Punkte. Die Abstumpfungen der Ecke sind in den drei Fällen a, b, c typisch verschieden voneinander infolge

der verschiedenen Reihenfolge der Kantenschnitte der einzelnen Ebenen vom Scheitel aus. In a) haben wir auf den drei Kanten von S aus die Folgen 123, 321, 213; in b) 123, 231, 312 und in c) 123, 321, 132. Der reguläre oder zyklische Fall b) zeigt drei viereckige Abstumpfungsflächen, während im Falle a) Dreieck, Viereck und Fünfeck und im Falle c) zwei Dreiecke und ein Fünfeck auftreten. Sind noch andere typische Hauptfälle möglich? Man leitet leicht aus den gegebenen Figuren die Anschauung der Grenzfälle ab, wo ein oder zwei oder alle drei äußersten Ecken der Abstumpfung unendlich fern liegen.

§ 54, S. 339. Die Projektionen des regulären Ikosaeders, das eine seiner Flächen in der ersten Projektionsebene hat. Zirkelkonstruktion des regulären Fünfecks.

§ 54*, - 341 links. Bestimmung aus einer Orthogonalprojektion: Normale der Ebene und Distanz des Punktes von ihr.

§ 54*, - 341 rechts. Neigungswinkel von zwei Ebenen.

§ 55, - 345. Konstruktion des ebenen Querschnittes einer Pyramide und seiner wahren Größe und Gestalt mit Hilfe der zentrischen Kollineation, in der er zu ihrer Basis steht.

§ 56, - 348. Schemafigur zur Durchdringung zweier Polyeder: Bildung des Durchdringungspolygons.

§ 56, - 349. Konstruktion der Durchdringung eines Würfels mit vertikaler Hauptdiagonale und eines Ikosaeders mit horizontaler Fläche. Dreiteilige Durchdringung.

§ 56, - 350. Konstruktion der Durchdringung einer vierseitigen Pyramide mit einem Prisma mit Hilfe der Ebenen desjenigen Büschels, welches die Parallele aus der Spitze des ersteren zu den Längenkanten des letzteren zur Scheitelkante hat.

§ 57, - 351. Die Parallelverschiebung der Projektionsebene XOY und ihre Folgen für die Projektionen eines Punktes A und einer Geraden g, sowie für die Spuren s_i einer Ebene. Bei dieser Figur und den nächsten bis mit Fig. auf S. 365 oben ist es zweckmäßig für den Zeichner, die einander folgenden Transformationen durch verschiedene Farben in Zeichnung und Schrift zu unterscheiden.

§ 58, - 352. Konstruktion der Schnittlinie d von zwei Ebenen bei unzugänglichem zweiten Durchstoßpunkt derselben.

§ 58, - 353. Die Transformation durch Drehung der Objekte um die Achse und $\theta = +30^{\circ}$ für Punkt A, gerade Linie g und Ebene s_i; die Horizontalspuren s_1 und ${}_1s_1$ sind Tangenten desselben aus O beschriebenen Kreises in Punkten, deren Bogenabstand $= +30^{\circ}$ ist.

Tafel **II**, links. Die berührenden Kugeln zu vier Ebenen. Es ist ein Fall dargestellt, in welchem alle acht Kugeln nicht nur ihre Mittelpunkte innerhalb des Blattes, sondern auch Radien von mäßigen Größen haben, die Figur bietet also die allgemeinen Relationen. Für ihre genaue Beschreibung sehe man § 58, 11* im Texte. Die Durchführung ist Orthogonalprojektion mit einem Bilde, die Ebene **U** geht durch die Ecke 4 des Tetraeders der vier Ebenen parallel zur Gegenfläche 123, die als Bildebene gewählt ist.

§ 59, S. 360. Die Veränderungen der ersten und dritten Projektion einer Pyramide bei Drehung der Projektionsebenen XOY und YOZ um die Achse OY.

§ 59, - 362. Konstruktion der Ebenen **S**, **S***, welche durch die Gerade g gehen und mit der Geraden l Winkel φ einschließen, für die $\sin\varphi = 0{,}4$ ist, durch Benutzung der Transformation des Projektionssystems. Die Buchstaben der Figur ${}_2E'$ und ${}_2F''$ sind zu vertauschen.

§ 59, S. 363. Die Ableitung der Projektionen eines Prismas aus gegebenen Daten mit Hilfe einer neuen Projektionsebene.
§ 60, - 365 oben. Die Auflösung des achsonometrischen Problems für orthogonale Parallelprojektion durch Transformation.
§ 60, - 366 oben. Die direkte Auflösung des achsonometrischen Problems für orthogonale Parallelprojektion.
§ 60, - 369. Die direkte Lösung des achsonometrischen Problems für die gegebenen Maßstabverhältnisse 10 : 9 : 6 bez. 10 : 6 : 9.
§ 60, - 370. Zur Ableitung des Schlömilchschen Satzes.
§ 60, - 373. Die Umlegung einer achsonometrisch bestimmten Ebene in eine Bildebene.
§ 60 - 374, Dasselbe unter Benutzung der Bildebene durch O.
§ 60, - 376. Die Tangentialebenen einer Kugel durch eine Gerade und die Berührungspunkte aller ihr parallelen Tangentialebenen; achsonometrisch.
§ 61, - 378. Der Zusammenhang zwischen den Bildebenen und dem Normalschnitt des projizierenden Strahls bei der schrägen Achsonometrie.
§ 61, - 379. Die Konstruktion des achsonometrischen Problems für schiefwinklige Parallelprojektion: Bestimmung der projizierenden Strahlen und der Projektionsebenen für gegebene Achsen und Maßstabverhältnisse.

Tafel **II**, rechts oben, Fig. a, b, c. Der Parameterkörper 2*O*3, ein Fall der allgemeinen Grundgestalt des regulären Kristallsystems, in Zentralprojektion, in schräger und in orthogonaler Achsonometrie dargestellt zur Vergleichung der Bilder (§ 61, 3). Die linke Figur der Gruppe oben rechts a) auf der Tafel ist die Zentralprojektion des Körpers von dem durch den Distanzkreis **D** (rechts oben angegeben) vom Zentrum C_1 bestimmten Zentrum aus; die Ebene seiner Hauptachsen x und y ist normal zur Tafel und durch die Spur s und die Fluchtlinie q' (den Horizont) angegeben, O' ist das Bild des Mittelpunktes und x', y', z' sind die Bilder der Hauptachsen des Körpers; der Fluchtpunkt Q'_y und der Teilungspunkt T_x liegen im Blatte. Die Bilder der Endpunkte der von O aus auf die Achsen abgetragenen Längen 1, 2, 3 sind angegeben, soweit sie auf das Blatt fallen. Vom Bilde des Körpers sind die sichtbaren Kanten als stärkere Linien von den verdeckten unterschieden.

Die Figur in der Mitte der Gruppe b) ist ein schräg achsonometrisches Bild desselben Körpers mit den Achsenrichtungen des perspektivischen Bildes und denselben Einheiten in der Achse z sowie mit den Längen der von O nach vorn aufgetragenen Einheiten in den Achsen x und y.

Die Figur c) rechts endlich ist das orthogonal achsonometrische Bild desselben Körpers, welches man erhält, wenn man die Achsenrichtungen der Figuren a) und b) beibehält und der Einheit in der Achse z dieselbe Länge gibt, wie in ihnen. Die Vergleichung der Bilder besteht in der Anschauung der relativen Lage der zwölf vierseitigen, der acht sechsseitigen und der sechs achtseitigen Ecken des Körpers in denselben. In der Mittelfigur sind zwei Flächen des Körpers zufällig nahe genau projizierende Ebenen, rechts findet dasselbe statt für zwei Ebenen, welche zwei Gegenkanten des Achtecks in yz mit zwei bestimmten sechsseitigen Mittelecken verbinden; in der Zentralprojektion kommt dergleichen nicht vor. Die Herstellung beider achsonometrischen Bilder ist gleich einfach; in dem orthogonalen ist die Bequemlichkeit ein wesentlicher Vorzug, mit der man die Lage der Bildebene und die Maßstäbe, also die wahre Größe des dargestellten Objekts erhält.

Schlußübersicht S. 402. Darstellung der elliptischen Involution von gegebenem Anfangselement aus in beiderlei Sinn durch eine Gruppe von gegebenem Doppelverhältnis.

Darstellende Geometrie.

Einleitung.

Zweck und Bedeutung. Der nächste Zweck der darstellenden Geometrie ist die Bestimmung räumlicher Formen nach Lage, Größe und Gestalt durch andere räumliche Formen; zumeist geschieht sie durch die graphische Darstellung in einer Fläche, in manchen Fällen durch das räumliche Abbild oder Modell. Die Untersuchung der gegenseitigen Beziehungen der so bestimmten Raumformen mittelst ihrer Darstellung wird daran angeschlossen.[1])

Beides macht die darstellende Geometrie zu einer wichtigen Hilfswissenschaft des Technikers; sie dient ihm gleichmäßig bei der Nachahmung schon vorhandener Erzeugnisse seines Faches, wie bei der Erfindung neuer. In der Regel ersetzen die nach ihren Methoden hergestellten Zeichnungen die so viel kostbareren Modelle; natürlich liegt in der Einfachheit ihrer Herstellung und Verwendung ihr praktischer Wert. Die erste systematisch-pädagogische Anleitung zur Befriedigung dieser Bedürfnisse durch Zeichnung auf ebener Fläche boten nach Desargues 1636, Gravesand 1711 und Brook Taylor 1715, 1719, endlich J. H. Lambert's Freie Perspektive — Zürich 1759 und G. Monge's Géométrie descriptive — Paris 1795.

In zwei Richtungen erweitert sich diese Bedeutung noch. Zuerst insofern der angestrebte nächste Zweck gefördert wird durch die Bildlichkeit der Darstellung, d. h. durch ihre Ähnlichkeit mit dem Gesichtseindrucke, den das dargestellte Objekt selbst hervorbringen würde; man ist dadurch veranlaßt, diese Bildlichkeit zu gewinnen und sucht sie für die ebenen

Darstellungen noch zu erhöhen durch die Aufnahme der Beleuchtungsverhältnisse in die Darstellung. Damit erweitert sich die darstellende Geometrie nach der praktischen Seite, der Seite der Darstellung, zur wissenschaftlichen Grundlage der Zeichenkunst; sie nimmt für ihre Ausführungen neben der Genauigkeit die Schönheit zum Ziel.

Sodann aber, insofern der bezeichnete Zweck recht verstanden die Darlegung aller Konstruktionen der Raumgeometrie und die Lösung ihrer Aufgaben verlangt, hat die darstellende Geometrie sich als geeignet zur naturgemäßen Entwickelung hiervon zu erweisen; und es ergibt sich, daß sie allerdings vermag, in den Besitz gerade derjenigen Elemente zu setzen, aus denen die Eigenschaften der Figuren gleichzeitig mit der Erzeugung derselben in der einfachsten Weise entspringen — mit anderen Worten, daß sie durch ihr Verfahren den Organismus der Raumformen erkennen läßt. Daher die historische Stellung der darstellenden Geometrie am Anfang der neuesten Entwickelungs-Epoche der Geometrie; nach Lambert und Monge kommen Poncelet (1822), Möbius (1827), Steiner (1832), Chasles (1831, 1837), v. Staudt (1847) in stetiger Folge, indeß vorher Desargues (1636) ganz vereinzelt erscheint. Insofern erweitert sie sich nach der geometrischen oder theoretischen Seite, ihr Studium wird zum ersten Hauptstück der höheren geometrischen Studien; die Erreichung der Konstruktionsziele mit einer Minimalzahl von Konstruktionslinien in allen Fällen und die Begründung strenger Konstruktionen mit Zirkel und Lineal bei allen Aufgaben, die nicht mehr als zwei Lösungen zulassen, sind die wichtigen praktischen Ergebnisse des Beginns dieser Entwickelung. Die Geometrie der Lage ist als diejenige Fortsetzung und Erweiteruug der darstellenden Geometrie anzusehen, bei welcher die systematische wissenschaftliche Entwickelung alleiniger Zweck ist, so daß die Rücksicht auf die Darstellung und selbst auf die unmittelbare Darstellbarkeit wegfällt.

Methode. Zum Zwecke der graphischen Darstellung wird die Raumform auf die Bildebene bezogen und diese durch die Zeichnungsebene repräsentiert — allgemeiner Bildfläche und Zeichnungsfläche. Die Vereinigung der in der Bildebene vorhandenen Bestimmungselemente heißt das

Bild oder die Projektion der Raumform; die Methode der Beziehung, durch welche aus der Raumform oder dem Original das Bild hervorgeht, heißt die Abbildungs- oder Projektionsmethode.

Die nächste und natürlichste Quelle der Abbildungsmethoden — wir wollen deshalb die aus ihr entspringenden die elementaren Abbildungsmethoden nennen — ist das mathematische Abstraktum des Sehprozesses: Von einem Zentrum der Projektion aus gehen nach allen Punkten und geraden Linien des darzustellenden Objekts gerade Linien und Ebenen — wir bezeichnen ihre Gesamtheit als das Bündel der projizierenden Strahlen und Ebenen oder als den Schein des Objekts; ihre Durchschnittspunkte und -linien mit der Bildebene sind die Bilder oder Projektionen dieser Punkte und Geraden.

Von der gegenseitigen Lage im Moment der Abbildung abgesehen, also auch nach ihrer Aufhebung noch, sind daher Original und Bild durch die beiden Gesetze verbunden: Jedem Punkte des Originals entspricht ein Punkt des Bildes und jeder geraden Linie des Originals entspricht eine gerade Linie im Bilde. Ist das Original sowie das Bild eine ebene Figur, so gelten beide Gesetze im allgemeinen auch umgekehrt; man macht sie durch gewisse Voraussetzungen über das Unendlichferne im Raum, welche widerspruchsfrei sind, ohne Ausnahme gültig und sagt: Original und Bild sind projektivisch oder stehen in der Verwandtschaft der Projektivität, spezieller der Kollineation. Die besondere gegenseitige Lage, die beide im Momente der Abbildung haben, kann man immer als die perspektivische Lage derselben bezeichnen.

Die Theorie der ebenen Abbildung nach diesen Grundsätzen nennen wir die Lehre von der Zentralprojektion; sie enthält als einen durch die Forderung auf Bildlichkeit ausgesonderten Teil die Theorie der Perspektive, eine Grundlage der Malerei; als ein Spezialfall geht aus ihr die Lehre von der orthogonalen und schiefen Parallelprojektion hervor, die man für technische Zeichnungen zumeist verwendet.[2])

Der Verfolg zeigt sodann, daß man auch den Raum d. i.

die nicht ebenen Formen nach Anleitung derselben Gesetze der Projektivität von einem Zentrum aus und für dasselbe abbilden, nämlich in solcher Art räumlich abbilden oder modellieren kann, daß jedem Punkte, jeder Geraden und also auch jeder Ebene des Originals bez. ein Punkt, eine Gerade und eine Ebene des Bildes sowie umgekehrt ausnahmslos entspricht. Mit Einschränkungen, welche den beim Übergang von der Zentralprojektion zur Perspektive erforderlichen analog sind, kann man auch dieser Abbildung einen hohen Grad von Bildlichkeit verleihen; daher umfaßt sie die in der Kunst wie die in der Technik verwendeten Modellierungsmethoden. (Vergl. § 37 f.)

Wenn wir aber speziell an die Art anknüpfen, wie bei der Zentralprojektion die Lage des Zentrums gegen die Bildebene durch einen Kreis fixiert wird (Distanzkreis, § 1), dessen Kenntnis für die Bestimmtheit der metrischen Verhältnisse der dargestellten Raumformen unentbehrlich ist, so entspringt eine Abbildung der Punkte des Raumes durch die Kreise der Ebene — vergl. § (7), vermittelst welcher die Aufgaben über die Bestimmung der Kreise und Kugeln etc. der darstellenden Geometrie unterworfen werden. Wie die bildlichen Projektionsmethoden zu den projektivischen Verwandtschaften führen, so gibt diese Abbildung der Zyklographie uns zugleich Kenntnis von der fundamentalen metrischen Verwandtschaft der Inversion oder der reziproken Radienvektoren.[3])

Perspektivische Raumansicht. Wir fassen unter diesem Namen die vorher bezeichneten Voraussetzungen über die unendlich fernen Elemente des Raumes zusammen, durch welche das eindeutige Entsprechen von Punkt zu Punkt und von Gerade zu Gerade zwischen Original und Bild von scheinbaren Ausnahmen befreit wird; denn solche treten nur bei jenen auf. Wenn die Punkte einer Geraden durch gerade Strahlen vom Zentrum der Projektion aus auf die Bildebene projiziert werden, so gibt es unter diesen Strahlen einen, der zu ihr selbst, und einen anderen, der zur Bildebene parallel ist; der erste liefert ein bestimmtes Bild von dem — wir wollen zunächst sagen — uneigentlichen Punkte der Geraden, den der Parallelstrahl projiziert und den manche als gar nicht

existierend, andere als aus einer Vielheit von Punkten bestehend ansehen wollen; der zweite liefert ebenso zu einem bestimmten Original ein uneigentliches Bild. Die Frage gehört zur Theorie des Maßes und des Messens, die mit den uns empirisch geläufigen Voraussetzungen darüber nicht entschieden und noch weniger gegeben ist, und die man zu fassen hat als die projektivische Vergleichung der Figuren mit einer als fest oder absolut gedachten die Maßeinheiten liefernden Figur; ihre Beantwortung fällt daher je nach der Wahl des Absoluten verschieden aus. Über die Zweckmäßigkeit oder den Vorzug der einen oder anderen muß das Ganze der Wissenschaft als entscheidend angesehen werden, und dies hat für denjenigen Teil der Geometrie, zu dem die elementare und die darstellende Geometrie unbedingt gehören, die Entscheidung dahin gegeben, daß es notwendig ist, anzunehmen, jede Gerade habe einen einzigen und bestimmten unendlich fernen Punkt. Wir nennen diesen Punkt in Übereinstimmung mit dem Sprachgebrauch die Richtung der Geraden und haben damit zugleich die Erklärung dieses Begriffes gewonnen.

In unmittelbarer Konsequenz ergibt sich daraus, daß die unendlich entfernten Punkte einer Ebene angesehen werden müssen als eine gerade Reihe bildend, die man die unendlich ferne Gerade derselben oder ihre Stellung nennt; und zuletzt, daß alle die unendlich fernen Punkte des Raumes und alle die unendlich fernen Geraden desselben als einer Ebene, der unendlich fernen Ebene, angehörig anzusehen sind.[4])

Die Sätze: Zwei Gerade in derselben Ebene schneiden sich in einem Punkte; zwei Ebenen schneiden sich in einer geraden Linie — beides auch wenn sie parallel sind; eine Gerade und eine Ebene haben nur einen Punkt gemein, wenn nicht jene ganz in dieser liegt — erhalten damit zugleich ausnahmsfreie Gültigkeit. Ebenso die Bestimmungssätze der Geraden aus zwei Punkten oder Ebenen, der Ebene aus drei Punkten und des Punktes aus drei Ebenen; ein unendlich ferner Punkt ist durch eine Gerade bestimmt, in der er liegt, eine unendlich ferne Gerade durch eine Ebene, der sie angehört, und man konstruiert bekanntlich mit solchen Elementen mit

der gleichen oder selbst mit größerer Leichtigkeit, wie mit denen des endlichen Raumes.

Entwicklungsgang. Unsere Entwicklung gilt hauptsächlich den bildlichen unter den elementaren Projektionsmethoden und hat daher mit der Darstellung und Bestimmung der projizierenden Strahlen zu beginnen, als durch welche alles andere dargestellt und bestimmt werden muß; sie hat sodann die Bestimmung der das Zentrum nicht enthaltenden Geraden und Ebenen zu zeigen und ihre Verwendung auf allen Stufen durchzuführen. Die Objekte der Darstellung sind die geometrischen Gebilde, welche durch Reihung oder durch Bewegung aus den geometrischen Elementarformen: Gerade Linie, Punkt und Ebene erzeugt werden. Die Berücksichtigung des raumerfüllenden Inhaltes bleibt den Anwendungen überlassen — dem Architektur- und Maschinenzeichnen, dem topographischen Zeichnen, etc. Für die Darstellung der Beleuchtungsverhältnisse und sonst zur Erhöhung der Bildlichkeit der Zeichnungen wird den geometrischen Flächen die Eigenschaft der Undurchsichtigkeit beigelegt.

Wir entwickeln zuerst — in diesem Bande — an der Behandlung der geometrischen Elementarformen und der einfachsten aus den Elementen der Geometrie bekannten Gebilde die Methoden der darstellenden Geometrie, bei welchen die Bestimmung der geraden Linie fundamental ist, also die Zentralprojektion und die verschiedenen Formen der Parallelprojektion, sowie die damit verbundenen Elemente der projektivischen Geometrie. Dabei entspringen für diese zwei Arten der Ableitung, die einander ergänzen; die eine, welche die Projektionsmethode mit den Elementen der Geometrie und Trigonometrie verbindet und durch den rasch hervortretenden Reichtum an vielseitig brauchbaren neuen Resultaten befriedigt; die andere, die ohne solche Benutzung der Elementargeometrie aus jenem methodischen Fundament direkt zu denselben grundlegenden Konstruktionen führt und dadurch die projektivische Geometrie als mit der Euklidischen harmonierend und überhaupt als ein Bestandstück jeder Geometrie erweist.

Wir schließen daran — im zweiten Bande — ihre Anwendung auf das Studium und die Darstellung der zu-

sammengesetzten Formen an, insbesondere der Curven und der Flächen. Dadurch ermöglichen wir bei diesen die Verwendung aller Methoden und die Wahl der für die spezielle Absicht zweckgemäßesten unter ihnen, und sichern so ein tieferes und rascheres Eindringen in die notwendigen Theorien und die möglichste Kürze und Genauigkeit bei den praktischen Anwendungen. Auf die Konsequenzen des Gedankens von der Abbildung der Punkte des Raumes durch die Kreise einer Ebene werden wir an den geeigneten Orten in beiden Bänden kurz eingehen; ihre Verwendung zur Lösung von Problemen bietet vortreffliche Übungen im Gebrauch der elementaren projektivischen Methoden. So tritt sie hier zuerst in § (7) hervor — wie auch weiterhin immer unter Bezeichnung mit der eingeklammerten letzten Paragraphennummer der Hauptentwicklung; später in der Gruppe der §§ (36) bis (36e) mit der Theorie der Kegelschnitte aus Kreissystemen, die zur Lehre von den reziproken Radien und zur stereographischen Projektion führen. Weiteres folgt im zweiten Bande.

Die vollständige Entwicklung der Geometrie der Lage in konstruierender und in analytischer Form, in beiden Gestalten beherrscht durch die sozusagen raumbildende Kraft des Projektionsprozesses, enthält der dritte Band.[5])

Erster Teil.

Die Methodenlehre, entwickelt an der Untersuchung der geometrischen Elemente und ihrer einfachen Verbindungen.

A. Die Zentralprojektion als Darstellungsmethode und nach ihren allgemeinen Gesetzen.

1. Das Zentrum C der Projektion, der Scheitel oder Träger des Strahlenbündels der projizierenden Geraden, wird auf die Bildebene, die zugleich Zeichnungsebene oder Tafel sein mag, durch die Normale von ihm auf sie bezogen; ihr Fußpunkt C_1 heißt der Hauptpunkt, ihre Länge CC_1 die Distanz d und der mit dieser aus dem Hauptpunkte in der Bildebene beschriebene Kreis **D** der Distanzkreis. (Fig. S. 9.)

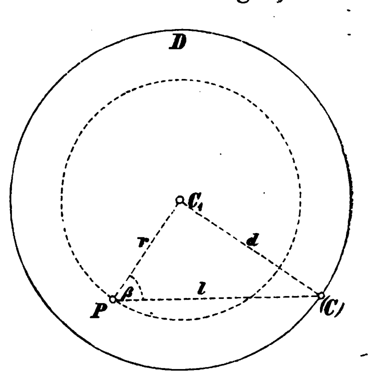
Dies vorausgesetzt bestimmt jeder Punkt P der Bildebene den projizierenden Strahl CP, der nach ihm geht (seinen Schein); alle die unendlich vielen Punkte, die in diesem Strahle liegen, werden in jenem Punkte der Bildebene abgebildet, also daß kein einzelner unter ihnen bestimmt wird. Hiervon machen nur zwei Punkte des projizierenden Strahles Ausnahme, nämlich der Durchstoßpunkt P des Strahles mit der Bildebene, welcher mit seinem Bilde P' zusammenfällt, und die Richtung des Strahles oder sein unendlich ferner Punkt Q, der Punkt, den er mit allen zu ihm parallelen Geraden gemein hat.

Betrachten wir an einem projizierenden Strahle seine Länge CP oder l vom Zentrum bis zur Tafel und seine Tafelneigung oder den Neigungswinkel $\beta = \angle CPC_1$, den er mit der Tafelebene bildet, so sind beide in dem bei C_1 rechtwinkligen Dreieck CC_1P enthalten, welches die Distanz CC_1

und dei Linie $C_1 P$ vom Hauptpunkte nach dem Punkte P der Bildebene zu Katheten hat. Es ist also für $C_1 P = r$ und $CP = l$

$$r \tan\beta = d, \quad l \sin\beta = d, \quad l \cos\beta = r.$$

Alle projizierenden Strahlen, deren Durchstoßpunkte für einerlei Hauptpunkt und Distanz in einem Kreise liegen, welcher den Hauptpunkt zum Mittelpunkt hat, haben gleiche Tafelneigung β und gleiche Länge l, und umgekehrt. Wir nennen daher solche Kreise **Neigungskreise** und haben



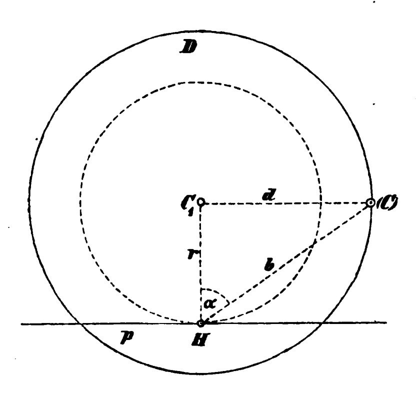
$$\beta \gtreqless 45^0, \text{ je nachdem } r \lesseqgtr d$$

ist; insbesondere $\beta = 90^0$ für $r = 0$ und $\beta = 0$ für $r = \infty$. Der Distanzkreis ist also der Neigungskreis für 45^0, der Hauptpunkt der für 90^0, und die unendlich ferne Linie der Bildebene oder ihre Stellung entspricht der Neigung 0.

B. Man bestimme r aus β und dem Distanzkreis **D**; oder l aus **D** und r; oder β und d aus C_1, l und r.

2. Jede Gerade p der Bildebene bestimmt alle die projizierenden Strahlen, die vom Zentrum nach ihren Punkten gehen — wir sagen das **Büschel der projizierenden Strahlen**, indem wir ganz allgemein den Inbegriff aller Geraden durch einen Punkt in einer Ebene als ein **Strahlenbüschel** bezeichnen — und damit die **projizierende Ebene**, die vom Zentrum nach ihr gelegt wird. Auf dieser projizierenden Ebene lassen sich unendlich viele das Zentrum nicht enthaltende Gerade g ziehen, deren Bilder g' alle mit p zusammenfallen, von denen die Gerade p also im allgemeinen **keine** bestimmt. Ausgenommen hiervon sind nur die **Spur** der projizierenden Ebene in der Tafel, d. i. p selbst, welche mit ihrem Bilde p' zusammenfällt, und die **unendlich ferne Gerade** q der projizierenden Ebene, oder die **Stellung** derselben, ihre Schnittlinie mit allen zu ihr parallelen Ebenen, die Linie der Richtungen aller in ihr und auch aller in diesen enthaltenen Geraden.

An einer projizierenden Ebene betrachten wir ihre Breite b zwischen ihrer Spur und der durch das Zentrum gehenden Parallelen zu derselben, d. i. den normalen Abstand ihrer Schnittlinie mit der Bildebene und der Parallelen zu ihr durch das Zentrum, und sodann ihre Tafelneigung, d. i. den spitzen Neigungswinkel α, den sie mit der Bildebene macht. Fällen wir vom Hauptpunkte C_1 die Normale auf p, die sie in H treffe, so ist im rechtwinkligen Dreieck CC_1H



$$\angle CHC_1 = \alpha$$

und $CH = b$; für $C_1H = r$ ist also

$$r = b \cos \alpha, \quad r \tan \alpha = d,$$
$$b \sin \alpha = d.$$

Alle projizierenden Ebenen, deren Spuren für einerlei Hauptpunkt und Distanz einen Kreis berühren, welcher den Hauptpunkt zum Mittelpunkt hat, haben gleiche Neigung α und gleiche Breite b, und umgekehrt. Solche Kreise sind gleichzeitig Neigungskreise für die projizierenden Linien nach ihren Punkten und für die projizierenden Ebenen nach ihren Tangenten und zwar für einerlei Winkel, wenn Punkt und Tangente zusammengehören. Die Spuren der zur Bildebene normalen projizierenden Ebenen gehen durch den Hauptpunkt; die der unter 45° geneigten berühren den Distanzkreis. Die zur Tafel parallele projizierende Ebene, deren Spur die unendlich ferne Gerade der Bildebene ist, sodaß die Bilder aller in ihr gelegenen Punkte und Linien unendlich fern sind, soll nach diesem Verschwinden im Unendlichen die Verschwindungsebene oder die vordere (erste) Parallelebene heißen.

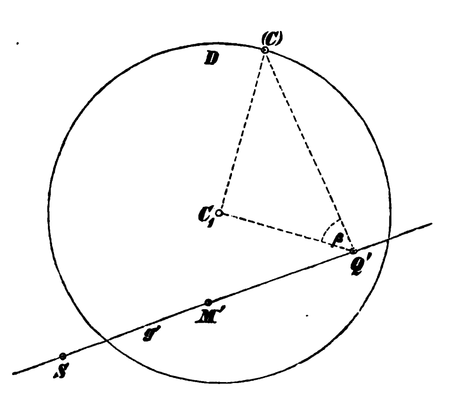
Polygone oder Curven in der Bildebene bestimmen projizierende Pyramiden oder Kegel als die Vereinigungen der entsprechenden projizierenden Geraden ihrer Punkte und projizierenden Ebenen ihrer Geraden bez. Tangenten.

B. 1) Man konstruiere b und r aus **D** und α.

2) In der projizierenden Ebene Cp bestimme man die projizierenden Geraden von der Länge l oder der Neigung β.

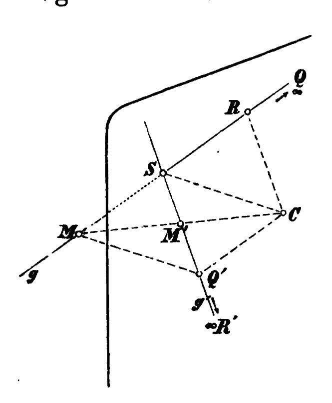
3) Durch die projizierende Gerade CP lege man die projizierenden Ebenen von der Neigung $\alpha \geqq \beta$; oder von der Breite $b \leqq l$.

3. Wir wenden uns zur Bestimmung von geraden Linien und Ebenen, die nicht durch das Zentrum gehen. Jede Gerade g, die das Zentrum C nicht enthält, bestimmt mit diesem eine projizierende Ebene als den Inbegriff der projizierenden Strahlen ihrer Punkte oder den Ort des ihr entsprechenden projizierenden Strahlenbüschels (Schein der Geraden); die Spur dieser projizierenden Ebene in der Tafel ist der Ort der Bilder ihrer Punkte, also das Bild g' der Geraden). Unter allen geraden Linien in dieser projizierenden Ebene ist g ausgezeichnet durch ihren Schnitt- oder Durchstoß-Punkt S mit der Tafel — diesen teilt sie mit allen andern Strahlen eines durch S gehenden Strahlenbüschels in der Ebene Cg — und durch ihre Richtung oder ihren unendlich fernen Punkt Q — ihn hat sie gemein mit allen Strahlen des Büschels der Parallelen zu g in derselben Ebene. Durch beide Bestimmungen ist die Gerade g als



Verbindungslinie von zwei Punkten oder als der gemeinsame Strahl von zwei Strahlenbüscheln bestimmt, und nach § 2 sind die Punkte S und Q ihrerseits durch ihre projizierenden Strahlen allein völlig bestimmt; d. h. die gerade Linie g wird bestimmt durch den Durchstoßpunkt S, den sie mit der Bildebene erzeugt, und durch den Durchstoßpunkt des zu ihr parallelen projizierenden Strahls, d. i. das Bild Q' ihres unendlich fernen Punktes Q oder ihrer Richtung. Der letztgenannte Punkt soll der Fluchtpunkt der Geraden heißen. Die gerade Verbindungslinie ihres Durchstoßpunktes S mit ihrem Fluchtpunkte Q' ist das Bild g' der Geraden g. Die Gerade selbst bestimmt sich aus S, Q' und C oder D als die Parallele zu CQ', welche durch S geht. (Figur hier oben und Seite 12.)

Die Gerade hat daher dieselbe Tafelneigung β, wie der projizierende Strahl ihrer Richtung Q; wenn wir den Durchschnittspunkt der Verschwindungsebene mit ihr oder ihren Verschwindungspunkt durch R bezeichnen, dessen Bild R' (Fig. 4) die Richtung von g' ist, so ist $SR \# Q'C$, d. h. die Strecke l der Geraden g zwischen Bildebene und Verschwindungsebene ist gleich der Strecke des zu ihr parallelen projizierenden Strahls von der Bildebene bis zum Zentrum; und ebenso $RC \# SQ'$, d. h. die Bildlänge n der Geraden zwischen Durchstoßpunkt und Fluchtpunkt ist gleich dem Abstand des Zentrums von ihrem Verschwindungspunkte. Macht man in der Geraden g die Strecke SM gleich und entgegengesetzt SR, so ist $MS \# Q'C$, d. h. auch $SC \# MQ'$ oder M liegt auf der Geraden g ebensoweit hinter der Bildebene wie R oder C vor derselben, und das Bild M' dieses Punktes ist die Mitte der Strecke zwischen S und Q' oder die Bildmitte; denn die Diagonalen eines Parallelogramms halbieren einander. Die Punkte M auf allen denkbaren Geraden erfüllen die zweite oder, weil wir die Seite der Bildebene die vordere nennen, wo das Zentrum liegt, die hintere Parallelebene, eine zur Bildebene parallele Ebene in der Entfernung d von ihr auf der dem Zentrum entgegengesetzten Seite.



Denkt man wie von C das Perpendikel CC_1, so auch von den Punkten M und R der Geraden SQ' die Perpendikel auf die Tafel gefällt mit den bezüglichen Fußpunkten M_1 und R_1, so hat man wegen

$$CC_1 \# RR_1 \# M_1M$$

$SR_1 \# Q'C_1$ und $M_1M' = M'C_1$, also auch $SR_1 = M_1S$; d. h. die Fußpunkte der Normalen zur Tafel aus den Schnittpunkten einer Geraden SQ' mit den Parallelebenen liegen in einer Parallelen durch S zu $Q'C_1$ und um $Q'C_1$ von S entfernt, R_1 zugleich in demselben Sinne.

B. 1) Parallele Gerade haben denselben Fluchtpunkt für das nämliche **D**; alle Normalen zur Tafel haben ihren Fluchtpunkt im Hauptpunkt C_1.

2) Demselben Fluchtpunkt und Durchstoßpunkt entsprechen bei Unbestimmtheit des Zentrums alle Strahlen eines Bündels; bei welcher Bewegung desselben nur die eines Strahlenbüschels?

3) Alle Geraden von derselben Länge l zwischen Bild- und Verschwindungsebene haben für dasselbe **D** gleiche Tafelneigung β und ihre Fluchtpunkte liegen also in einem Neigungskreis.

4) Bei gegebenem **D** bestimme man l und β aus S und Q'.

5) Bei gegebenem **D** bestimme man aus g', S in demselben und β den Fluchtpunkt Q', die Länge l und die Gerade.

6) Bei gegebenem **D** konstruiere aus g' und l den Fluchtpunkt Q' und β und aus n die Spur S und die Geraden. (Vier Lösungen.)

7) Man bestimme bei gegebenem **D** unter den projizierenden Linien der Punkte von g oder SQ' diejenige von der größten Tafelneigung und die beiden, welche eine gegebene Tafelneigung β haben.

8) Alle Geraden, für welche bei gegebenem **D** die Strecke SQ' gleiche Länge n hat, schneiden die Verschwindungsebene in Punkten R auf einem aus C mit n als Halbmesser beschriebenen Kreise.

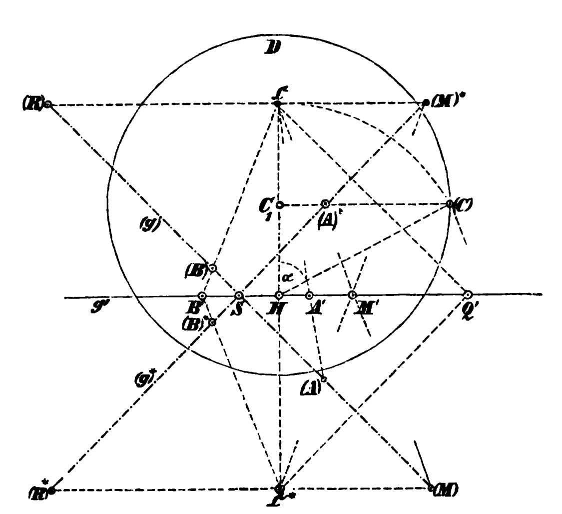
9) Man charakterisiere nach ihrer Lage alle Geraden von gegebenem Schnittpunkt M mit der zweiten Parallelebene und gegebener Bildlänge SQ' bei gegebenem **D** und konstruiere ihre Bilder. Sie sind die Mantellinien eines Kegels aus M nach den Punkten eines Kreises vom Mittelpunkt C in der Verschwindungsebene, der die Bildlänge zum Radius hat.

10) Bei gegebenem **D** konstruiere man alle Geraden von gegebenem S für gegebenes l; und unter ihnen die für gegebenes n.

4. Der Schein der unbegrenzten das Zentrum nicht enthaltenden Geraden bildet die ganze projizierende Ebene. Bei einer vollen Umdrehung des projizierenden Strahles in der projizierenden Ebene Cg werden alle Punkte von g projizirt und umgekehrt zu allen Punkten des Bildes g' die entsprechenden Punkte des Originals g bestimmt. Wir lassen ihn von S über M nach Q und in demselben Drehungssinne weiter gehen und bemerken die vier Hauptlagen CS, CM, CQ, CR. Dann entsprechen den in demselben Sinne auf einander folgenden Strecken des Originals $g: SM$, MQ oder $M\infty$, QR oder ∞R, RS Punkt für Punkt die Strecken $S'M'$ oder SM', $M'Q'$, $Q'R'$ oder $Q'\infty'$ und $\infty' S$ des Bildes g'. Jenen Strecken des Originals, welche durch die Bildebene, die zweite Parallelebene, das Unendliche, das ist die unendlich ferne Ebene, und die Verschwindungsebene von einander getrennt werden, entsprechen

die Strecken des Bildes, welche der Durchstoßpunkt, die Bildmitte, der Fluchtpunkt und der unendlich ferne Punkt desselben von einander scheiden. Ein Punkt des Originals und der entsprechende Punkt des Bildes liegen in entsprechenden Strecken; aus der Lage des einen kann auf die des andern in der entsprechenden Strecke geschlossen werden.

Eine endliche Originalstrecke AB, welche das zu ihrer Geraden gehörige R enthält, erscheint im Bilde als den unendlich fernen Punkt R enthaltende Strecke, welche A' und B' begrenzen, oder eine endliche Strecke $A'B'$ ist nur dann das Bild einer endlichen Originalstrecke, wenn der Fluchtpunkt Q' ihrer Ge-Geraden nicht in ihr liegt.



Man erlangt die wirkliche Bestimmung dieser Abhängigkeit durch die Umlegung der Geraden g mit ihrer projizierenden Ebene Cg in die Bildebene. Sind der Distanzkreis D und die Gerade g durch S und Q' also g' (vorige Figur) gegeben, so bestimmt man zuerst die Lage 𝔈 oder 𝔈* des mit der projizierenden Ebene Cg in die Bildebene umgelegten Zentrums C, indem man auf das Perpendikel $C_1 H$, welches vom Hauptpunkt auf die Gerade g' gefällt ist, von H aus die Breite b der projizierenden Ebene Cg d. i. die Hypotenuse des aus $C_1 H$ und d als Katheten gebildeten rechtwinkligen Dreiecks abträgt (§ 3.). Die Umlegungen 𝔈 und 𝔈* entsprechen den Drehungen der projizierenden Ebene um die Winkel α und $(180^0 - \alpha)$ bez. Dann ist 𝔈 Q' bez. 𝔈* Q' der zur Geraden g parallele projizierende Strahl in der Umlegung — zugleich die Länge l der Geraden g — und diese selbst, (g) resp. $(g)^*$, geht durch S parallel 𝔈 Q' resp. 𝔈* Q'. Die von 𝔈 und 𝔈*

nach der Bildmitte M' und parallel zu g' gehenden Strahlen bestimmen die Punkte (M) oder $(M)^*$ und (R) oder $(R)^*$ in der Umlegung (g) resp. $(g)^*$.

Die wahre Länge der in $A'B'$ projizierten Strecke und die Projektionen der in $(A),(B)$ gelegenen Punkte ergeben sich daraus.

So wie vorher das Bild und das Original der Geraden in perspektivischer Lage für das Zentrum C waren, so wird es nun Bild und Umlegung der Geraden für die Umlegung des Zentrums $\mathfrak{C}$, resp. $\mathfrak{C}^*$.

Wenn man $Q'\mathfrak{C}$ um Q' und $S(R)$ um S um gleiche Winkel und bei unveränderter Länge dreht, so bleibt die perspektivische Beziehung von $A'B'$ zu AB ungeändert. $\mathfrak{C}Q'$, $S(R)$ sind dabei immer (siehe § 5.) Fluchtlinie und Spur einer durch SQ' gelegten Ebene; für jede solche Ebene können also $Q'\mathfrak{C}$ und $S(R)$ in die Fluchtlinie resp. Spur übergeführt werden. Man sagt, die Teilungspunkte $\mathfrak{C}$ einer Geraden SQ' liegen in der Peripherie eines um Q' mit dem Radius l beschriebenen Kreises. (Vergl. § 7.)

B. 1) Bei gegebenen **D**, S und Q' bestimme man die Projektionen der Endpunkte der von S aus in g abgetragenen $k$fachen Distanz.

2) Aus denselben Daten bestimme man die wahre Länge der in $A'B'$ projizierten Strecke von g; teile die Strecke $A'B'$ in k gleiche Teile und projiziere ebenso eine der $k$fachen Distanz gleiche Strecke in der Geraden g, welche den Verschwindungspunkt R zum Mittelpunkt hat.

3) Man löse Aufgabe 6. in § 3. durch Umlegung der projizierenden Ebene Cg' und erläutere die gegenseitige Lage der vier entsprechenden Geraden.

4) Man bestimme den normalen Abstand der Geraden SQ' vom Zentrum bei gegebenem **D**.

5) Man soll eine durch ihr Bild $A'B'$ gegebene Strecke in der Geraden SQ' wiederholt abtragen und die Endpunkte projizieren.

Weil Parallelen zwischen Parallelen gleich sind, so ziehe man durch Q' eine zweite Gerade und durch A' und B' eine dritte und vierte mit dem gemeinsamen Fluchtpunkte Q'_1, so daß diese in jener die Schnittpunkte A_1' und B_1' bestimmen mit $A_1B_1 \# AB$; zieht man nun $A_1'B'$ und durch seinen Fluchtpunkt d. h. seinen Schnitt mit $Q'Q_1'$ nach B_1', so erhält man in SQ' den Punkt C', sodaß $AB = BC$ ist; ebenso aus $B'C'$ den Punkt D', für den $CD = BC = AB$, etc. Zieht man dagegen durch den Fluchtpunkt von $A'B_1'$ nach A_1', so erhält man in SQ' den Punkt $B^{*\prime}$ mit der Relation $AB^* = BA$, etc.

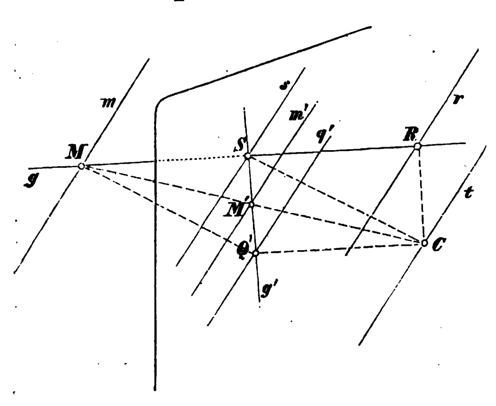
6) Hat man auf einer zu SQ' parallelen Geraden die Auftragung z. B. $A_1 B_1 = B_1 C_1 = C_1 D_1$ in A_1', B_1', C_1', D_1' projiziert, so erhält man die Dreiteilung etc. der Strecke $A'D'$ von SQ', indem man den Schnitt von $A'A_1'$ und $D'D_1'$ als Fluchtpunkt von Parallelen durch B_1', C_1' benutzt; dieselben schneiden SQ' in $B'C'$, so daß $AB = BC = CD$ ist; etc.

Wenn die Halbierung der Strecke AC von SQ' in B gefordert ist, so bestimmt man B' nach dem Satze, daß die Diagonalen eines Parallelogramms einander halbieren, indem man durch A' und C' die Geraden nach zwei Fluchtpunkten Q_1', Q_2' in einer durch Q' gehenden geraden Linie zieht und ihre neuen Schnittpunkte A_1' und C_1' miteinander verbindet; die Verbindungslinie schneidet $A'C'$ in B'. (Vergl. § 16, 3, 13.)

7) Man konstruiere das Bild vom Schwerpunkt eines Dreiecks $A'B'C'$ aus der Fluchtlinie seiner Ebene.

Man beachte, daß in 5) f. die Durchstoßpunkte der Geraden nicht gebraucht werden; so lange nicht die wahre Größe der betrachteten oder erhaltenen Teile in Betracht kommt, ist auch die Lage des Zentrums d. h. der Distanzkreis ohne Einfluß.

5. Eine das Zentrum C nicht enthaltende Ebene **E** enthält unendlich viele Gerade g_i, von denen keine durch das Zentrum geht; die Durchstoßpunkte S_i derselben liegen notwendig in der Schnittlinie der Ebene mit der Bildebene oder in ihrer Spur s; die Fluchtpunkte Q_i' derselben liegen in der Schnittlinie der zur Ebene **E** parallelen projizierenden Ebene qC mit der Bildebene, die also zur Spur s parallel geht und die wir die Fluchtlinie q' der Ebene **E** nennen wollen. Eine Ebene wird durch ihre Spur s und ihre Fluchtlinie q' bestimmt (§ 3.). Man erhält sie aus diesen, indem man durch die Spur s die Parallelebene zur projizierenden Ebene Cq' der Fluchtlinie legt. Darnach hat die Ebene **E** dieselbe Tafelneigung α und dieselbe Breite zwischen Bildebene und Verschwindungsebene wie diese Ebene Cq'. (Obige Figur.)



Die Punkte R_i aller in der Ebene gelegenen Geraden g_i

liegen in der zur Spur s parallelen Geraden r, in welcher die Ebene die Verschwindungsebene schneidet, oder in ihrer Verschwindungslinie; der Abstand derselben vom Zentrum C oder von der zu ihr und zu s parallelen Geraden t durch dasselbe ist ebenso groß als die Breite des Parallelstreifens zwischen Spur und Fluchtlinie oder ist die Bildbreite der Ebene (§ 7.). Ebenso ist die Breite zwischen s und r gleich der Breite zwischen q' und t oder C. Die zweite Parallelebene schneidet die Ebene **E** in einer zur Spur parallelen Geraden m, welche die Punkte M aller Geraden der Ebene enthält; r und m sind zwei zu s parallele und davon gleich entfernte Gerade.

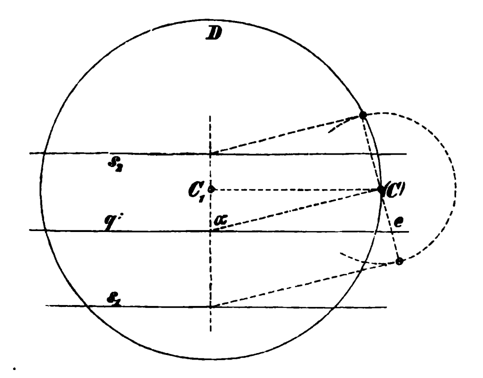
B. 1) Ebenen von derselben Stellung haben bei gegebenem **D** dieselbe Fluchtlinie; sie begrenzen eine Schicht, die das Zentrum enthält, wenn ihre Fluchtlinie zwischen ihren Spuren liegt; etc.

2) Ebenen von gleicher Breite zwischen Bild- und Verschwindungsebene haben bei gegebenem **D** dieselbe Tafelneigung α und ihre Fluchtlinien berühren somit denselben Neigungskreis.

3) Die Geraden r in der Verschwindungsebene für alle die Ebenen, welche bei gegebenem **D** dieselbe Breite des Parallelstreifens sq' besitzen, berühren einen aus C mit dieser Länge als Radius beschriebenen Kreis.

4) Ebenen von parallelen Spuren und gleicher Breite zwischen s und q' haben für gegebenes **D** dasselbe r, wenn für beide s und q' in gleichem Sinne einander folgen. Wie liegen ihre r bei entgegengesetztem Sinn dieser Folge?

5) Wodurch sind Ebenen charakterisiert, die dasselbe m haben? Wenn insbesondere die Spur der ersten die Fluchtlinie der zweiten ist, so ist auch die Spur der zweiten die Fluchtlinie der ersten.



6) Wie insbesondere die beiden mit einerlei m und gleicher Tafelneigung α?

7) Ist eine Ebene durch Spur und Tafelneigung oder Spur und Bildbreite sq' bei gegebenem **D** unzweideutig bestimmt?

8) Der normale Abstand der Ebene vom Zentrum ist die dem Winkel α derselben gegenüberliegende Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck, welches die Breite ihres Bildes zur Hypothenuse hat.

9) Wie bestimmt man eine Ebene durch ihre Fluchtlinie q' und ihren Abstand e vom Zentrum und wie aus der Spur s und demselben Abstand bei gegegebenem **D**? Man erkläre die Figur S. 17, welche die erste Aufgabe löst.

10) Derselben Fluchtlinie und Spur entsprechen bei Unbestimmtheit des Zentrums alle Ebenen eines Büschels.

6. Der Schein der unbegrenzten das Zentrum nicht enthaltenden Ebene bildet den ganzen Raum (vergl. § 4.) und das Bild der unbegrenzten Ebene **E** bedeckt die ganze Bildebene; jede Gerade g' in dieser bildet eine Gerade g der Ebene **E** ab, deren Durchstoßpunkt S in der Spur s und deren Fluchtpunkt Q' in der Fluchtlinie q' der Ebene liegt. Jeder Punkt A' der Bildebene ist Bild eines Punktes A der Ebene **E**, der der Schnitt des projizierenden Strahles CA' mit dieser Ebene ist und der in allen den Geraden der Ebene gelegen ist, deren Bilder sein Bild A' enthalten; alle diese Geraden bilden ein Strahlenbüschel vom Scheitel A und der Ebene **E**, ihre projizierenden Ebenen bilden ein Ebenenbüschel von der Scheitelkante CA und ihre Bilder d. i. die Spuren der Ebenen dieses letztgenannten Büschels in der Bildebene ein Strahlenbüschel vom Scheitel A'.

Durch die geraden Linien r, s, m (Figur S. 16) und die unendlich ferne Gerade q der Ebene **E** wird dieselbe in vier Regionen geteilt, rs, sm, mq oder $m\infty$ und qr oder ∞r, wie sie im Sinne von der Verschwindungsebene nach der Bildebene einander folgen; denselben entsprechen die Regionen der Bildebene, welche die Linien r' oder ∞', s, m' und q' begrenzen, also $\infty' s$, sm', $m'q'$ und $q'\infty'$. Dieses erlaubt, die Schlüsse des § 5 von einer in der Ebene gelegenen Geraden g auf diese Ebene selbst zu übertragen, weil jede zur Tafel parallele Gerade in der Ebene ein zu s und q' paralleles Bild hat. Die direkte und vollständige Bestimmung dieser Abhängigkeit liefert die Umlegung der Ebene in die Tafel (§ 11.).

B. 1) Man verzeichne die Strahlen eines Büschels in der Ebene sq', dessen Scheitel zwischen s und r liegt.

2) Gerade Linien in einer Ebene, deren Bilder einander parallel sind, bilden ein Strahlenbüschel, dessen Scheitel ein Punkt R der Geraden r ist. Nach § 3 bestimmt man R_1 und die β und l dieser Geraden. Die durch R zu s gezogene Parallele r_1 enthält die R_1 aller in der Ebene gelegenen Geraden.

3) Man ziehe auf der Ebene sq' bei gegebenem **D** durch den Punkt vom Bilde A' die Geraden von der Tafelneigung β und durch den Punkt vom Bilde B' in derselben Ebene die zu ihnen parallelen. Ihre Fluchtpunkte liegen in den Durchschnittspunkten von q' mit dem Neigungskreis für β.

4) Man lege bei gegebenem **D** durch eine bestimmte Gerade SQ' die Ebenen von vorgeschriebener Tafelneigung α, insbesondere die Ebene von der kleinsten Tafelneigung. Die Fluchtlinien der Ersten sind die Tangenten aus Q' an den Neigungskreis für α. Für die Letzte geht der Neigungskreis durch Q'.

5) Für Gerade, welche sich schneiden, d. i. in derselben Ebene liegen, ist die Verbindungslinie ihrer Durchstoßpunkte $S_1 S_2$ zu derjenigen ihrer Fluchtpunkte $Q_1' Q_2'$ parallel.

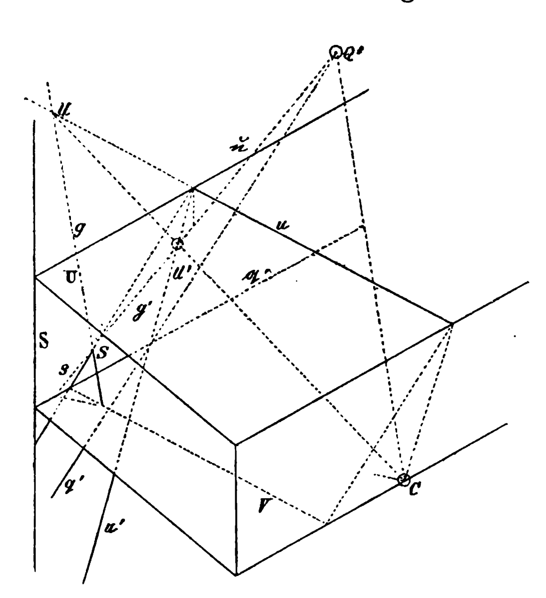
6) Durch Punkte $A_1, A_2, \ldots$, welche auf Geraden $S_1 Q_1'$, $S_2 Q_2', \ldots$ resp. liegen und durch ihre Bilder $A_1', A_2', \ldots$ in ihnen bestimmt sind, lege man die parallelen Geraden vom Fluchtpunkt Q' oder insbesondere die Normalen zur Tafel.

6*. Das Vorhergehende zeigt, daß für jedes im Endlichen und außerhalb der Bildebene gelegene Zentrum C die Bestimmung der Raumelemente g und **E** mittelst ihrer Spur- und Fluchtelemente, d. h. ihrer Schnittpunkte und Schnittlinien mit zwei festen Ebenen, der Bildebene **S** und der unendlich fernen Ebene **Q** erfolgen kann. Offenbar kann jede andere feste gegebene Ebene **U** an Stelle der unendlich fernen **Q** neben der Bildebene **S** zur Bestimmung ebenso dienen, sofern sie nicht durch das Zentrum C geht; so daß sie durch zwei parallele Gerade, ihre Spur $\mathfrak{u}$ und ihre Fluchtlinie $\mathfrak{q}'$, bestimmt ist, wenn wir den Distanzkreis **D** als gegeben voraussetzen. Jede gerade Linie g und jede Ebene **E** hat dann mit **S** einen Durchstoßpunkt S bez. eine Spur s gemein (Figur S. 20), die mit ihren bez. Bildern S' und s' zusammenfallen, und sie schneiden die Ebene **U** in einem Punkte U bez. einer Geraden u, welche durch ihre Bilder U' bez. u' allein vollständig bestimmt sind; die Punkte S und U' bestimmen die Gerade g, und die Geraden s und u', die sich in einem Punkt von $\mathfrak{u}$ begegnen müssen (dem Schnittpunkt der Ebene **E**, **S** und **U**), die Ebene **E**. Offenbar ist die zu s durch den Schnitt von u' mit $\mathfrak{q}'$ gezogene Parallele die Fluchtlinie q' der Ebene **E**, und insofern **E** durch g, also s durch S und u' durch U' geht, ist auch der Schnittpunkt von q' mit SU' oder g' der Fluchtpunkt Q' von g. Für Gerade und Ebenen, welche zu **U** parallel sind, fällt U' bez.

u' in q' und ist vom Fluchtpunkt bez. der Fluchtlinie im früheren Sinne nicht verschieden.

Läge jedoch *C* in **U** oder fiele u mit q' zusammen, so würde der Punkt *U'* den Punkt *U* nicht mehr bestimmen, da alle Punkte der Geraden *CU'* dasselbe *U'* hätten; und ebenso fielen die Bilder der Geraden *u* für alle möglichen Ebenen **E** in die eine Gerade uq' hinein, d. h. die Bestimmung oder Unterscheidung der Geraden und Ebenen mittelst ihrer Elemente *U* resp. *u* besteht nicht mehr.

Das Gleiche tritt bei der gewöhnlichen Zentralprojektion für ein unendlich fernes Zentrum *C* ein, da dann dieses in der zweiten festen Ebene **Q** als der Ebene aller unendlich entfernten Punkte liegt; die Unterscheidbarkeit der Geraden von einerlei Bild *g'* und demselben Durchstoßpunkt *S* mittelst ihrer Fluchtelemente *Q'* ist hinfällig, weil die *Q'* für alle im unendlich fernen Punkt von *g'* vereinigt sind; etc. Wenn aber die Ebenen **S** und **U** im endlichen Raume liegen, so bestimmen wir durch die Zentralprojektion aus einem unendlich fernen Zentrum oder durch eine Parallelprojektion die Geraden aus *S* und *U'* und die Ebenen aus in u sich schneidenden *s* und *u'*; jedoch kann das Zentrum *C* nicht mehr durch den Distanzkreis **D** und **U** nicht mehr durch seine Fluchtlinie q' bestimmt werden, sondern man wird etwa **U** durch u und seinen Neigungswinkel ω zur Tafel an bestimmter Seite derselben und die Lage des Zentrums durch einen projizierenden Strahl vom Durchstoßpunkt *S* und dem Fußpunkt *U''* der Tafelnormale

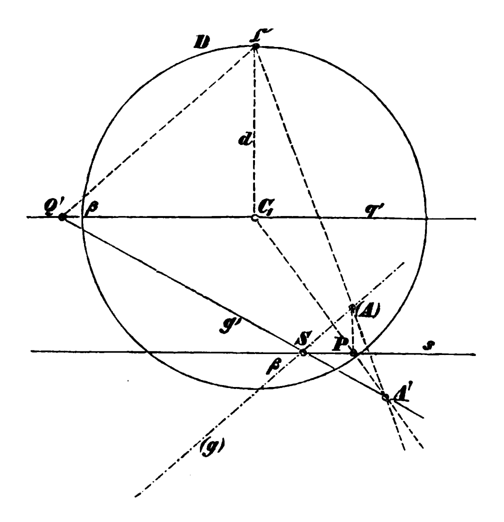


aus seinem Punkte in 𝔘 (U' liegt in S) angeben. Für C als die Richtung der Normalen zu 𝔖 fällt dann U'' in S und man erhält **Bestimmung der Raumelemente** durch die Punkte S, U' resp. die Geraden s, u' (welche sich in 𝔲 schneiden) **mittelst einer Orthogonalprojektion.** (Vergl. § 54* und den Schlußüberblick.) Wir wollen weiterhin gelegentlich — immer durch *) markiert — auf diese allgemeinere Fassung der zentralprojektivischen Bestimmung bezügliche Anregungen und Bemerkungen einfließen lassen.

B. Man soll die Gerade g oder SU' mit ihrer projizierenden Ebene Cg in die Tafel umlegen. (𝔇 und 𝔲, 𝔮′ gegeben.)

Wir legen C mit C𝔮′ nach ℭ um, ziehen durch den Schnitt von g' mit 𝔲 eine Parallele zu der von ℭ nach g'𝔮′ gehenden Geraden, um in ihr auf dem Strahl ℭU' den Punkt (U) die Umlegung von U, zu erhalten; dann ist die Gerade $S(U)$ die verlangte Umlegung. Sie gibt den Verschwindungspunkt (R), die wahre Länge des Parallelstrahls $S(R)$, den Winkel β, etc.

7. Durch jede gerade Linie g oder SQ', die nicht selbst normal zur Tafel ist, geht unter den unendlich vielen Ebenen des Büschels (§ 6), dessen Scheitelkante sie ist, **eine zur Tafel normale Ebene**, die Ebene aller der Perpendikel, die von den Punkten der Geraden auf die Bildebene gefällt werden; man erhält ihre Fluchtlinie q' somit (nebenstehende Figur) durch Verbindung des Fluchtpunktes Q' mit dem Hauptpunkte C_1 und ihre Spur s als die Parallele dazu durch S.



Bestimmt man dann die Tafelneigung β der Geraden mit Hilfe der Distanz d als β gegenüberliegender und $Q'C_1$ als anliegender Kathete (§ 3) und trägt sie in S an s an, so erhält man in dem neuen Schenkel die Lage (g), welche die Gerade annimmt, wenn man die durch sie gelegte Normalebene zur Tafel

mittelst Drehung um ihre Spur s in diese überführt; und es ist (g) parallel zu $\mathfrak{C}Q'$. Ist dann A' das Bild eines beliebigen Punktes der Geraden, so ist C_1A' das Bild der durch denselben gehenden Normale zur Tafel und P in s ihr Durchstoßpunkt; trägt man in P einen rechten Winkel an s an, so erhält man in seinem neuen Schenkel auf (g) die Lage des Punktes (A) und in der Länge $P(A)$ desselben seine normale Entfernung von der Bildebene oder die Länge der entsprechenden Tafelnormale oder Tafelordinate y. Weil

$$\Delta (A)PS \sim \Delta \mathfrak{C} C_1 Q' \quad \text{und} \quad \Delta PSA' \sim \Delta C_1 Q' A',$$

so folgt

$$(A)P : \mathfrak{C} C_1 = y : d = PS : C_1 Q' = SA' : Q'A';$$

d. h. die Tafelordinate eines Punktes verhält sich zur Distanz wie der Abstand seines Bildes vom Durchstoßpunkt einer ihn enthaltenden Geraden zum Abstand vom Fluchtpunkt derselben. Und überdies, wenn y und d von der Bildebene aus in demselben Sinne gezählt sind, d. h. wenn der betrachtete Punkt mit dem Zentrum auf derselben Seite der Bildebene liegt, so verlaufen auch SA' und $Q'A'$ in demselben Sinne, d. h. A' teilt die Strecke SQ' als ein äußerer Teilpunkt in dem Verhältnis $y : d$; wenn dagegen y und d von der Bildebene aus in entgegengesetztem Sinne gehen, oder wenn der betrachtete Punkt auf der dem Zentrum entgegengesetzten Seite der Bildebene liegt, so verlaufen SA' und $Q'A'$ in entgegengesetztem Sinne, und A' teilt die Strecke SQ' als ein innerer Teilpunkt nach dem Verhältnis $y : d$. (Vergl. § 4.) Legen wir dem Teilverhältnis des Punktes A' in der Strecke SQ' das Vorzeichen bei, welches ihm als Quotienten von zwei im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne gezählten endlichen Strecken zukommt, also dem des äußeren Teilpunktes das positive, dem des innern das negative Zeichen, so entspricht dies der Auffassung der Tafelordinaten als im einen und im andern Sinne gezählt, als positiv oder negativ, je nachdem sie zu Punkten auf der Seite des Zentrums oder auf der entgegengesetzten Seite der Bildebene gehören. Vor den Anwendungen unter den Beispielen wollen wir dieses Gesetz zur elementaren Begründung der Verwendung des Teilungspunktes gebrauchen, die in § 4 bemerkt wurde. Man denke durch das S und Q' einer Ge-

raden von bekanntem l oder CQ' zwei beliebige Parallelen s und q' gezogen und auf q' von Q' aus die Länge l als $Q'T$ abgetragen, so erhält man durch die Strahlen TA' in s die wahren Längen SA abgeschnitten. Denn für y als die Tafelordinate von A und β als Tafelneigung der Geraden ist

$$SA \cdot \sin\beta = y \quad \text{und da auch} \quad Q'T \cdot \sin\beta = d \quad \text{ist,}$$

so folgt die Konstruktion aus dem Gesetz der Tafelordinaten:

$$y : d = SA : Q'T = SA' : Q'A'.$$

Da durch jede Gerade eine Ebene geht, deren Winkel α mit ihrem Winkel β übereinstimmt (§ 6, Beisp. 4), so daß ihr Q' der Fußpunkt H der Normale vom Hauptpunkt C_1 auf die Fluchtlinie q' derselben ist, oder der **Hauptfluchtpunkt** der Ebene, so kommen ihr auch (in der Entfernung l oder HC von ihm auf dieser Fluchtlinie oder in dem zu $Q'C_1$ normalen Durchmesser ihres Teilungskreises) zwei **Hauptteilungspunkte** zu. Für die Normalen zur Tafel ist der Distanzkreis der Ort der Teilungspunkte und die Enden seiner Durchmesser nennt man die Distanzpunkte der Normalebenen zur Tafel, welchen jene als Fluchtlinien angehören. Bei vertikaler Tafel nennt man den horizontalen Durchmesser speziell den **Horizont** und die in ihm gelegenen Teilungspunkte der Tafelnornormalen die **Distanzpunkte** par excellence.

) Wenn in der Zentralprojektion des Art. 6) C_1, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{q}'$ gegeben sind, so sind das s und u' einer zur Tafel normalen Ebene durch die Beziehung verbunden, daß die vom Hauptpunkt C_1 nach dem Schnittpunkt von u' mit $\mathfrak{q}'$ gehende Gerade zu s parallel ist; denn sie ist die Fluchtlinie der Normalebene. Diese Relation läßt ebensowohl u' aus s als s aus u' bestimmen. Ihre zweimalige Anwendung liefert auch für eine Normale zur Tafel das U' aus dem S und das S aus dem U'. Auch hier wird nur der Hauptpunkt und nicht der Distanzkreis selbst gebraucht. Für die Umlegung der Normalebene ist dem Texte nichts Neues hinzuzufügen.

B. 1) Man erläutere Aufgabe 5. des § 6 von dem entwickelten Gesetze aus.

2) Man konstruiere bei gegebenem **D** die Bilder der Punkte P_i einer gegebenen Geraden SQ' aus den nach Größe und Sinn bekannten Tafelordinaten y_i derselben; ebenso die Bilder der zur

Tafel parallelen Geraden p_i, in welchen die Punkte einer gegebenen Ebene von vorgeschriebenen Tafelabständen y_i liegen.

3) Wenn von einem Polyeder die Orthogonalprojektion auf die Tafel und die Entfernungen y_i seiner Ecken E_i von der Tafel gegeben sind, so soll seine Zentralprojektion daraus abgeleitet werden.

4) Man bestimme die Zentralprojektion eines Polyeders (Gebäude, etc) bei gegebenem Distanzkreis aus der Orthogonalprojektion auf die vertikale Tafel und einer Horizontalprojektion; z. B. das Bild eines Würfels, dessen eine Ecke in der Tafel und dessen entsprechende Diagonale normal zur Tafel ist. Man benutze dafür den Endpunkt des horizontalen Durchmessers im Distanzkreis oder den Distanzpunkt.

5) Man erläutere die unendlich ferne Lage der Bilder der in der Verschwindungsebene gelegenen Punkte mittelst desselben Gesetzes. (Teilverhältnis $+1$.)

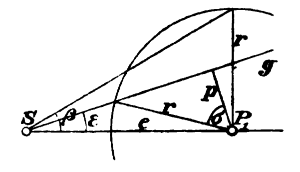
6) Man ziehe durch den Punkt P von der Tafelordinate y in der Geraden SQ' eine Gerade von gegebenem Durchstoß- oder Fluchtpunkt.

7) Man zeige, daß in der Figur dieses § die Punkte $\mathfrak{C}$, A' und (A) in einer geraden Linie liegen müssen und gebe die Lage an, in welche die Gerade r der Normalebene in der Umlegung gelangt (vergl. § 9.), bestimme auch R_1 (§ 3.) und (R) von g.

8) Man teile die Strecke AB in SQ' in n gleiche Teile nach dem Gesetz der Tafelordinaten.

(7.) Sowie das Projektionszentrum C durch den Distanzkreis D bestimmt wird, so kann auch jeder andere Punkt des Raumes durch den Kreis bestimmt werden, der um den Fußpunkt der von ihm ausgehenden Normale zur Tafel in dieser mit der Länge der Normale als Radius beschrieben wird, wenn man diesem den positiven oder sagen wir den Drehungssinn des Uhrzeigers beilegt, falls der Punkt auf derselben Seite der Tafel mit dem Zentrum, und den entgegengesetzten negativen Sinn, falls derselbe auf der dem Zentrum entgegengesetzten Seite liegt — was also durch eine Pfeilspitze in der Kreisperipherie markiert werden kann. Diese Bestimmung kann mit Vorteil als Abbildung der Punkte des Raumes durch die Kreise der Ebene benutzt werden; wir sprechen dann vom Bildkreis des Punktes und vom Originalpunkt des Kreises und von der Methode der Zyklographie. Die Abbildung der Punkte einer geraden Linie g oder SQ' durch ihre Bildkreise läßt sich an Figur S. 21 leicht anschließen. Die Spur s der durch sie gehenden Normalebene zur Tafel d. h.

die Parallele durch S zur Geraden $C_1 Q'$ ist der Ort ihrer Mittelpunkte, insbesondere entspricht dem Punkte A' der Mittelpunkt P und der Radius $P(A)$, dem Punkte S er selbst als Kreis vom Radius Null und der vierten Ecke des Parallelogramms aus $C_1 Q' S (R_1$ des § 3) als Mittelpunkt ein Kreis vom Radius d. Für einen Punkt B der Geraden auf der dem Zentrum entgegengesetzten Seite der Tafel d. i. mit einem Bilde B' zwischen S und Q', erhält man Mittelpunkt und Radius des Bildkreises wie vorher und hat demselben nur den negativen Drehungssinn beizulegen. Alle diese Kreise haben S zum gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt und zwar die von zwei Punkten auf einerlei Seite der Tafel zum äußern oder direkten, die von zwei Punkten auf entgegengesetzten Seiten derselben zum innern oder inversen Ähnlichkeitspunkt, wie man sieht. Für Q' außerhalb des Distanzkreises oder $\beta < 45^0$ liegt der Ähnlichkeitspunkt außerhalb aller Bildkreise und unter den durch ihn gehenden Geraden oder Ähnlichkeitsstrahlen sind zwei gemeinsame Tangenten derselben. Für Q' im Distanzkreis oder $\beta = 45^0$ berühren sich alle Bildkreise im Ähnlichkeitspunkt S und für $\beta > 45^0$ umschließen sie denselben; $\beta = 90^0$ oder Q' in C_1 liefert die konzentrischen Kreise um S. Parallele Gerade werden durch gleiche und parallele lineare Kreisreihen dargestellt. Jede solche Reihe ist durch einen Kreis und den Ähnlichkeitspunkt bestimmt; wir bezeichnen $\cot \beta$ als ihren Modul.



Jede durch S in der Ebene der Kreisreihe gezogene Gerade g schneidet alle ihre Kreise unter einerlei Winkel σ. Denn für e als den Abstand des Mittelpunktes P_1 desjenigen Kreises der Reihe, der den Radius r hat und ε als den Winkel von g mit der Zentrale sowie p als den Abstand der g vom Mittelpunkte P_1 hat man (obenstehende Figur)

$$\cos\sigma = \frac{p}{r}, \quad \cot\beta = \frac{e}{r}, \quad \sin\varepsilon = \frac{p}{e}, \quad \text{also} \quad \frac{\cos\sigma}{\sin\varepsilon} = \cot\beta.$$

Man schließt daraus, daß σ nur für $\varepsilon = 0$ zum rechten Winkel werden kann und nur Null für $\sin\varepsilon = \tan\beta$, also $\beta < 45^0$; daß $\beta = 45^0$, $\varepsilon + \sigma = 90^0$ fordert, endlich daß $\beta > 45^0$ stets reelle σ gibt und zwar das kleinste für $\varepsilon = 90^0$, mit $\varepsilon = \beta$ speziell auch $\sigma = \beta$.

Jede stetige Reihe von Punkten P oder jede Kurve liefert eine nach Mittelpunktslage und Radienänderung im allgemeinen stetige Reihe von Kreisen in der Bildebene als ihr zyklographisches Abbild; dieselbe liefert in der Regel eine umhüllende Kurve in der Bildebene, die Begrenzung des von ihnen bedeckten Teiles der Ebene.

Zwei Kreise in der Tafel bestimmen zwei Gerade und zwei lineare Kreisreihen, jenachdem man ihnen einerlei oder entgegengesetzten Drehungssinn beilegt, also respektive mit dem äußeren oder inneren Ähnlichkeitspunkt als Nullkreis.

Die Bildkreise der Punkte einer Ebene bilden ein System, das wir ein planares nennen wollen; die Spur s und die gerade Linie r_1, die Spur der Normalebene zur Tafel durch die Verschwindungslinie der Ebene (§ 5, § 6, 2), bestimmen das planare Kreissystem bei gegebener Distanz; auch durch die Spur und einen seiner Kreise ist es bestimmt; es enthält alle die linearen Kreisreihen, die durch einen Punkt S der Spur s als Ähnlichkeitspunkt und einen Kreis vom Radius d aus einem Punkte von r_1 bestimmt werden. Den Falllinien der Ebene zur Tafel entsprechen die linearen Reihen mit dem kleinsten Modul; ist ihre Tafelneigung α gleich 45^0, so sind dieselben berührend im Durchstoßpunkte; für $\alpha > 45^0$ gibt es zwei Systeme paralleler Geraden mit $\beta = 45^0$ in der Ebene und die Kreise des Systems ordnen sich in zwei Scharen von berührenden linearen Reihen; $\alpha = 90^0$ liefert alle Kreise, deren Zentra in einer Geraden liegen. Irgend zwei Kreise des Systems haben einen Ähnlichkeitspunkt im Durchschnitt ihrer Zentrale mit der Spur oder die Spur ist für alle Kreise des Systems ein gemeinsamer Ähnlichkeitsstrahl, man nennt sie ihre Ähnlichkeitsachse; sie schneidet für $\alpha > 45^0$ alle Kreise des Systems unter demselben Winkel σ, und für r als Radius eines derselben, dessen Mittelpunkt den Abstand e von seiner Spur hat, ist $\cot\alpha = \cos\sigma$, weil beide gleich $e : r$ sind. Die Kreise des planaren Systems schneiden seine Ähnlichkeitsachse unter Winkeln von einerlei Kosinus, der der Kotangente der Tafelneigung der Ebene gleich ist; wir nennen diesen Zahlwert den Modul des planaren Systems.

Sein Zusammenhang mit den Moduln der im System enthaltenen linearen Kreisreihen wird (untenstehende Figur) durch die Formel

$$\cos\sigma = \operatorname{cotan}\alpha = \operatorname{cotan}\beta \cdot \cos\theta$$

ausgedrückt für β als die Tafelneigung der Reihe PS und θ als die Abweichung ihrer Zentrale von der Normalen zur Spur des planaren Systems s, weil mit r als Radius des bestimmenden Kreises, e als Abstand seines Mittelpunktes P_1 von der Spur der Ebene und $P_1S = l$

$$\cos\sigma = \operatorname{cotan}\alpha = e : r,$$
$$\cos\theta = e : l, \quad \operatorname{cotan}\beta = l : r$$

ist. Für $\beta = 45^0$ ist $\cos\theta = \cos\sigma = \operatorname{cotan}\alpha$, gemäß dem Faktum, daß es nur auf Ebenen mit $\alpha > 45^0$ Gerade mit $\beta = 45^0$ gibt, durch jeden Punkt der Ebene zwei, die für $\alpha = 45^0$ zusammenfallen.

Drei beliebige Kreise bestimmen das planare System eindeutig unter Festsetzung ihres Drehungssinnes; sie bestimmen vier planare Systeme im Falle der Unbestimmtheit desselben, weil den ersten Kreis als Bildkreis eines Punktes 1 im Raume gedacht der zweite und dritte je zwei Punkte 2, 2* und 3, 3* respektive liefern und diese die vier Ebenen 123, 123*, 12*3 und 12*3* bestimmen; ihre Spuren sind die vier Ähnlichkeitsachsen der drei Kreise. Die Konstruktion der Aufgaben über den Schnitt von Ebenen untereinander zu zweien oder zu dreien, und von Ebene und gerader Linie liefert damit die Auflösung von Problemen über Kreise mittelst Angaben über Ähnlichkeitspunkte, Ähnlichkeitsachsen und Moduln derselben; bei ihrer Lösung wird man einen der gegebenen Kreise zum Distanzkreis machen, und auf diesen kann man alle Konstruktionen zurückführen nach den Gesetzen der Ähnlichkeit.

Zu einer Kurve in der Tafel — man denke den Kreis etwa — kann man durch jede Tangente t eine Ebene unter dem Winkel α gegen die Tafel in stetiger Folge legen und dadurch eine Fläche umhüllen; man kann ferner durch den zugehörigen Berührungspunkt T in der jeweiligen Ebene Gerade z. B. unter 45^0 zur Tafel legen und die durch ihre stetige Folge entstehende Fläche betrachten.

Wir fügen noch hinzu, daß die Kreise in der Tafel, welche einen gegebenen Kreis berühren, die Bildkreise der Punkte eines gleichseitigen oder durch Drehung eines 45° Winkels um den einen zur Tafel normalen Schenkel erzeugten Rotationskegels (oder von zwei in Bezug auf die Tafel zueinander symmetrischen Kegeln dieser Art) über diesem Kreise sind; denn die geraden Linien von den Punkten in der Peripherie dieses Kreises nach den durch ihn abgebildeten Raumpunkten sind unter 45° zur Tafel geneigt und die zugehörigen linearen Kreisreihen daher berührend im Durchstoßpunkt. Dabei ist die Berührung ausschließend zwischen dem Grundkreise und den Bildkreisen der auf der entgegengesetzten Seite der Tafel mit seinem Originalpunkte (der Kegelspitze) liegenden Punkte und umschließend für die auf derselben Seite liegenden Punkte einer Mantellinie.

Hat der Grundkreis den Radius Null, so erhält man die Gesamtheit der durch ihn gehenden Kreise der Ebene als das System der Bildkreise des gleichseitigen Rotationskegels mit zur Tafel normaler Achse, der ihn zur Spitze hat.

Damit gehen die Bestimmungen von Kreisen einer linearen Reihe, welche einen gegebenen Punkt enthalten oder einen gegebenen Kreis berühren, über in die Konstruktion der Schnittpunkte zwischen einer geraden Linie und einem Kegel jener Art mit dem Punkte als Spitze, oder den zwei Kegeln derselben Art mit dem Kreise als Basis.

Wir kommen weiterhin auf diese Methode und ihre Anwendungen zurück — immer unter dem Zeichen ( ).

B. 1) Man bestimme die Kreise einer linearen Reihe, die eine gegebene Gerade der Tafel berühren, bez. sie unter einem Winkel σ von gegebenem Kosinus schneiden.

2) Konstruiere die Kreise von zwei linearen Reihen, die einen gegebenen Ähnlichkeitspunkt haben.

3) Welche Aufgabe löst die Bestimmung der Transversale zu zwei windschiefen Geraden in gegebener Ebene?

4) Bestimme die Kreise eines planaren Systems, die eine Gerade der Tafel berühren oder unter gegebenem Winkel σ schneiden.

5) Konstruiere Kreise eines planaren Systems, die mit zwei Geraden der Tafel gleiche Winkel von vorgeschriebener Größe bilden.

8. Scheinbar unzugänglich den vorigen Bestimmungsweisen sind die Geraden und Ebenen, welche der Bild-

ebene parallel liegen, weil ihre Durchstoß- und Fluchtpunkte, Spuren und Fluchtlinien unendlich entfernt liegen. Aber eine zur Bildebene parallele Gerade ist durch ihr Bild und einen in ihr gelegenen Punkt oder eine durch sie gehende Ebene bestimmt; diese beiden Bestimmungsarten kommen überdies aufeinander zurück. Eine zur Bildebene parallele Ebene ist durch einen ihrer Punkte und ein solcher durch eine ihn enthaltende Gerade bestimmt, welche die Bildebene schneidet. Endlich sind insbesondere die Punkte R und Geraden r der Verschwindungsebene als Punkte bekannter Geraden und als Linien in bekannten Ebenen schon bestimmt worden; die Angabe ihrer Lage in der Verschwindungsebene gegen das Zentrum genügt, um solche sie enthaltende Gerade, bez. Ebenen zu verzeichnen (§ 3; § 5, 3, 4). Damit schließen sich dann auch diese speziellen Fälle der Verwendung in den jetzt lösbaren Aufgaben über die gegenseitige Lage von Punkten, Ebenen und Geraden an.

) In der allgemeinen Zentralprojektion des § 6 sind die zur Tafel parallelen Geraden und Ebenen durch unendlich ferne S bez. s ausgezeichnet, aber durch ihre U' und g' bez. ihre u' bestimmt. Ebenen durch die Gerade $\mathfrak{u}$ haben aber vereinigte s und u' und werden durch ihren Schnittpunkt mit irgend einer Geraden SU' bestimmt; gerade Linien in solchen Ebenen sind durch ihr Bild (mit vereinigtem S und U') und ihren Schnitt mit einer Geraden bestimmt, welche $\mathfrak{u}$ nicht schneidet. Auch für die der Ebene angehörigen Elemente genügt dies.

B. 1) Man ziehe und bestimme die gerade Linie SQ'

a) zwischen zwei Punkten A und B, die durch ihre Bilder A', B' in den Geraden S_1Q_1', S_2Q_2' gegeben sind; speziell die Parallele durch A auf S_1Q_1' zu S_2Q_2'; ebenso die Gerade von A auf S_1Q_1' nach dem Verschwindungspunkte R_2 von S_2Q_2'. Man bestimmt die Ebene von A nach S_2Q_2' mittelst einer Hilfslinie durch A, die mit dieser den Fluchtpunkt Q_2' oder den Durchstoßpunkt S_2 gemein hat und deren Durchstoß- resp. Fluchtpunkt man erhält.

b) Die gerade Linie SQ' zwischen zwei Punkten von den Bildern A', B', welche in den Ebenen s_1q_1' resp. s_2q_2' liegen. Man kann durch jeden Punkt in der Schnittlinie dieser Ebenen eine A und B enthaltende Ebene sq' legen und damit S und Q' der Geraden AB erhalten. Man wird dabei den Punkt Q' der Schnittlinie oder ihr S bevorzugen, am vorteilhaftesten aber vielleicht die Benutzung ihres Ver-

schwindungspunktes R mit der Richtung R'_∞ ihrer Projektion finden: Parallelen von A' in $s_1 q'_1$ und von B' in $s_2 q'_2$ zum Bilde der Schnittlinie k_1 liefern in s_1, q'_1 und bez. s_2, q'_2 Punkte der Spur und Fluchtlinie der Hilfsebene.

c) Den Fall, wo A in bekannter Ebene, B in gegebener Geraden liegt, führt man leicht auf die vorigen zurück.

2) Durch zwei auf verschiedenen Geraden gegebene Punkte ziehe man die geraden Linien, welche mit einer dritten gegebenen Geraden sich in der Verschwindungsebene schneiden. Wann fallen sie in eine zusammen?

3) Man bestimme die Spur und Fluchtlinie der Ebene durch drei Punkte A, B, C, welche durch ihre Bilder auf den Geraden $S_1 Q'_1$, $S_2 Q'_2$, $S_3 Q'_3$ oder in den Ebenen $s_1 q'_1$, $s_2 q'_2$, $s_3 q'_3$ gegeben sind — durch zweimalige Anwendung von 1).

4) Man verzeichne die durch zwei Punkte A, B parallel einer geraden Linie g und die durch einen Punkt A parallel zu zwei geraden Linien g_1, g_2 gehende Ebene; oder die Ebene durch eine Gerade g parallel einer anderen Geraden h und die durch einen Punkt A auf g parallel einer gegebenen Ebene **E**.

5) Man konstruiere die Schnittlinie von zwei Ebenen und den Schnittpunkt von drei Ebenen; insbesondere die Schnittlinie von zwei Ebenen mit parallelen Spuren — dies durch eine Hilfsebene, die einen Punkt derselben liefert.

Die Schnittlinie von zwei Ebenen $s_1 q'_1$, $s_2 q'_2$, wo s_1 mit q'_2 und s_2 mit q'_1 zusammenfällt, liegt in der zweiten Parallelebene und hat ihr Bild in der Mitte zwischen beiden Geraden.

6) Man bestimme den Schnittpunkt von zwei geraden Linien $S_1 Q'_1$, $S_2 Q'_2$ mit sich deckenden Bildern — als Schnittpunkt mit der Schnittlinie von zwei sie enthaltenden Ebenen.

Wenn S_1 auf Q'_2 und S_2 auf Q'_1 fallen, so liegt der Schnittpunkt beider Geraden in der zweiten Parallelebene und projiziert sich in der Mitte ihrer Bildlänge.

7) Man bestimme den Durchschnittspunkt einer Geraden SQ' mit einer Ebene sq' — als in ihrer Schnittlinie mit einer Hilfsebene durch SQ' gelegen.

8) Man konstruiere die durch den Punkt A' auf $S_1 Q'_1$ gehende Gerade SQ', welche zwei andere gegebene Gerade $S_2 Q'_2$, $S_3 Q'_3$ schneidet, die nicht in einer Ebene liegen; insbesondere die Transversale von zwei Geraden in vorgeschriebener Richtung Q'_1. Jene erhält man als Schnittlinie der Ebenen Ag_2, Ag_3; von dieser den Durchstoßpunkt S als Schnitt der durch S_2, S_3 gezogenen Parallelen zu den Geraden $Q'_1 Q'_2$, $Q'_1 Q'_3$.

9) Man ziehe die möglichen parallelen Geraden durch gegebene Punkte in zwei gegebenen nicht parallelen Ebenen — natürlich parallel ihrer Schnittlinie, also mit ihrem Fluchtpunkte.

Die speziellen Lagen von Punkten und Geraden in der Ver-

schwindungsebene oder von Geraden und Ebenen parallel zur Tafel sind hier überall einzuführen; so ist z. B. zu bestimmen die Ebene durch den Verschwindungspunkt R einer Geraden nach einer anderen Geraden, bez. parallel einer gegebenen Ebene; die Ebene durch einen Punkt A in SQ' nach der Verschwindungslinie r der Ebene sq'; oder durch einen Punkt nach den Verschwindungspunkten zweier Geraden; etc.

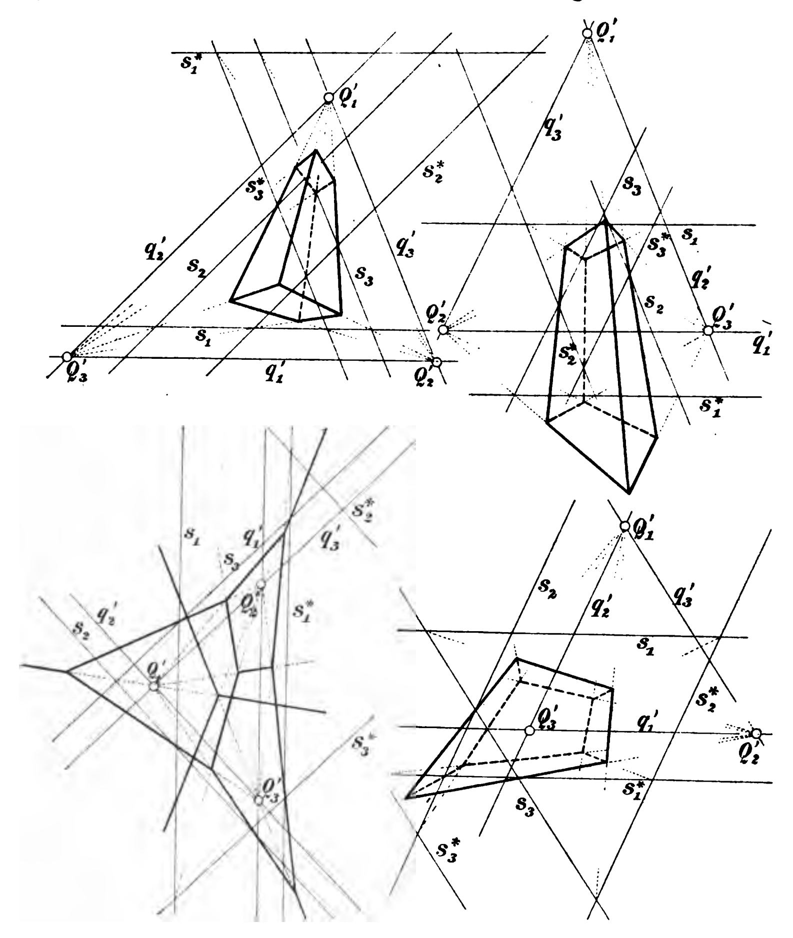
10) Zu drei sich kreuzenden Geraden S_1Q_1', S_2Q_2', S_3Q_3' das Parallelepiped darzustellen, dessen Kanten sie sind (mittelst der Ebenen 12, 13; 23, 21; 31, 32, d. h. durch 1 parallel 2, durch 1 parallel 3, etc.), so daß die Ebenen ik und ki parallel sind. Die Ebenen ik und il schneiden die Geraden l resp. k in zwei gegenüberliegenden Ecken ikl, ilk des Parallelepipeds, so daß das Bild desselben nach ihrer Bestimmung durch Ziehen von Parallelen aus ihnen zu den gegebenen Geraden vollendet wird.

Wie gestaltet sich die Konstruktion insbesondere, wenn eine oder zwei dieser Geraden der Bildebene parallel sind; wenn eine projizierend ist; wenn eine in der Verschwindungsebene liegt.

Immer ist das Parallelepiped der zu drei Schichten (§ 5, 1) gemeinsame oder durch drei Paare paralleler Ebenen begrenzte Raum.

11) Wir erhalten darnach leicht die Charaktere der möglichen typischen Bilder des Parallelepipeds. Sie entsprechen den wesentlich verschiedenen Lagen des Projektionszentrums zu den drei Schichten, die es bilden. Nun zerlegen die drei Paare paralleler Ebenen den Gesamtraum in 27 Teile, von denen einer — der Raum des Parallelepipeds, das Innere — allen drei Schichten angehört, indes die 26 übrigen drei Gruppen bilden: eine von sechs Räumen in zwei Schichten, die Paare einseitig offener Parallelepipede über den parallelen Flächen des Körpers; sodann zwölf je zu vier in derselben Schicht, aber in keiner zweiten gelegene äußere Flächenwinkelräume an den Gruppen paralleler Kanten; endlich acht äußere Scheiteleckenräume an den acht Ecken, welche in keiner Schicht liegen. Nur den Lagen des Projektionszentrums in einem der Raumteile der drei letzten Gruppen können bildliche, d. h. den Seherfahrungen entsprechende Projektionen entspringen; jeder entspricht ein typisches Bild. Wenn wir das Parallelepiped selbst undurchsichtig denken, so sind im Bilde aus einem der Scheiteleckenräume sieben Ecken, neun Kanten und drei Flächen sichtbar, davon eine Ecke und drei Kanten innerlich, die anderen als Umriß (oben links in der Figurengruppe S. 32); es sind aus Punkten der äußeren Flächenwinkelräume (oben rechts) sechs Ecken, zwei Flächen und sieben Kanten, davon eine innerlich, sichtbar und endlich aus den Punkten der offenen Außen-Parallelepipede vier Ecken, vier Kanten und eine Fläche (unten rechts in der Gruppe).

Nach den Daten unter 10) ist jede Schicht dargestellt durch die gemeinsame Fluchtlinie, z. B. für die erste Schicht $Q_2'Q_3'$ oder q_1' und ihre Parallelen s_1, s_1^* aus den zugehörigen Durchstoßpunkten, also hier S_2, S_3 als Spuren; das Projektionszentrum liegt in der Schicht oder nicht, jenachdem die Fluchtlinie zwischen den Spuren oder außerhalb ihres Parallelstreifens liegt.



Liegt es in allen drei Schichten also im Innern des Parallelepipeds und wird eine Ecke durch die Verschwindungsebene abgeschnitten, so entsteht ein Bild wie das vierte (unten links), wo drei bez. Kanten nicht zwischen ihren Endpunkten Bilder sind. (§§ 4, 14.)

Man wird demnach leicht die vier typischen Bilder des Parallelepipeds herstellen; ferner die den Übergangsfällen entsprechenden, wo das Zentrum in einer Fläche oder in der Ebene von drei oder vier Ecken, in der Geraden zwischen zwei Ecken

oder in einer Kante oder in einer Ecke des Parallelepipeds gelegen ist; und wo eine Ecke oder zwei Ecken, eine Kante, drei oder vier Ecken, eine Fläche in der Verschwindungsebene liegen (Vergl. § 14,4.)

12) Man bestimme die drei Ebenen durch einen gegebenen Punkt, welche die vier Flächen eines Tetraeders in den vier Seiten eines Parallelogramms schneiden.

Man erkennt leicht, daß ihre Fluchtlinien die Diagonalen im Vierseit der Fluchtlinien der Tetraederflächen sind; insofern sie die Tetraederflächen selbst schneiden sollen, nicht erst ihre Verlängerungen, sind ihre Grenzlagen die drei Ebenenpaare, welche durch die Kanten parallel zu den bez. gegenüberliegenden Kanten gelegt werden. Die zugehörigen Parallelogramme sind die Tetraederkanten selbst.

Nun bilden diese drei Ebenenpaare drei Schichten und damit ein Parallelpiped wie in 10 f.) und man sieht weiter, wie durch die Lage des gegebenen Punktes in allen drei Schichten bez. zwei Schichten oder einer Schicht bestimmt wird wie in 11), wie viele eigentliche Parallelogrammschnitte des Tetraeders durch ihn gehen.

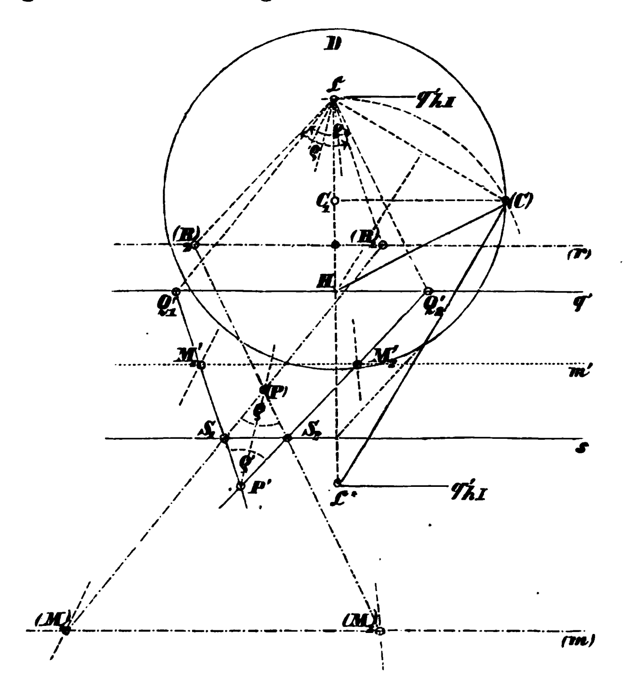
13) Von vier durch einen Punkt gehenden Ebenen kennt man die Fluchtlinien $q_1', \ldots, q_4'$ und von dreien derselben die Spuren s_1, s_2, s_3. Man lege durch den Schnittpunkt von s_1 und s_2 die drei Ebenen, welche aus den vier Ebenen Paare von Parallelen schneiden. Es ist offenbar, daß dieselben die geraden Linien $q_1'q_2'$, $q_3'q_4'$; $q_2'q_3'$, $q_1'q_4'$; $q_1'q_3'$, $q_2'q_4'$ zu ihren Fluchtlinien haben, wie in 12).

Man bemerke, daß in allen diesen Beispielen der Distanzkreis nicht gebraucht wird, also unbestimmt bleiben kann — mit anderen Worten, daß die bezüglichen Konstruktionen und Figuren für alle Punkte des Raumes als Zentra richtig sind.

9. Wenn $S_1 Q_1'$ und $S_2 Q_2'$ in Fig. S. 34 zwei gerade Linien g_1, g_2 darstellen, die sich im Punkte P vom Bilde P' schneiden, und also sq' ihre Ebene ist, so ist der von ihnen gebildete Winkel bei P dem Winkel der zu ihnen bez. parallelen projizierenden Strahlen CQ_1', CQ_2' am Zentrum C gleich. Dieser aber kann bei gegebenem D durch die Umlegung der projizierenden Ebene Cq' in wahrer Größe gefunden werden; nach § 4 ist 𝔆 das mit dieser Ebene umgelegte Zentrum und damit Q_1'𝔆Q_2' der gesuchte Winkel. Die zweite Lage des umgelegten Zentrums 𝔆* gibt natürlich den nämlichen Winkel.

Wir bemerken sodann, daß die Winkel der parallelen Projizierenden 𝔆Q_1', 𝔆Q_2' mit der Fluchtlinie q' den Winkeln der Geraden g_1, g_2 selbst mit der Spur s gleich sind, und daß die Punkte S_1, S_2 bei der Umlegung der Ebene in die Tafel an ihrem Orte bleiben; und schließen, daß die Parallelen zu 𝔆Q_1' aus S_1 und zu 𝔆Q_2' aus S_2 bez. die mit der Ebene sq'

in die Tafel umgelegten Geraden g_1 und g_2, d. i. (g_1) und (g_2) sind, und daß ihr Schnittpunkt (P) die Umlegung des Punktes P repräsentiert. Denken wir endlich unter den Geraden der Ebene sq', welche durch P gehen, diejenige, deren Bild das benutzte umgelegte Zentrum $\mathfrak{C}$ enthält, so folgt aus der Lage ihres Durchstoß- und Fluchtpunktes, daß ihre Umlegung mit dem Bilde selbst zusammenfällt und daß somit die Punkte P' und (P) immer in einer geraden Linie aus dem umgelegten Zentrum $\mathfrak{C}$ liegen müssen.



Wir bemerken, daß die Antragung des gegebenen Winkels ϱ in P an die Gerade $S_1 Q_1'$ mittelst der Bestimmung von Q_2' durch Antragung desselben Winkels in $\mathfrak{C}$ an $Q_1'\mathfrak{C}$ dargestellt würde.

Zieht man weiter durch das umgelegte Zentrum $\mathfrak{C}$ Parallelen zu den Projektionen g_1', g_2' respektive bis zum Durchschnitt mit den Umlegungen (g_1), (g_2), so erhält man in (R_1), (R_2) die Umlegungen der Punkte dieser Geraden in der Verschwindungsebene (Fig. S. 12, 14; §§ 3, 4), welche in der zu s parallelen Geraden r der Ebene $g_1 g_2$, d. i. in ihrer Umlegung (r) liegen müssen.

Da die Entfernung von 𝔈 bis r dem Abstande der Parallelen q' und s gleich ist, so ist das (r) von sq' bestimmt, wenn das umgelegte Zentrum 𝔈 bestimmt ist. Die Mitte auf einer Geraden durch 𝔈 zwischen 𝔈 und s ist auch die Mitte ihres Segments zwischen q' und (r).

Auf der anderen Seite von s, ebensoweit entfernt davon wie (r), liegt (m), die Umlegung der Schnittlinie der Ebene mit der hinteren Parallelebene, mit den Umlegungen von M_1 und M_2.

Offenbar sind 𝔈 und 𝔈* die Schnittpunkte der Teilungskreise (§ 7) der beiden Geraden $S_1 Q_1'$ und $S_2 Q_2'$; und die Teilungskreise aller in der Ebene sq' gelegenen Geraden gehen durch sie hindurch. Man sagt: Die Teilungskreise der Geraden einer Ebene — allgemeiner der Geraden, deren Richtungen einer und derselben Stellung angehören — bilden ein Kreisbüschel mit reellen Grundpunkten.

B. 1) Der Winkel d. i. der Richtungsunterschied von zwei Geraden, die nicht in einer Ebene liegen, wird durch ihre projizierenden Parallelstrahlen ebenso bestimmt wie der ebene Winkel.

2) Welchen Winkel bildet eine beliebig gegebene Gerade mit den Normalen zur Bildebene? Welchen mit einer beliebigen Geraden in der Bildebene? Mit welchen Geraden in ihr den größten und mit welchen den kleinsten?

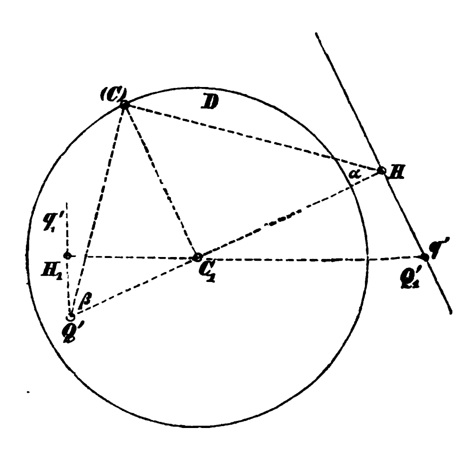
3) Man verzeichne in der Ebene sq' um einen gegebenen Punkt derselben als Mittelpunkt einen Rhombus, von welchem zwei Gegenseiten die Tafelneigung 30^0 haben, und teile die ganze Ebene von ihm aus in gleiche Rhomben — mit oder ohne Bestimmung der wahren Gestalt derselben.

4) Man soll die Ebene sq' von gegebener Strecke $A'B'$ aus als erster Seite in gleiche Quadrate oder reguläre Sechsecke einteilen — natürlich bei gegebenem Distanzkreis. Man wird mit Hilfe des Kollineationszentrums 𝔈 durch A' in sq' die Normale zu AB bez. die zu AB unter 60^0 geneigten Geraden zeichnen, auf sie von A aus die zu AB gleichen Strecken abtragen und dieselben in ihnen wie in $A'B'$ wiederholt auftragen (siehe § 4, 5); durch Ziehen von Parallelen zu den betrachteten Geraden wird die verlangte Täfelung dargestellt.

5) Für die durch eine Gerade SQ' gehenden Ebenen sind die umgelegten Zentra 𝔈 die Teilungspunkte der Scheitelkante SQ'.

10. Die Bestimmung der Winkel zwischen geraden Linien und Ebenen, sowie derjenigen zwischen je zwei Ebenen wird nach bekannten Definitionen auf die der Winkel zwischen Linien zurückgeführt. Dieselben fordern die

Konstruktion der Normalen zu einer Ebene oder die der Normalebenen zu einer Geraden. Da alle Normalen derselben Ebene von gleicher Richtung und alle Normalebenen derselben Geraden von gleicher Stellung sind, so kommen diese Konstruktionen auf die Kenntnis der Beziehung zurück, welche zwischen dem Durchstoßpunkt Q' einer projizierenden Geraden CQ' und der Spur q' der zu ihr normalen projizierenden Ebene Cq' stattfindet. Diese besteht aber darin, daß die zu q' normale projizierende Ebene, welche auch CQ' enthält, mit dieser Linie, der Bildebene und der projizierenden Ebene Cq' ein bei C rechtwinkliges



Dreieck $CQ'H$ — obenstehende Figur zeigt es in die Bildebene umgelegt als $(C)\,Q'H$ — erzeugt, in welchem die zur Hypotenuse $Q'H$ gehörige Höhe die Distanz d ist, indes die spitzen Winkel bei H und Q' die Tafelneigungen α und β der projizierenden Ebene Cq' und der projizierenden Geraden CQ', und die Abschnitte der Hypotenuse C_1Q', C_1H die Abstände der Q' und q' vom Hauptpunkte sind. Man hat also

$$C_1H : d = d : C_1Q'.$$

Die nämliche Relation besteht zwischen dem Fluchtpunkte einer geraden Linie, also eines Bündels von Parallelen, und der Fluchtlinie aller zu ihr normalen Ebenen, d. i. eines Büschels, oder zwischen der Fluchtlinie einer Ebene, also eines Büschels von parallelen Ebenen, und dem Fluchtpunkte der dazu normalen Geraden, d. i. eines Bündels.

Die Fluchtlinie q_1' der Normalebene einer Geraden, die einer Ebene von der Fluchtlinie q' parallel ist — oder deren Fluchtpunkt Q_1' in q' liegt — ist das Perpendikel q_1' aus dem Fluchtpunkte Q' der Normalen von q' auf die Gerade C_1Q_1'. Denn es ist

$$C_1H_1 : d = d : C_1Q_1'.$$

Oder auch: Die Normalebene zu jeder einer Ebene angehörigen Richtung enthält die Richtung der Normalen dieser Ebene.

) In der allgemeinen Zentralprojektion des § 6 geht man von den S, U' resp. s, u' zu den Q' resp. q' über und konstruiert q_n' und Q_n' der Normalelemente wie vorher.

Die Anwendung auf die Winkelmessung und auf die Bestimmungen von Linien und Ebenen durch die Winkelgrößen mittelst der Konstruktionen am Zentrum zeigen wir an zahlreichen Beispielen.

B. 1) Man konstruiere bei gegebenem **D** — der Distanzkreis wird auch für alle folgenden Aufgaben dieses Paragraphen als gegeben gedacht — die Normale SQ' einer Ebene sq', die von dem Punkte A' in der geraden Linie $S_1 Q_1'$ ausgeht; speziell ihren Fußpunkt B in der Ebene und die wahre Länge AB. Die Normalebene der Ebene sq' durch $S_1 Q_1'$ dient am besten; ihre Fluchtlinie geht durch Q_1' und den Normalenfluchtpunkt Q_n' von sq'.

2) Man konstruiere die Normalebene sq' zur Geraden SQ', durch den Punkt A' in der Geraden $S_1 Q_1'$ und das Perpendikel von diesem Punkte auf jene Gerade — mittelst ihres Fußpunktes in der Normalebene.

3) Man bestimme aus dem Schenkel g_1 oder $S_1 Q_1'$ eines rechten Winkels und dem Bilde g_2' des anderen Schenkels den Durchstoßpunkt S_2 und den Fluchtpunkt Q_2' desselben — als in der Normalebene durch den Scheitel zum ersten Schenkel gelegen. Allgemeiner die Normale zu SQ', die in der Ebene sq' liegt.

4) Konstruiere die vom Verschwindungspunkte R von SQ' auf $S_1 Q_1'$ gefällte Normale und ihre wahre Länge.

5) Man konstruiere diejenige Normalebene zur Ebene sq', welche eine gegebene Spur s_N hat oder eine andere gegebene Gerade enthält, resp. zu einer solchen parallel durch einen gegebenen Punkt geht.

6) Wann sind zwei Ebenen mit parallelen Spuren normal zueinander? Wenn das Produkt der Abstände ihrer Fluchtlinien vom Hauptpunkte dem negativen Quadrat der Distanz gleich ist.

7) Man bestimme die wahre Größe des Winkels der geraden Linie SQ' mit der Ebene sq' nach beiden geometrischen Definitionen. Für Q_n' als den zu q' gehörigen Normalenfluchtpunkt ist der Schnittpunkt von $Q'Q_n'$ mit q' der Fluchtpunkt Q_d' des in sq' liegenden Schenkels; für $\mathfrak{C}$ als das mit $CQ_n'Q'$ umgelegte Zentrum ist $\angle Q_d'\mathfrak{C}Q'$ der gesuchte Winkel und $Q'\mathfrak{C}Q_n'$ sein Komplement. Man konstruiert den Winkel der zu SQ' parallelen projizierenden Linie mit der zu sq' parallelen projizierenden Ebene.

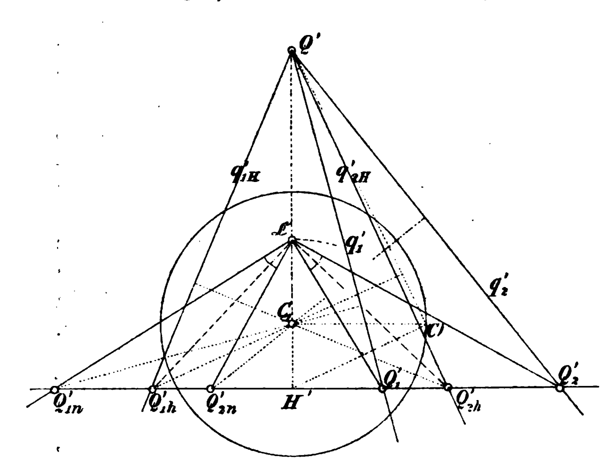
8) Lege durch eine gegebene Parallellinie zur Tafel die Normalebene zu einer gegebenen Ebene. Durch den Normalen-

fluchtpunkt der letzten geht ihre Fluchtlinie zum Bilde der Geraden parallel.

9) Man bestimme die wahre Größe der Winkel, welche die Ebenen $s_1 q_1'$, $s_2 q_2'$ miteinander einschließen und die Halbierungsebenen dieser Winkel.

Man zeichnet entweder die Fluchtpunkte Q_{1n}' und Q_{2n}' ihrer Normalen und nach der Umlegung von § 9 den $\angle Q_{1n}' C Q_{2n}'$; oder man zeichnet die Fluchtlinie q_N' der Normalebene ihrer Schnittlinie (zugleich die Verbindungslinie dieser Fluchtpunkte) und für Q_1', Q_2' als ihre Schnittpunkte mit q_1', q_2' bez. den Winkel $Q_1' C Q_2'$. Beides liefert denselben Winkel, weil notwendig $\mathfrak{C} Q_1' \perp \mathfrak{C} Q_{1n}'$ und $\mathfrak{C} Q_2' \perp \mathfrak{C} Q_{2n}'$ ist.

Für die Durchführung dieser lehrreichen Konstruktionen (nachstehende Figur) machen wir noch folgende Bemerkungen: Für q_1', q_2' als Fluchtlinien der gegebenen Ebenen und q_N' als die Fluchtlinie ihrer gemeinsamen Normalebene, in der die Fluchtpunkte Q_{1n}' und Q_{2n}' ihrer Normalen liegen, erhält man mit Hilfe des zugehörigen $\mathfrak{C}$ den Winkel der Ebenen und seine Halbierungslinien und durch sie die Fluchtlinien der Halbierungsebenen q_{1H}' und q_{2H}'; nämlich als Verbindungslinien des Schnittpunktes Q' von q_1' und q_2' mit den Punkten Q_{1h}' und Q_{2h}', welche die Halbierungslinien des Winkels $Q_{1n}' \mathfrak{C} Q_{2n}'$ auf q_N' bestimmen; sie bilden mit q_N' zusammen ein **orthogonales Tripel**, die Höhen des Dreiecks $Q' Q_{1h}' Q_{2h}'$ schneiden sich im Hauptpunkte (unten B. 11), oder der Normalenfluchtpunkt für jede Ebene, deren Fluchtlinie durch die eine Ecke ihres Dreiecks geht, liegt in der gegenüberliegenden Seite. **Solche Ebenen sind die gleichgeneigten zu den gegebenen**; ihre Fluchtlinien gehen durch den Punkt q_N', q_{1H}' bez. den Punkt q_N', q_{2H}' und die Fluchtpunkte der bezüglichen Normalen liegen in q_{2H}' bez. q_{1H}', natürlich in dem zur angenommenen Fluchtlinie normalen Distanzkreis-Durchmesser. Denn die Normalebenen $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ zu einer der Halbierungsebenen $\mathbf{H}_1$ bez. $\mathbf{H}_2$ sind mit den in diesen Ebenen liegenden und zu ihnen parallelen Geraden die zu den Ebenen $\mathbf{E}_1$,



$\mathbf{E}_2$ selbst Gleichgeneigten. Da sie auch zu allen ihren Parallelebenen gleichgeneigt sein müssen, so sagen wir: Die gleichwinkligen Ebenen zu zwei festen Stellungen enthalten eine von zwei festen Richtungen, nämlich der Normalen zu den Halbierungsebenen ihrer Winkel. Die Richtungen der zu zwei festen Stellungen gleichwinkligen Geraden sind in den halbierenden Stellungen ihrer Winkel enthalten.

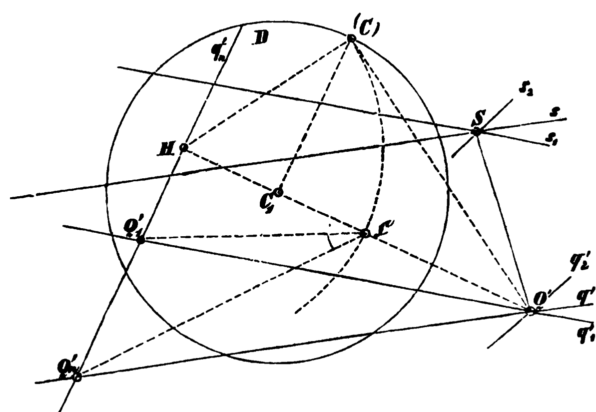
10) Nach dem Vorigen konstruiert man leicht die beiden Ebenen durch eine gegebene Gerade, die mit zwei gegebenen $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ gleiche Winkel bilden — als die durch sie gehenden Normalebenen $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ zu den Halbierenden $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$. Sind drei Ebenen $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ gegeben, die nicht durch eine Gerade gehen, so schneiden sich die Halbierenden ihrer Winkel $\mathbf{H}_{11}$, $\mathbf{H}_{12}$, etc. viermal zu dreien in einer Geraden aus der Spitze des Dreiflachs und die vier Normalebenen aus einem Punkte zu diesen vier Geraden sind die vier zu den drei gegebenen gleichwinkligen Ebenen.

11) Man soll zu zwei gegebenen windschiefen Geraden S_1Q_1', S_2Q_2' aus einem Punkte A der ersten diejenigen Transversalen ziehen, welche mit ihnen gleiche Winkel bilden. Das Prinzip von der Verlegung der Winkelgrößen an das Projektionszentrum lehrt sofort, daß die Parallelstrahlen der gesuchten Transversalen in den beiden Normalebenen der projizierenden Ebene $CQ_1'Q_2'$ liegen, welche durch die Halbierungslinien des Winkels $Q_1'CQ_2'$ gehen, und somit die Fluchtpunkte der Transversalen in den beiden Geraden enthalten sind, in welchen diese Ebenen die Tafel schneiden. Da aber der Punkt A mit der Geraden S_2Q_2' eine Ebene bestimmt, so liegen die Fluchtpunkte des gesuchten Paares von Transversalen auch in der Fluchtlinie dieser Ebene, und sind somit bestimmt, mit ihnen die Transversalen selbst. Man hat also $\angle Q_1'CQ_2'$ in $Q_1'\mathfrak{C}Q_2'$ in wahrer Größe darzustellen, die Fluchtpunkte der Halbierenden einzutragen und sie mit dem Normalenfluchtpunkte der projizierenden Ebene $CQ_1'Q_2'$ zu verbinden; etc.

Hierin liegt der Satz: Die Richtungen der gleichwinkligen Geraden zu zwei gegebenen liegen in zwei festen Stellungen, nämlich in denen der Normalebenen durch die Halbierenden h_1, h_2 ihrer Winkel zu der sie verbindenden Stellung. Dazu tritt der Satz (vergl. den Schluß von 9): Die Stellungen der gleichwinkligen Ebenen zu zwei Richtungen enthalten die zwei festen Richtungen der Halbierenden h_1, h_2. Die Forderung der Gleichwinkligkeit zu einem ersten Paare und zugleich zu einem zweiten Paare von Ebenen bez. Geraden bestimmt also vier Stellungen von Ebenen. Und die Forderung der Gleichwinkligkeit zu zwei Paaren von Geraden bestimmt vier Richtungen von Geraden. Wie für die Gleichwinkligkeit zu zwei Ebenen und zugleich zu zwei Geraden?

Man sieht, daß die Aufgabe auch dann ebenso gelöst wird,

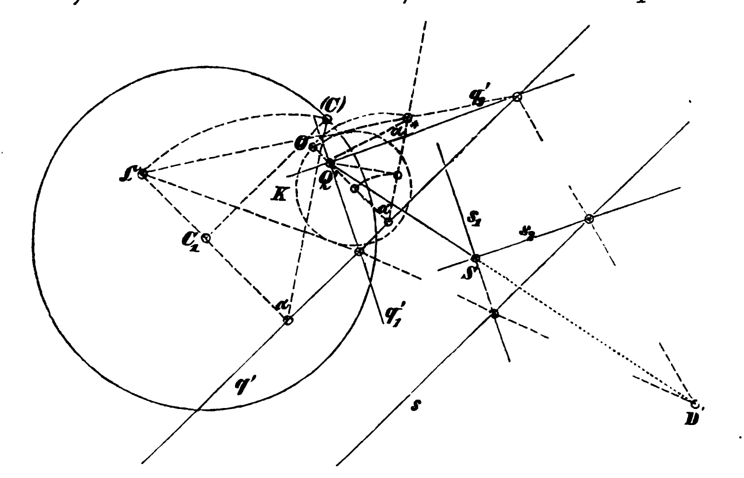
wenn verlangt ist, die gleichgeneigten Transversalen von $S_1 Q_1'$ und $S_2 Q_2'$ zu bestimmen, welche in einer bestimmten durch $S_1 Q'_1$ gehenden Ebene liegen; oder wenn sie einer gegebenen Ebene parallel sein sollen, etc.



12) Man bestimme die Ebenen, die mit zwei festen Ebenen gleiche Winkel und mit der Bildebene einen vorgeschriebenen Winkel bilden, bez. den größten oder kleinsten.

13) Man bestimme die Geraden, die zu zwei gegebenen gleichwinklig liegen und zu einer dritten normal sind oder mit ihr vorgeschriebenen Winkel bilden.

14) Eine Ebene zu konstruieren, welche zur Ebene sq' normal



ist, die Tafelneigung $\alpha = 40^0$ hat und den Verschwindungspunkt R einer gegebenen Geraden SQ' enthält.

Das erste gibt einen Punkt ihrer Fluchtlinie, das zweite den von ihr berührten Neigungskreis, das dritte ihre Bildbreite.

15) Man lege durch die in der Ebene sq' enthaltene Gerade SQ' die beiden Ebenen, welche mit jener den Winkel von 25^0 bilden. (Figur S. 40 oben) Die projizierende Normalebene zu SQ', d. h. die Ebene des gegebenen Winkels, Cq_n' schneidet die zu sq' parallele projizierende Ebene in der in $\mathfrak{C}Q_n'$ umgelegten Geraden und daher die zur gesuchten parallele projizierende Ebene in einer Geraden $\mathfrak{C}Q_1'$ (bez. $\mathfrak{C}Q_2'$), die mit jener den gegebenen Winkel einschließt. Ihr Fluchtpunkt bestimmt die Fluchtlinie der gesuchten Ebene. Man füge zu der in der Figur enthaltenen ersten Lösung die zweite hinzu.

16) Man soll diejenigen durch eine Gerade SQ' gehenden Ebenen bestimmen, welche mit einer dieselbe schneidenden Ebene sq' den Winkel $\alpha^* = 54^0$ einschließen — indem man mit den Fluchtelementen konstruiert. Figur S. 40 unten enthält die Lösung. Vom Fluchtpunkte Q' der Geraden ist auf die zu sq' parallele projizierende Ebene Cq' die Normale gefällt und ihr Fußpunkt mit derselben in die Tafel umgelegt; er ist Mittelpunkt eines Kreises K, dessen Radius mit der wahren Länge der Normale die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem an ihm anliegenden Winkel α^* bildet. Die vom Zentrum C an diesen Kreis gehenden Tangenten — die in der Umlegung aus dem mit Cq' umgelegten Zentrum $\mathfrak{C}$ gezogen sind, sind die Schnittlinien der durch C gehenden Parallelen zu den gesuchten Ebenen mit Cq', und ihre Schnittpunkte mit q' daher Punkte ihrer Fluchtlinien, welche mit Q' sie, d. h. q_1', q_2' bestimmen; durch S ihnen parallel gehen s_1, s_2.

Natürlich kann der Fußpunkt der Normale von Q' auf Cq' auch mittelst des Normalenfluchtpunktes von q' bestimmt werden; etc.

17) Man bestimme insbesondere den kleinsten Winkel φ, für den die Lösung noch möglich ist, d. h. den Neigungswinkel der Geraden gegen die gegebene Ebene. Der Kreis K geht durch $\mathfrak{C}$ und sein Radius bestimmt mit der Länge der Normale den fraglichen Winkel. Wie vereinfacht sich die Konstruktion, wenn sq' normal zur Tafel ist?

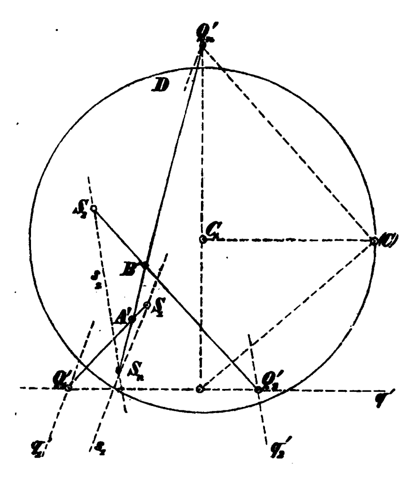
18) Zu zwei windschiefen Geraden S_1Q_1', S_2Q_2' diejenigen Transversalen zu ziehen, welche mit der ersten den Winkel a und mit der zweiten den Winkel b einschließen.

Man konstruiert die dreiseitigen Ecken vom Scheitel C aus $Q_1'CQ_2'$ als Kantenwinkel und a, b als den an $Q_1'C$, $Q_2'C$ anliegenden andern Kantenwinkeln; die Fußpunkte ihrer neuen Kanten in der Tafel sind die Fluchtpunkte der möglichen Transversalen, welche dann nach § 8, 8 gefunden werden.

19) Man bestimme eine Gerade aus ihrem Bilde, einem ihrer Punkte z. B. dem Durchstoßpunkt und ihrem Neigungswinkel φ gegen eine gegebene Ebene sq'. Die Mantellinien, welche die projizierende Ebene der Geraden aus dem projizierenden Kegel mit der Neigung φ gegen die Ebene sq' ausschneidet, sind die Parallel-

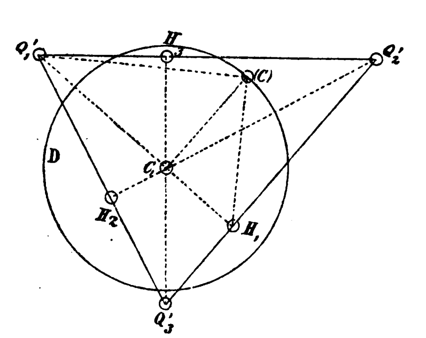
strahlen der gesuchten Geraden. Man wird also ähnlich wie in 16) verfahren, jedoch den Kegel am Zentrum C bilden.

20) Man projiziere und bestimme die kürzeste Entfernung AB von zwei nicht in einerlei Ebene gelegenen Geraden $S_1 Q_1'$, $S_2 Q_2'$ — als Durchschnittlinie SQ' der die beiden Geraden enthaltenden Normalebenen $s_1 q_1'$, $s_2 q_2'$ zu der projizierenden Ebene $CQ_1'Q_2'$, die zu beiden Geraden parallel ist; was bleibt zur nebenstehenden Figur hinzuzufügen? Die Größe der Entfernung AB wird auch als der normale Abstand der parallelen Ebenen von der Fluchtlinie $Q_1'Q_2'$ erhalten, deren Spuren durch S_1 resp. S_2 gehen. (Siehe § 5, 8.) Ist also eine Gerade einer Ebene parallel, so ist sie äquidistant von allen Geraden in dieser Ebene, die ihr nicht parallel sind. Für zwei Gerade in parallelen Normalebenen zur Tafel ist sie gleich dem Abstand der Spuren dieser Ebenen.



Konstruiere die kürzeste Entfernung a) für zwei Gerade, von denen die eine parallel, die andere normal zur Tafel ist; und b) für eine beliebige Gerade und einen projizierenden Strahl.

21) Wenn drei projizierende Linien oder Ebenen eine trirektanguläre Ecke bilden, so sind ihre Spuren in der Bildebene die Ecken oder Seiten eines Dreiecks (bei dem Würfel des § 7, 4 ist es gleichseitig), welches den Hauptpunkt zum Höhenschnittpunkt hat und das Rechteck der Höhenabschnitte gleich dem Quadrate der Distanz (nebenstehende Figur).



Man projiziere ein rektanguläres Parallelepiped oder einen Würfel (von gegebener Kantenlänge) aus den Fluchtpunkten von drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten, den Längen derselben und dem Bilde nebst der Tafelordinate der entsprechenden Ecke. Das besagte Dreieck ist wesentlich spitzwinklig, weil jede Ecke mit dem Fußpunkt der zugehörigen Höhe in der Gegenseite am Zentrum einen rechten Winkel bestimmen muß.

Man kann also zu den typischen Bildern eines Parallelepipeds § 8, 11 das Zentrum der Projektion im allgemeinen so bestimmen, daß sie Bilder rechtwinkliger Parallelepipede sind — nämlich immer dann, wenn das Dreieck der Fluchtpunkte der drei Kantengruppen spitzwinklig ist.

22) Man stelle eine Zerschneidung des Raumes in kongruente Würfel dar; insbesondere die Reihe derjenigen unter ihnen, welche mit dem das Auge umschließenden eine Körperdiagonale gemeinsam haben.

23) Man bestimme die von zwei Punkten A, B auf $S_1 Q_1'$, bez. $S_2 Q_2'$ gleich entfernte Gerade und den von drei Punkten A, B, C gleich entfernten Punkt in der Ebene **E** oder sq'.

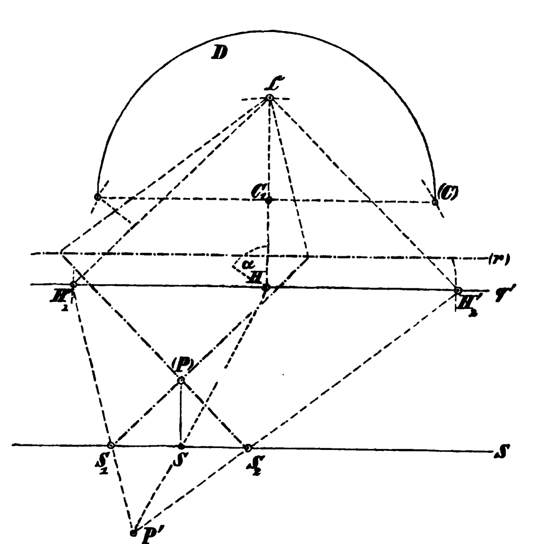
24) Man bestimme den Mittelpunkt M der durch vier gegebene Punkte gehenden Kugelfläche. Oder die Mittelpunkte und Radien der acht Kugeln, welche vier gegebene Ebenen berühren. (Vergl. § 58, 9, 10* mit Tafel II Mitte.)

11. Im Vorhergehenden ist offenbar zugleich die Umlegung einer Ebene in die Bildebene d. i. die Darstellung der wahren Größe und Gestalt ebener Figuren und Systeme aus ihren Projektionen enthalten. Denn jede gerade Linie der Ebene sq' wird so umgelegt wie $S_1 Q_1'$ oder g_1' in $S_1(R_1)$ oder (g_1) in Figur S. 34 (§ 9.), und jeder Punkt derselben somit als der Durchschnitt von zwei Geraden in der Ebene, sowie P durch g_1 und g_2. Sind diese Geraden nicht gegeben, so kann man als eine solche die Falllinie der Ebene sq' d. i. die in HP' projizierte Gerade benutzen, welche zur Spur s rechtwinklig ist und sich daher in der Umlegung in eine Normale zu derselben aus ihrem Durchstoßpunkt S verwandelt; ebenso können die Geraden benutzt werden, welche in $H_1'P'$, $H_2'P'$ projiziert sind, wo $HH_1' = HC = H\mathfrak{C} = HH_2'$ ist (Figur S. 44), Gerade, die sich in der Umlegung in solche verwandeln, die unter 45° gegen die Spur geneigt von ihren respektiven Durchstoßpunkten S_1, S_2 ausgehen und sich daher in (P) rechtwinklig durchschneiden, womit auch $S(P) = SS_1 = SS_2$ ist. Die Punkte H_1', H_2' sind die Haupt-Teilungspunkte der Ebene (§ 7.). Hat man die Linie (r) der Ebene, so liefern die Parallelen aus C zu den Projektionen g_i' auf ihr die (R_i) derselben und die Verbindung mit dem entsprechenden S_i gibt die umgelegte Gerade (g_i). Endlich dient auch der Strahl $\mathfrak{C}P'$ zur Bestimmung von (P). (S. 34).

Umgekehrt vollzieht man durch die nämliche Konstruktion den Übergang von der Umlegung zur Projektion, den wir als

die **Aufrichtung** oder **Aufstellung** der **Ebene** bezeichnen wollen. Ist (P) ein Punkt der Ebene sq' in der Umlegung, so wird das umgelegte Zentrum $\mathfrak{C}$ bestimmt und (r) aufgetragen; zieht man dann durch (P) eine Gerade (g), so liegt in s ihr Durchstoßpunkt S, in (r) die Umlegung (R) ihres Verschwindungspunktes und in dem zu ihr parallelen Strahl aus dem umgelegten Zentrum $\mathfrak{C}$ auf q' ihr Fluchtpunkt Q'. Nun ist das Bild g' die Linie SQ' und zugleich parallel mit $\mathfrak{C}(R)$. Die Linien unter 45^0 und unter 90^0 durch (P) zu s führen auf die Punkte H_1', H_2', H in q' und auf analoge in (r); endlich liefert die Gerade $\mathfrak{C}(P)$ ein weiteres Hilfsmittel der Bestimmung.

Da in der Figur S. 34 die Winkel $(C)H\mathfrak{C}$ und $(C)H\mathfrak{C}^*$ bez. gleich α und $180^0 - \alpha$ und die Geraden von (C) nach $\mathfrak{C}^*$ bez. $\mathfrak{C}$ zu ihren Halbierenden parallel sind, so sind auch die durch die umgelegten Zentra $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$ einer Ebene sq' gehenden Parallelen zur Spur, also q'_{HII} und q'_{HI} die Fluchtlinien der Halbierungsebenen der von ihr mit der Tafel gebildeten Winkel $180^0 - \alpha$ und α.



Ist bei vertikaler Bildebene die Ebene horizontal, so ist q' die Horizontale durch den Hauptpunkt und $\mathfrak{C}$ ein Endpunkt des darauf normalen Durchmessers; es sind H_1', H_2' die Endpunkte des in q' liegenden Distanzkreisdurchmessers und sowohl die Fluchtpunkte der horizontalen unter 45^0 zur Tafel geneigten als die Teilungspunkte der zur Tafel normalen; man nennt q' den **Horizont** und H_1', H_2' die **Distanzpunkte**. Mit ihnen sind die Bilder beliebiger Figuren in horizontalen Ebenen oder die wahren Gestalten derselben aus ihren Bildern leicht abzuleiten. Und weil die Normalen zu den horizontalen Ebenen zur Tafel

parallel sind und als vertikale Linien erscheinen, deren wahre Längen zwischen den Durchstoßpunkten paralleler Horizontalen durch ihre Endpunkte erhalten werden, so erhält man leicht die Zentralprojektion eines Objekts aus der Horizontalprojektion und den zugehörigen Höhen seiner Punkte. Diese Bestimmung derselben ist nicht ganz so bequem, wie die in § 7 begründete aus der Orthogonalprojektion auf die Tafel und den zugehörigen Distanzen von dieser; aber sie wird nach dem häufigen Vorkommen der horizontalen Ebenen und vertikalen Geraden an den Objekten doch von häufiger Verwendung sein und namentlich beim perspektivischen Skizzieren derselben nach der Anschauung und nach Maßbestimmungen den hauptsächlichen Leitfaden bilden; man wird zur Übung etwa die Beispiele 3, 4 des § 9. für eine Horizontalebene durchführen und einfache Gebäudeformen darstellen.

Wenn die Ebene der Figur zur Bildebene parallel ist, so liefern die Fußpunkte (A), (B), ... der von ihren Ecken A, B, ... auf die Bildebene gezogenen Parallelen zu einer festen Geraden CQ' die Ecken einer ihr kongruenten Figur, und die der Normalen zur Bildebene insbesondere die Ecken derjenigen Figur, welche als ihre Umlegung zu betrachten ist.

Die Figur ist durch die Bilder A', B', ... ihrer Ecken und eine Gerade $S_1 Q_1'$, welche die erste derselben enthält, bestimmt; der Fluchtpunkt Q' der gedachten Richtung bestimmt dann (A) als den Durchstoßpunkt der Geraden aus A' mit dem Fluchtpunkt Q'; und da das Teilverhältnis von $Q'A' : A'(A)$ dem andern $Q_1'A' : A'S_1$ und damit dem entsprechenden aller durch B, etc. gehenden Geraden gleich ist, so bilden die (A), (B), ... eine zu der von A' B', ... gebildeten ähnliche und ähnlich gelegene Figur mit Q' als Ähnlichkeitspunkt. Da der von C bei der Umlegung in die Tafel mit Cq' beschriebene Kreis in die Normale CC_1 übergeht, so erscheint C_1 als das umgelegte Zentrum und die mit C_1 als Ähnlichkeitspunkt und als Q' in der vorigen Art konstruierte Figur als die Umlegung der gegebenen. (Vergl. auch § 14, 4—6 zur Begründung.)

) Die Umlegung der Ebene in die Tafel bei der allgemeinen Zentralprojektion des § 6 geschieht nach dem Übergang zur Fluchtlinie q' der Ebene su' wie vorher und ebenso die Aufrichtung nach Eintragung des (r).

B. 1) Man lege den in einer bestimmten projizierenden Ebene Cq' gelegenen Punkt P einer Geraden SQ' mit jener in die Tafel um — indem man eine SQ' schneidende Gerade $S_1 Q_1'$ in Cq' benutzt.

2) Von einem regulären n Eck sind zwei Nachbar- oder Gegenecken durch die Fußpunkte und Längen ihrer Tafelnormalen gegeben, und seine Ebene hat die Tafelneigung $\alpha = 60^0$; man bestimme seine Projektion aus seiner Umlegung in die Tafel.

3) Man projiziere ein Parallelepiped aus der Ebene einer Fläche, den Bildern einer Ecke und Kante in derselben, dem entsprechenden Kantenwinkel, den Flächenwinkeln, die die an seinen Schenkeln benachbarten Flächen mit der ersten bilden, und den Kantenlängen. (Antragung der Flächenwinkel nach B. 15), § 10, Figur S. 40 oben.)

4) Man stelle die Zerschneidung des Raumes dar, die durch die Schichtung gleicher Parallelepipeda entsteht, indem man die Teilungspunkte der drei Kanten so benutzt, wie in § 9, 3 die Teilungspunkte der Seiten oder Diagonalen benutzt werden.

5) Man soll für ein Rhombendodekaeder, von dem zwei der drei zueinander rechtwinkligen gleichlangen Hauptdiagonalen zwischen seinen drei Paaren vierseitiger Ecken in der Tafel liegen, aus den Endpunkten derselben das Bild ableiten, mittelst der Fluchtpunkte der vier Sechsergruppen der Kanten. Man klappe zwei seiner Flächen, eine der zur Tafel normalen und eine der von 45^0 Neigung um und bilde das Netz der Oberfläche.

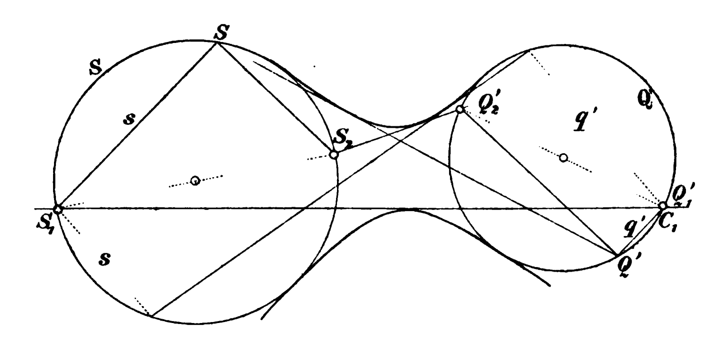
Interpretation der Figur für das Achsenkreuz als in gegebener Distanz hinter der Tafel.

6) Zu zwei sich schneidenden Geraden denke man diejenigen andern konstruiert, deren jede mit ihnen zwei rechtwinklige Ebenen bestimmt. Da zu jeder Ebene durch die erste Gerade eine Normalebene durch die zweite geht, so erhält man auf jeder dieser Ebenen eine der gesuchten Linien und die Gesamtheit derselben bildet somit eine Folge von unendlich vielen Geraden durch einen Punkt, die man als K e g e l f l ä c h e bezeichnet. Sind die gegebenen Geraden parallel, so wird der Kegel ein Zylinder, und man erhält in der gemeinsamen Normalebene derselben die geforderten rechten Winkel als Winkel der durch die Fußpunkte der festen Geraden in ihr gehenden Spuren der Ebenen; man erkennt daraus, daß der entstehende Z y l i n d e r den Kreis über der Verbindungslinie jener Fußpunkte als Durchmesser zum Querschnitt in ihr hat.

Wir denken nun zur Behandlung der a l l g e m e i n e n Frage a) den Schnittpunkt der gegebenen Geraden als Projektionszentrum C und die Bildebene normal zu der einen von ihnen, welche wir also durch CC_1 bezeichnen; ist dann A' der Fußpunkt der andern Geraden CA' in der Tafel, so ist eine beliebige durch A' gezogene Gerade die Spur und Fluchtlinie einer durch CA' gehenden Ebene und offen-

bar das von C_1 zu ihr gezogene Perpendikel die Spur und Fluchtlinie der zu ihr normalen Ebene durch CC_1; d. h. der Ort der Schnitte dieser Perpendikel oder der über der Geraden C_1A' als Durchmesser beschriebene Kreis ist der Querschnitt des entstehenden Kegels mit der Tafel. Nimmt man die Tafel normal zu CA', so erhält man dasselbe Resultat für den zu CA' normalen Querschnitt. Man bildet also den Kegel aus seinen zwei Systemen kreisförmiger Querschnitte wie folgt: In den Normalebenen der ersten und denen der zweiten festen Geraden beschreibt man sie über den Verbindungslinien ihrer Schnittpunkte mit beiden als Durchmessern.

In der beschriebenen Darstellung ist der Kreis über C_1A' als Durchmesser zugleich das Bild K' des Querschnittes, den eine beliebige Normalebene zu CA' mit dem Kegel macht, eine Ebene also, die etwa den zu C_1A' senkrechten Distanzkreisdurchmesser zur Spur s und die dem Punkt A' als Fluchtpunkt entsprechende



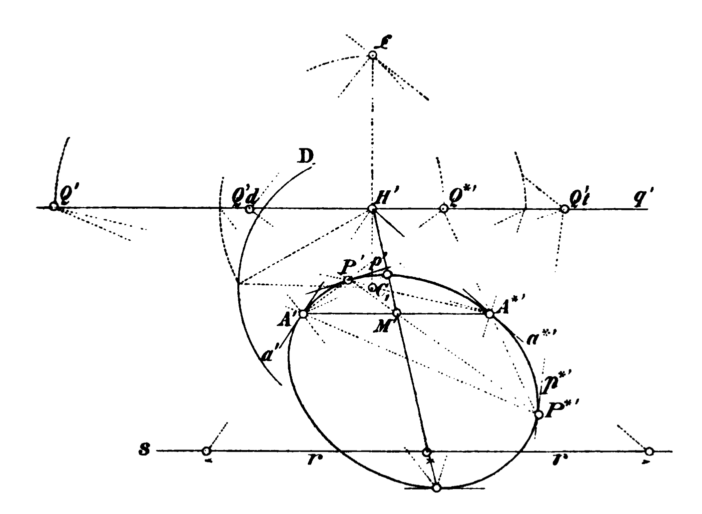
Fluchtlinie der Normalebene zur Fluchtlinie q' hat. Man sieht, für das Kollineationszentrum $\mathfrak{C}$ dieser Ebene mit s und q' als Kollineationsachse und als Gegenachse muß die entsprechende Figur zum Basiskreis K' wieder ein Kreis (K) sein; oder wenn zwei durch C_1 und A' gehende zueinander senkrechte Gerade C_1P' und $A'P'$ die Spur s in C_1 und S_2 und q' in Q_1' und Q_2' schneiden, so müssen $\mathfrak{C}Q_1'$ und $\mathfrak{C}Q_2'$ senkrecht aufeinander sein und ihre Parallelen durch C_1 und S_2 sich in (P) auf (K) schneiden.

Wenn endlich b) die beiden festen Geraden sich kreuzen statt sich zu schneiden, so gibt es zu jeder durch die eine gehenden Ebene noch immer eine normale Ebene durch die andere und jedes dieser Paare liefert nach wie vor eine Durchschnittsgerade; aber die Gesamtheit dieser Schnittlinien bildet keine Kegelfläche mehr, sondern eine windschiefe geradlinige Fläche, die man als einfaches Hyperboloid benennt.

Nimmt man die Bildebene normal zu einer der Geraden S_1Q_1', sodaß diese ihren Fluchtpunkt im Hauptpunkt C_1 hat, so gibt jedes Paar von Parallelen s_1, q_1, durch S_1 bez. C_1 mit dem Paar

ihrer Normalen durch S_2, Q_2' eines der geforderten Ebenenpaare und damit den Durchstoß- und Fluchtpunkt S, Q' der zugehörigen Geraden der Fläche. Und wie vorher ist der Ort des S, der über der Strecke $S_1 S_2$ als Durchmesser beschriebene Kreis **S**, der Schnitt der Fläche mit der Bildebene, und der Ort **Q**$'$ der Q' der über der Strecke $C_1 Q_2'$ als Durchmesser beschriebene Kreis, das Bild des Querschnittes der Fläche mit der unendlich fernen Ebene. Und offenbar sind auch alle ihre Querschnitte mit zur Tafel parallelen Ebenen und ebenso alle Querschnitte mit zu $S_2 Q_2'$ normalen Ebenen Kreise, jeweilen mit der Strecke als Durchmesser, die die Schnittpunkte mit beiden Geraden begrenzen.

7) Der im vorigen gebrauchte Satz, daß der Ort der Schnitt-



punkte von zwei stets zueinander rechtwinkligen Geraden, die sich um feste Punkte in derselben Ebene drehen, ein Kreis ist, gibt sofort auch die allgemeine Zentralprojektion des Kreises aus seiner Ebene sq', dem Bilde seines Mittelpunktes M' und der wahren Größe seines Radius r.

Wir denken die Endpunkte des zur Tafel parallelen Durchmessers AA^* als die Drehpunkte der Geraden und bestimmen zuerst ihre Bilder A', $A^{*\prime}$, indem wir sie mit irgend einem Punkte der Fluchtlinie q' z. B. H' verbunden denken und bemerken, daß $H'A'$, $H'M$ und $H'A^{*\prime}$ äquidistante Parallelen darstellen, die auf der Spur die wahre Länge der Strecken $A'M' = M'A^{*\prime} = r$ ausschneiden müssen. Weil nun das mit der Ebene Cq' umgelegte Zentrum $\mathfrak{C}$ in C_1H' liegt, so sind die Geraden $A'H'$, $A^{*\prime}H'$ zugleich die Bilder der Tangenten a, a^* des Kreises in A resp. A^*. Ferner werden die Schnittpunkte der beiden Schenkel eines rechten Winkels am Scheitel $\mathfrak{C}$ auf q' die Fluchtpunkte Q', $Q^{*\prime}$ eines oder vielmehr zweier

rechtwinkligen Linienpaare aus A, A^* sein, sodaß $A'Q'$, $A^{*\prime}Q^{*\prime}$ und wieder $A'Q^{*\prime}$, $A^{*\prime}Q'$ die Bilder derselben und damit ihre bez. Schnittpunkte P', $P^{*\prime}$ die Bilder der neuen Ecken P, P^* eines dem Kreis eingeschriebenen Rechteckes mit A, A^* als festen Gegenecken und somit die Enden eines Durchmessers d werden, der in $P'P^{*\prime}$ projiziert ist. Bis q' verlängert gibt $P'P^{*\prime}$ seinen Fluchtpunkt Q_d' und man erhält in dem zweiten Schenkel des rechten Winkels $Q_d'\mathfrak{C}Q_t'$ den Fluchtpunkt Q_t' der zugehörigen Tangenten, also ihre Bilder $P'Q_t'$, $P^{*\prime}Q_t'$. Umgekehrt erhält man aus dem gegebenen Fluchtpunkt Q_t' eines Tangentenpaares im rechten Winkel aus $\mathfrak{C}$ den Fluchtpunkt Q_d' des Durchmessers, der ihre Berührungspunkte verbindet, und durch die Parallelen aus $\mathfrak{C}$ zu den Halbierenden der Winkel bei Q_d' auf q' die Fluchtpunkte Q', $Q^{*\prime}$, durch deren Verbindung mit A', $A^{*\prime}$ man die Bilder der zugehörigen Berührungspunkte findet; denn für $\angle PAA^* = \beta$ ist $\angle PMA^* = 2\beta$. Insbesondere liefern die Distanzpunkte auf q' die Endpunkte des Bildes vom Durchmesser in $H'M'$ mit zu q' parallelen Tangenten.

8) Nach 7) wird man leicht bei vertikaler Bildebene einen horizontal abgeschnittenen Rotationszylinder mit vertikaler Achse vollständig projizieren, eventuell mit Angabe seiner Schattengrenzen und dem Schlagschatten auf die horizontale Basisebene oder eine andere Ebene. Die Horizontale durch C_1 ist dann q' und zwei um die Höhe des Zylinders von einander entfernte Parallelen zu ihr sind die Spuren s, s^* der begrenzenden Normalschnittebenen. Die Endpunkte der Bilder der zur Tafel parallelen Durchmesser $A'A^{*\prime}$ unten und oben liegen in Paaren in den Bildern der zugehörigen Mantellinien; jedes Paar von Fluchtpunkten Q', Q^* in 7) liefert Punkte P', $P^{*\prime}$ des unteren und obern Normalschnittes in parallelen Durchmessern und also in den nämlichen zwei Mantellinien, und derselbe Fluchtpunkt Q_t' die zugehörigen Tangenten. Die Vertikale durch den Fluchtpunkt Q_t' der Lichtstrahlen liefert auf q' den Fluchtpunkt der geraden Schlagschattengrenzen auf der Basisebene etc.

12. Nach dem Vorhergehenden sind alle Aufgaben der darstellenden Geometrie über die Elementarformen **theoretisch** lösbar, nämlich unter Voraussetzung einer unbegrenzten Zeichnungsebene, unter Voraussetzung geometrischer Genauigkeit auch bei schleifenden Schnitten, etc. und überdies abgesehen von den in der Kleinheit der Konstruktionsteile etc. auftretenden Hindernissen der graphischen Durchführung. Für **die wirkliche graphische Ausführung**, wo weder jene Voraussetzungen gelten, noch sich von diesen Hindernissen absehen läßt, wird die Möglichkeit der konstruktiven Lösungen durch **Transformation** gesichert, d. h. durch **zweckentsprechende Lagenveränderungen des Zentrums**, der

Bildebene oder des Objekts — denn durch solche lassen sich jene Schwierigkeiten heben.

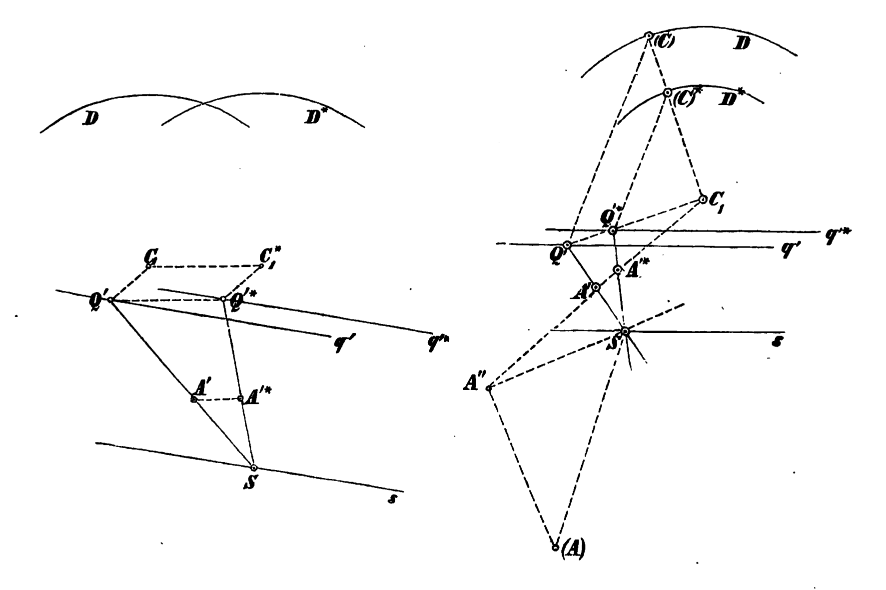
Man kann das Zentrum der Projektion nach jedem Punkte des Raumes verlegen und die Bildebene oder eine beliebige Ebene des Objekts mit einer bestimmten Ebene zusammenfallen machen, indem man gleichzeitig über einen Punkt und eine ihn enthaltende Gerade in derselben verfügt. Jede Verlegung des Zentrums läßt sich aus einer Verrückung desselben in der Verschwindungsebene und einer solchen in der Normale zur Tafel zusammensetzen; in analoge Komponenten zerlegen sich auch alle Parallelverschiebungen der Bildebene und des Objekts. Die Drehungen der Bildebene und des Objekts kommen im wesentlichen auf den im vorigen § erklärten Vorgang der Umlegung hinaus und erfordern keine weitere Erörterung.

Bei den Transformationen des Zentrums bleiben alle Durchgangselemente ungeändert, während das neue System der Fluchtelemente dem ursprünglichen kongruent und gleichgelegen ist im Falle der Verschiebung in der Verschwindungsebene oder bei unveränderter Distanz; ähnlich und ähnlich gelegen mit C_1 als Ähnlichkeitspunkt aber im Falle der Verschiebung des Zentrums in der Tafelnormale. Im ersten Falle (Figur links auf S. 51) wiederholen der Hauptpunkt C_1 und alle Fluchtpunkte nach Größe und Richtung einfach die Verschiebung des Zentrums von C nach C^*; das Bild A' eines Punktes in einer gegebenen Geraden g' verschiebt sich in der gleichen Richtung in das transformierte Bild g'^* der Geraden; projizierende Gerade verwandeln sich in solche, deren Bildlänge der Verschiebungsgröße gleich ist.

Im zweiten Falle (Figur rechts auf S. 51) verschiebt sich jeder Fluchtpunkt in der Geraden, die ihn mit dem Hauptpunkt verbindet und zwar um einen Betrag, der in einem rechtwinkligen Dreieck als zweite Kathete erhalten wird, welches die Tafelneigung β des zugehörigen projizierenden Strahles zum anliegenden Winkel und die Größe der Verschiebung δ des Zentrums zur andern Kathete hat; endlich nach dem Hauptpunkt hin oder von demselben weg, je nachdem das Zentrum sich der Bildebene nähert oder von derselben wegrückt. Das Bild eines Punktes rückt in der Geraden fort, welche von ihm nach dem Hauptpunkte geht.

Wenn wir unter Perspektive die Anwendung der Zentral-

projektion auf das für ein menschliche Auge Sichtbare verstehen, so liegt darin in erster Linie eine wesentliche Einschränkung ihres Bereichs. Wir haben eine vertikale Bild- und Zeichnungsebene entsprechend und im Augenblick der Betrachtung parallel zu der Netzhautstelle, auf der das Gesichtsbild erzeugt wird; die Normale vom Zentrum zu ihr nennen wir die Sehachse CC_1. Nun erstreckt sich unser deutliches Sehen auf nicht mehr als etwa 20° Abweichung von der Sehachse nach der Lage des optischen Zentrums im Auge gegen das Diaphragma der Pupille; d. h. das Sichtbare ist auf den Teil



des Raumes vor dem Auge und innerhalb eines geraden Kreiskegels mit seinem optischen Mittelpunkt als Spitze beschränkt, dessen Mantellinien den Winkel von 20° mit der Sehachse bilden. Wir können statt dessen sagen, daß die vom Hauptpunkt C_1 entferntesten Punkte einer zentralprojektivischen Darstellung nicht über den Neigungskreis von $\alpha = \beta = 70°$ hinausfallen dürfen, wenn sie als richtige Nachkonstruktion eines Gesichtsbildes sollen aufgefaßt werden können; oder auch, daß dazu die Distanz d etwa das Dreifache jener größten Entfernung betragen müsse.

Man sieht daraus, daß in der Regel nicht mit ganzer

Distanz gearbeitet werden kann, wenn die zentralprojektivische Darstellung die höchste Bildlichkeit erreichen soll, die wir durch die Anerkennung einer guten resp. schönen Perspektive auszeichnen. Die Arbeit mit einem Bruchteil der Distanz wie in B. 7) wird zumeist nötig sein. (Vergl. auch § 7.)

Wir heben aber für die perspektivische Praxis noch hervor, wie unmittelbar bei der Bestimmung der Zentralprojection aus den Tafelabständen y der Punkte und den Fußpunkten der entsprechenden Perpendikel zur Tafel in § 7 die Arbeit mit Bruchteilen der Distanz sich vollzieht.

B. 1) Man macht eine Gerade SQ' zur projizierenden Linie, indem man das Zentrum C nach ihrem Verschwindungspunkte R verlegt; die Größe $Q'S$ gibt Größe und Sinn der Verschiebung. (§ 3).

2. Man ziehe zu einer Geraden in gegebener Ebene, deren Fluchtpunkt unzugänglich ist, Parallelen von gegebenen Durchstoßpunkten — oder allgemeiner durch gegebene Punkte der Ebene — mittelst Verlegung ihres Fluchtpunktes in einen andern Punkt ihrer Fluchtlinie.

3) Man vergrößere die Entfernung einer Ebene vom Zentrum durch Verschiebung desselben in der Verschwindungsebene auf das Dreifache, um das Bild einer in ihr gelegenen Figur deutlicher zu erhalten.

4) Man leite aus dem Bilde einer Raumfigur, welches dem Zentrum im rechten Auge entspricht, das Bild derselben für das im linken Auge gedachte Zentrum ab, bei unveränderter Distanz. Dies enthält die Konstruktion stereoskopischer Bilder.

5) Bei der Transformation durch reduzierte Distanz, d. i. Verschiebung des Zentrums in der Tafelnormale, bleiben die Bestimmungen von Normalen und Normalebenen zur Tafel unverändert.

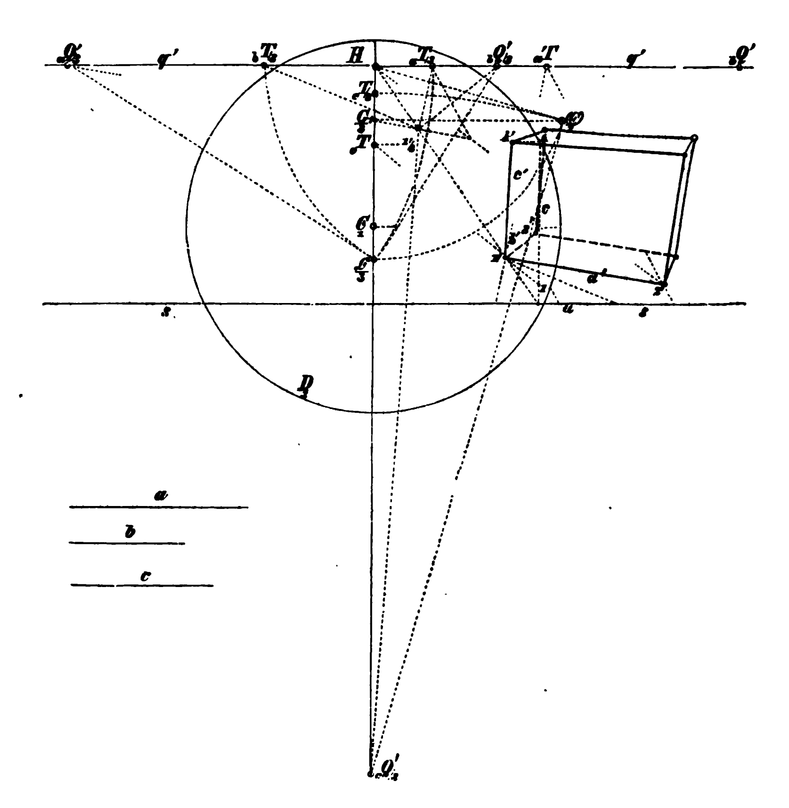
6) Welche Hilfsmittel gibt die Transformation durch reduzierte Distanz für das Umlegen und Aufrichten ebener Systeme, a) bei zur Bildebene normaler, b) bei schräger Ebene?

Man zeichne mit Benutzung derselben ein Quadrat über gegebener Seite in schräger Ebene und den entsprechenden Würfel.

7) Die Darstellung von Punkten mittelst ihrer rechtwinkligen Coodinaten in Bezug auf drei Achsen x, y, z in allgemeiner Lage soll mit Benutzung der reduzierten Distanz ausgeführt werden.

Wenn wir die Coordinaten a, b, c eines Punktes P als die in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten 12, 13, 14 eines rectangulären Parallelepipedums ansehen, so kommt die Aufgabe auf die Darstellung dieses Parallelepipeds resp. seiner zu 1 gegenüberliegenden Ecke P hinaus. In Figur auf S. 53 ist sie für ein Drittel der

Distanz bei gegebener Ebene sq' der Fläche ab oder 1 2 3, gegebener Ecke 1 und Richtung der Kante b in derselben ausgeführt. Die benutzte Transformation ist die Verschiebung des Zentrums in der Falllinie der Ebene sq' zur Tafel bis zur Distanz $^1|_3 d$ d. h. des Hauptpunktes von C_1 nach $C_1/3$. Mittelst der Länge $^1/_3 d$ ist dann der Neigungswinkel α der Ebene sq', das mit seiner Ebene umgelegte reduzierte Zentrum $(C/3)$ und das mit Cq' umgelegte reduzierte Zentrum $\mathfrak{C}/3$, sowie der reduzierte Fluchtpunkt der Kante



c und der zu ihr Parallelen als der Normalen zur Ebene Cq' in ${}_cQ'/_3$ erhalten worden.

Da durch diese Transformation das System der Fluchtpunkte gegen den Hauptfluchtpunkt H der Ebene sq' als Ähnlichkeitspunkt auf $^1/_3$ zusammengezogen ist, so erhalten wir durch die Heranziehung des Bildes $1'$ in der Linie nach H auf $^1/_3$ nach $1'/_3$ und Verbindung dieses Punktes mit den reduzierten Fluchtpunkten Parallelen der Bilder von a', b', c', nämlich zunächst in $1'/_3$ ${}_cQ'/_3$ die Parallele zu c', sodann mittelst der durch $1'/_3$ zu a' gezogenen Parallelen in q' den reduzierten Fluchtpunkt ${}_aQ'/_3$ von a, damit

den reduzierten Parallelstrahl in der Umlegung ${}_aQ'/_3\,\mathfrak{C}/_3$ und mittelst des zu ihm normalen Strahls aus $\mathfrak{C}/3$ den reduzierten Fluchtpunkt ${}_bQ'/_3$ der Kante b, in der Geraden $1'/_3\,{}_bQ'/_3$ also die Parallele ihres Bildes b'.

Zugleich liefern die aus den reduzierten Fluchtpunkten ${}_aQ'/_3$ und ${}_bQ'/_3$ durch $\mathfrak{C}/_3$ bis zum Schnitt mit q' beschriebenen Kreise in ${}_aT/_3$ und ${}_bT/_3$ die reduzierten Teilungspunkte von a und b; ebenso erhält man in dem aus ${}_cQ'/_3$ durch $(C/3)$ beschriebenen Kreis auf der Geraden ${}_cQ'/_3\,C_1$ den reduzierten Teilungspunkt ${}_cT/_3$ von c in der Fluchtlinie der durch dasselbe gehenden Normalebene zur Tafel.

In der Figur sind auch, weil der Raum es gestattete, die wahren Teilungspunkte ${}_aT$ und ${}_cT$ angegeben und benutzt. Man erhält $2'$, indem man mit $1'\,{}_aT$ die Spur s schneidet, von da in ihr die Länge a abträgt und den Endpunkt derselben mit ${}_aT$ verbindet; man erhält es auch, indem man $1'/_3\,{}_aT/_3$ bis zur Spur s zieht, a von dort in ihr abträgt, von dem Endpunkt nach ${}_aT/_3$ bis zur Geraden $1'/_3\,{}_aQ'/_3$ zieht und den so erhaltenen Punkt auf die dreifache Entfernung in der Linie von H aus zurückführt. Analog für b'. Wenn dabei der Schnitt von $1'/_3\,{}_bT/_3$ mit s entfällt, so kann man offenbar an Stelle von s eine zu ihr parallele in der halben, etc. Entfernung von q' benutzen, wenn man in ihr vom Schnittpunkt nur $^1/_2\,b$, etc. abträgt. Dabei hat man die in der Figur angegebenen aber nicht bezeichneten Punkte $2'/_3$, $3'/_3$ mit erhalten, welche mit ${}_bQ'/_3$, ${}_cQ'/_3$ resp. ${}_cQ'/_3$, ${}_aQ'/_3$ verbunden, die Parallelen der Bilder der zu b, c; c, a parallelen Kanten aus den Ecken 2 und 3 liefern.

Die Auftragung von c erfolgt endlich durch Aufsuchung der zu C_1H parallelen Spur seiner Normalebene zur Tafel mittelst des Durchstoßpunktes von $H1'$ in s; die Länge c ist von 1 bis 4 für ${}_cT$ abgetragen; ebenso würde es für ${}_cT/_3$ geschehen.

Im Falle des Würfels lassen sich die Eigenschaften des Quadrats betreffs seiner Diagonalen mit verwenden; die Halbierungslinien der Winkel von ${}_aQ'/_3\,\mathfrak{C}/_3$, ${}_bQ'/_3\,\mathfrak{C}/_3$ geben die reduzierten Fluchtpunkte derselben auf q' an.

8) Man füge den Schlagschatten für paralleles Licht von gegebenem Fluchtpunkte auf die Ebene der Basis hinzu.

9) Welche Vorteile bietet es für die Konstruktion, wenn die Achse y des Koordinatensystems als Schnitt der zu $\mathbf{E}$ oder xy und zugleich zur Bildebene normalen projizierenden Ebene gewählt wird?

10) Wenn eine der Koordinatenebenen, sagen wir xz zur Bildebene parallel ist oder mit ihr zusammenfällt — wir wollen das letztere annehmen — so liefert für jeden Punkt P des Raumes die Auftragung seiner Koordinaten x, z in ihren Achsen vom Nullpunkt aus den Fußpunkt P_2 des Perpendikels zur Tafel (Durch-

stoßpunkt P_2, Fluchtpunkt C_1), welches P enthält; man bestimmt also das Bild P' nach § 7 durch die Proportion

$$y : d = SP' : Q'P' = P_2P' : C_1P'.$$

Kennt man den Hauptpunkt und z. B. das Viertel der Distanz, so zieht man durch P_2 und C_1 Parallelen, auf die man von diesen Punkten aus $y/4$ und $d/4$ nach entgegengesetzten Seiten abträgt — wenn P auf der Seite der Tafel liegt, die das Zentrum C nicht enthält; die Verbindungslinie der Endpunkte schneidet aus P_2C_1 den Bildpunkt P'. Man wende dies an auf Figuren in horizontaler Ebene, deren Punkte durch rechtwinklige Koordinaten x, y bestimmt sind, deren Achse x die Spur der Ebene ist.

11) Wenn das Zentrum C in der Normale C_1C unendlich fern gerückt wird, so wird der Fluchtpunkt Q'^* von SQ' die Richtung von C_1Q' und das neue Bild der Geraden die durch S zu C_1Q' gezogene Parallele. Es ist die Orthogonalprojektion der Geraden auf die Tafel. Wohin kommt die Projektion A' eines Punktes der Geraden? Vergl. § (7).

13. Bei den Verschiebungen des Objekts parallel zur Tafel und in Normalen zur Tafel, d. i. wenn alle Punkte desselben Parallelen oder Normalen zur Tafel beschreiben, bleiben alle Fluchtelemente ungeändert, und die Durchgangselemente ändern sich nach den Gesetzen, welche vorher für beide Fälle für die Änderung der Fluchtelemente gegeben wurden; insbesondere rückt bei der Normalverschiebung der Durchstoßpunkt S der Geraden in der Spur der durch sie gelegten Normalebene zur Tafel um den Betrag fort, der in dem rechtwinkligen Dreiecke aus der Größe der Verschiebung δ als Kathete mit der Tafelneigung β als Gegenwinkel als zweite Kathete erhalten wird.

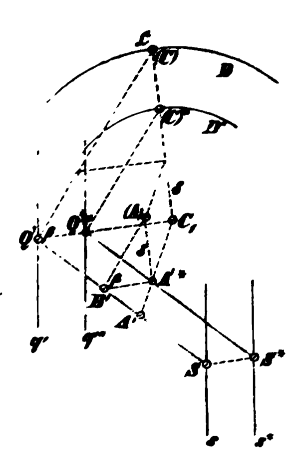
Die Verschiebung der Bildebene in Normalen zu ihr ändert sowohl die Durchgangs- als die Fluchtelemente und zwar beide um den nämlichen wie vorher aus der Größe der Verschiebung δ und der Tafelneigung β abzuleitenden Betrag in gleichem Sinn in der Spur und der Fluchtlinie der durch die Gerade gehenden Normalebene zur Tafel. (Fig. S. 56.) Die Bilder der Punkte rücken in den Geraden fort, die sie mit dem Hauptpunkt verbinden. Man hat für einen beliebigen Punkt A' der Geraden SQ' und seine Transformation A'^*

$$\delta : d = Q'Q'^* : Q'C_1 = A'A'^* : A'C_1.$$

Die Ebene sq' geht über in $s^*q'^*$.

Und wenn A' in A'^* übergeht, A'^*B' aber $Q'C_1$ parallel

ist, so enthält das über diesem mit der zweiten Kathete δ konstruierte rechtwinklige Dreieck die Umlegung (A) von A' und den Winkel β der Geraden. Dies gibt eine Umlegung von Ebenen, welche normal sind zur Tafel und damit besondere Vorteile für die konstruktive Behandlung der zur Tafel normalen Ebenen. Da die Ausmessung der zu projizierenden Raumformen, die der Darstellung derselben voran gehen muß, praktisch mit Vorteil nach der Methode der rechtwinkligen Koordinaten geschieht, so ist es bequem, die als Vertikalebene gedachte Tafel und eine, etwa die tiefste am Objekt vorkommende Horizontalebene als natürliche Koordinatenebenen zu betrachten und dazu normal durch das Zentrum die dritte zu fügen. Das System der der Tafel selbst angehörigen Ordinatenfußpunkte erfordert dann nur die Auftragung der entsprechenden Abstände als Tafelnormalen (§ 7., 3 f.).



B. 1) Wenn ein rechtwinkliges Koordinatensystem durch die eine der Achsen, den Anfangspunkt und die Bildrichtung der zweiten Achse gegeben ist, wie sind die in ihm gemessenen Koordinaten aufzutragen? Wie insbesondere, wenn mit dem vierten Teile der Distanz gearbeitet wird, weil die Größe derselben die Dimensionen des Zeichenblattes überschreitet? (Vergl. § 12, 7.)

2) Man projiziere bei gegebenen Achsen und Parameterverhältnissen die Körper des regulären Krystallsystems unter Anwendung der halben Distanz; z. B. den 48flächner $2\,O3$. (Tafel VI, links.)

14. Im Vorhergehenden ist die Zentralprojektion als eine selbständige Darstellungsmethode entwickelt und im Wesentlichen ausgebildet. Damit sie zugleich die wissenschaftliche Grundlage aller übrigen Darstellungsmethoden — und zwar sowohl Methoden der graphischen Darstellung als der modellierenden — liefern könne, ist es nötig, die fundamentale Beziehung eingehender zu untersuchen, welche zwischen dem Bilde eines ebenen Systems und diesem selbst besteht.

Das Bild des ebenen Systems und die Umlegung desselben in die Bildebene sind zwei geometrisch verwandte, d. i. in gesetzmäßiger Abhängigkeit voneinander stehende ebene

Systeme in der Tafel. Diese Verwandtschaft hat zu ihrem Hauptgesetz, daß jedem Punkt und jeder Geraden des einen Systems immer ein und nur ein Punkt und eine Gerade des andern Systems entspricht. Man nennt die Systeme als diesem Gesetz unterworfen projektivisch und insbesondere kollinear, und die bezügliche geometrische Verwandtschaft Projektivität, insbesondere Kollineation. Die Systeme erscheinen überdies in einer besondern gegenseitigen Lage, die man als die perspektivische oder zentrale Lage zu bezeichnen pflegt: Jedes Paar entsprechender Punkte liegt auf einerlei Strahl eines Strahlenbüschels, in welchem jeder Strahl sich selbst entspricht, d. i. als Teil des Originalsystems betrachtet mit seinem Bilde zusammenfällt und umgekehrt, sodaß dieses Strahlenbüschel beiden Systemen entsprechend gemein ist. Und jedes Paar entsprechender Geraden geht durch einerlei Punkt einer geradlinigen Punktreihe, in welcher jeder Punkt sich selbst entspricht, sodaß sie beide Systeme entsprechend gemein haben. Den Scheitelpunkt jenes Büschels $\mathfrak{C}$ nennen wir das Kollineationszentrum der Systeme, die gerade Linie dieser Reihe s die Kollineationsachse derselben.

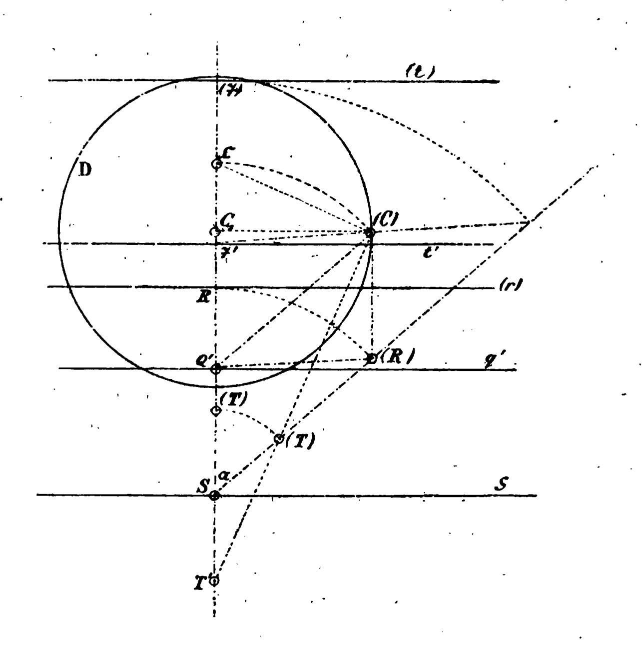
Ferner entsprechen den Punkten in unendlicher Ferne im einen System die Punkte einer zur Kollineationsachse parallelen Geraden im andern System; den Punkten im Unendlichen des Originalsystems entsprechen die von q', den Punkten in unendlicher Ferne des Bildsystems die von (r). Wir nennen diese beiden Geraden die Gegenachsen der Systeme, und ihre Punkte die Gegenpunkte derjenigen Geraden der ebenen Systeme, welche durch sie hindurchgehen. Die Gegenachsen können als Orte der Scheitel derjenigen Strahlenbüschel beider Systeme bezeichnet werden, denen Parallelenbüschel im jedesmaligen andern System entsprechen.

Die Winkel zwischen Geraden der einen Figur werden von den Strahlen aus dem Zentrum nach den Gegenpunkten der entsprechenden Geraden in der andern Figur wiederholt.

In alledem rekapitulieren wir nur die Ergebnisse der Zentralprojektion des ebenen Systems mit zweckgemäßen Modifikationen der Ausdrucksweise. Es entspricht dem ebenfalls, daß zwei kollineare Systeme in zentraler Lage bestimmt sind durch das Zentrum und die Achse der Kollineation nebst einer

der Gegenachsen; die allgemeinen Abhängigkeitsgesetze zeigen, daß ein beliebiges Paar A', (A) entsprechender Punkte oder entsprechender Geraden g', (g) der Systeme die Angabe der Gegenachse für die Bestimmung ersetzt.

Man kann dem die beiden entsprechenden Geraden t, t' mit gleichen Reihen von entgegengesetztem Sinne hinzufügen, welche bei räumlicher Lage diejenige projizierende Ebene ausschneidet, die zur Ebene $q'r$ parallel ist. Die Umklappung der der Originalebene angehörigen Achse t dieser Art hat das Doppelte der Entfernung $(\mathfrak{C}, q')$ zu ihrem



Abstand von der Kollineationsachse s, d. h. (r) ist die Mitte zwischen s und (t). Infolgedessen ist q' die Mitte zwischen t' und s, wie natürlich auch $\mathfrak{C}$ zwischen t und t'. (Vergl. § 39, 4.) Oder t und t' sind die Symmetrischen zu r und q' für die Achse s. (Siehe § 16, 4.) Die Figur bringt alles das zur Anschauung mittels der Umlegung des Querschnittes, den die zu s normale projizierende Ebene mit Bild- und Originalebene und deren beiden Parallelebenen macht.

Auch liegt die Frage nahe: Welches sind die beiden Scheitel entgegengesetzt gleicher Büschel? mit der Antwort: Die

Symmetrischen von $\mathfrak{C}$ in Bezug auf r und q'. Dasselbe Parallelogramm (Fig. S. 58) $SQ'(C)(R)$ liefert sie durch die Parallele aus (C) zur Halbierungslinie des Winkels α oder die Normale zu $(C)\mathfrak{C}$. (Vergl. § 15, 4.) T' ist zugleich $\mathfrak{C}^*$, die entgegengesetzte Umlegung zu $\mathfrak{C}$.

Zwei Maße, sagen wir die Originalbreite

$$\mathfrak{b} = sr = q', \ \mathfrak{C} = rt = T'q'$$

und die Bildbreite $b' = sq' = r, \mathfrak{C} = q't' = Tr$ beherrschen nun den Zusammenhang der speziellsten Elementargebilde erster Stufe der kollinearen Systeme. Man mag noch bemerken, daß $b - b' = \mathfrak{C}$, $t = t'$, $\mathfrak{C} = sT = T's$ ist.

Nach diesen Gesetzen entsprechen einer gegebenen Figur in der Ebene unendlich viele ihr kollinearverwandte Figuren, die alle je nach beliebiger Festsetzung des Kollineationszentrums und der Kollineationsachse, sowie einer Gegenachse mit Hilfe des Lineals allein aus ihr konstruiert werden. Die Lage der gegebenen Figur zur Gegenachse ihres Systems unterscheidet die entsprechenden Figuren voneinander durch das Auftreten unendlich ferner Punkte in diesen, wenn jene von ihrer Gegenachse geschnitten wird, wie dies an den einfachen Figuren von Dreieck und Viereck B. 2 f.) erläutert werden kann.

Auch diese Unterscheidungen sind in den projektivischen Eigenschaften der hergestellten Bilder mit enthalten, wonach dem Punkte und der Geraden eines solchen ohne Ausnahme ein Punkt und eine Gerade des zugehörigen ebenen Originals entsprechen; auch die Übereinstimmung in der Ordnung der Aufeinanderfolge der Punkte in einer Geraden (ebenso der Strahlen aus einem Punkte) und dem zugehörigen Bilde oder die Übereinstimmung des Bewegungssinnes gehört zu diesen. (Vergl. § 17.)

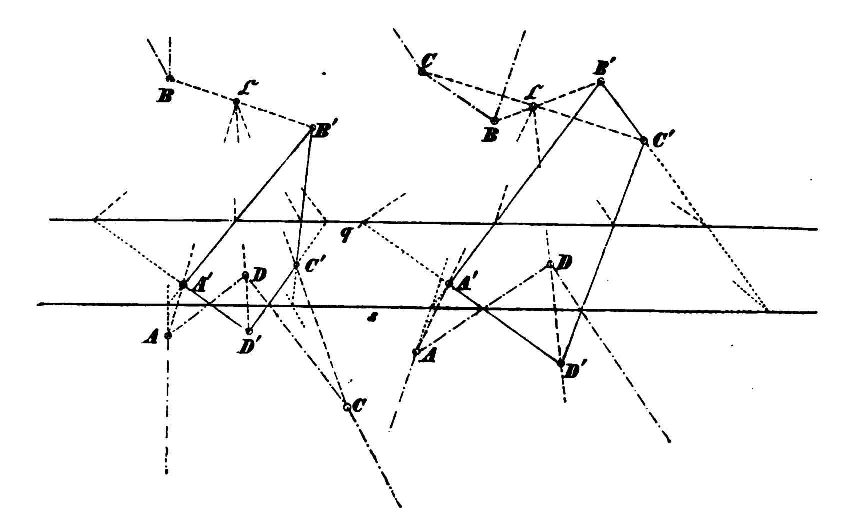
B. 1) Man konstruiere von zwei kollinearen Systemen in zentraler Lage das zweite aus dem ersten, wenn gegeben sind das Zentrum und die Achse der Kollineation und zu einem Punkte oder einer Geraden des ersten Systems der entsprechende Punkt resp. die entsprechende Gerade des zweiten; auch weise man den Parallelismus der Gegenachsen mit der Kollineationsachse als notwendige Folge des Grundgesetzes der Projektivität nach.

2) Man zeichne und charakterisiere die Kollinearverwandten eines gegebenen Dreiecks $A_1A_2A_3$ für die verschiedenen Lagen, die es zur Gegenachse seines Systems haben kann; also für welche die

Ecken 1, 2, 3 auf einerlei Seite der Gegenachse, oder 1, 2 auf einen, 3 auf der andern Seite derselben liegen, oder 3 in der Gegenachse und 1 und 2 auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten derselben, oder endlich 1 und 2 in der Gegenachse liegen.

3) Man führe dasselbe aus für das Viereck der Punkte 1, 2, 3, 4 — in sieben Hauptfällen, welche Zahl sich noch vermehrt, wenn man auch auf die Lage der Punkte achtet, in denen die Gegenseitenpaare sich schneiden. Die folgende Figur zeigt zwei dieser Fälle für das Viereck $A'B'C'D'$. Die Seiten $A'B'$, $B'C'$ in der Figur links, die durch q' getrennt werden, und ebenso die $A'B'$, $C'D'$ rechts erscheinen im Original als unbegrenzte das Unendliche einschließende Segmente.

4) Man soll die verschiedenen Formen der Zentralprojektion



eines Tetraeders verzeichnen. Bezeichnen wir seine Ecken durch Ziffern 1, 2, 3, 4, so liegen dieselben entweder auf der nämlichen Seite oder auf verschiedenen Seiten der Verschwindungsebene oder zum Teil in derselben, und das Zentrum liegt entweder außerhalb oder innerhalb des Tetraederraumes oder speziell in einer Fläche oder einer Kante oder einer Ecke derselben. Wenn der Körper die Verschwindungsebene nicht trifft, so sind entweder alle seine Kanten sichtbar (eine Fläche unsichtbar) oder fünf derselben (zwei Flächen unsichtbar) oder nur drei (drei Flächen unsichtbar); das Zentrum befindet sich resp. in dem Scheiteleckenraum oder in einem Scheitelflächenwinkelraum oder in dem Außeneckenraum über einer Fläche. Die Verschwindungsebene schneidet, wenn sie keine Ecke oder Kante oder Fläche enthält, entweder drei oder vier Kanten und Flächen; das Bild einer von ihr geschnittenen Kante

ist das unendlich große in den Bildern ihrer Ecke begrenzte Stück. Ist das Zentrum in einer Fläche, so erscheinen die drei zugehörigen Ecken in gerader Linie, für die Lage in einer Kante die beiden Ecken derselben in einem Punkt; ist es in einer Ecke, so erscheint das Tetraeder auf das Bild der gegenüberliegenden Fläche reduziert. Das Bild einer sonst in der Verschwindungsebene liegenden Ecke liegt unendlich fern, die zugehörigen Kanten erscheinen parallel. Nach diesen Bemerkungen kann man sämtliche möglichen Ansichten des Tetraeders skizzieren. (Vergl. § 8, 11.)

5) Die Strahlenbüschel beider Systeme, welche das Kollineationszentrum zum Scheitel haben, decken sich Strahl für Strahl und werden daher als einander gleich und entsprechend bezeichnet. Man soll nun die Existenz gleicher, Strahl für Strahl einander entsprechender Strahlenbüschel in der Bildebene und einer gegebenen Originalebene für ein gegebenes Zentrum der Projektion direkt erweisen — indem man die Büschel von projizierenden Ebenen betrachtet, welche zu ihren Scheitelkanten die Normalen derjenigen Ebenen haben, durch die der Winkel α der Originalebene und sein Nebenwinkel halbiert werden. Diese Normalen liefern direkt die beiden Lagen des umgelegten Zentrums (§§ 9. u. 11.) als ihre Fußpunkte in der Bildebene. (Ebenen, die zur Bild- und Originalebene gleich geneigt sind. § 10, 9.)

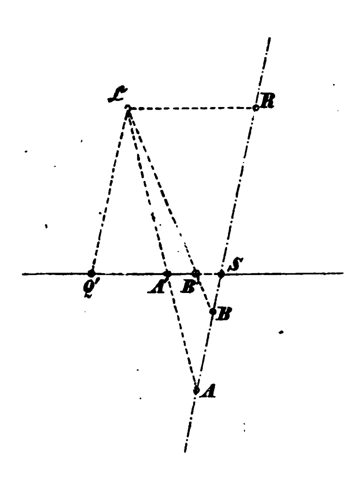
6) Wenn man durch alle Punkte des ebenen Systems Parallelen zieht zu einer der in B. 5) bezeichneten Normalen, so bestimmen dieselben in der Bildebene ein System, welches dem gegebenen kongruent ist. Man erläutere die Konstruktion der Umlegung des ebenen Systems in § 11 (§ 9) als die Ausführung dieses Gedankens.

7) Wenn das Parallelogramm $(C)Q'S(R)$ der Figur S. 58 des Textes ein Rhombus ist, sodaß wegen $SQ' = S(R)$ die Gegenachsen q' und r in der Mitte zwischen $\mathfrak{C}$ und s sich vereinigen, so fallen auch T' und (T) in S zusammen und (t) und t' durch $\mathfrak{C}$.

8) Wenn man statt der Spur s eine beliebige Parallele zur Tafel als Drehungsachse benutzt, so erhält man durch die Konstruktion der Umlegung mit demselben Zentrum $\mathfrak{C}$ und derselben Gegenachse q' die Zentralprojektion der in die zugehörige Parallelebene zur Tafel umgelegten Figur — eine ähnliche Verjüngung ihrer wahren Gestalt; für die Tafelparallele m' (§§ 4 bis 6) nach dem Verhältnis 1 : 2.

15. Für das Weitere ist die Untersuchung der **Abhängigkeit des Bildes der geraden Punktreihe von ihrem Original** die natürliche Vorbereitung. Nach dem Vorhergehenden ist sie als Projektivität in perspektivischer Lage zu bezeichnen und durch das Zusammenfallen von zwei entsprechenden Punkten im Durchschnittspunkt S des Bildes mit dem Original charakterisiert. Ob wir die Umlegung der ein-

zelnen Geraden mit ihrer projizierenden Ebene wie in § 4 oder die Umlegung der Geraden des ebenen Systems wie in § 11 betrachten, so zeigt sich uns das Bild und die Umlegung der Geraden in solcher Beziehung, daß beide den Durchstoßpunkt S gemein haben, und daß das Kollineationszentrum die vierte Ecke eines Parallelogramms ist, in welchem S ihm gegenüber liegt und die Gegenpunkte Q' und R die andern Ecken sind. Daraus ergeben sich für zwei Punkte A, B des Originals und ihre Bilder A', B' die folgenden Relationen (nebenstehende Figur). Es ist



$$\triangle AR\mathfrak{C} \sim \mathfrak{C}Q'A'; \quad \text{also}$$
$$AR : R\mathfrak{C} = \mathfrak{C}Q' : Q'A' \quad \text{oder}$$
$$AR \,.\, Q'A' = R\mathfrak{C} \,.\, \mathfrak{C}Q'$$
$$= SQ' \,.\, RS = k^2; \; (= n \,.\, l \; § 3.),$$

d. h. das Rechteck der Abstände entsprechender Punkte von ihren Gegenpunkten — man sagt etwa die perspektivische Potenz beider Reihen — ist konstant. Infolgedessen ist

$$Q'A' = \frac{k^2}{AR} \text{ und ebenso } Q'B' = \frac{k^2}{BR};$$

also

$$Q'B' - Q'A' = A'Q' + Q'B' = A'B' = k^2 \left(\frac{1}{BR} - \frac{1}{AR}\right)$$
$$= k^2 \frac{AR - BR}{AR \,.\, BR} = k^2 \cdot \frac{AB}{AR \,.\, BR},$$

für die Ableitung der endlichen Länge zwischen den Bildern ihrer Endpunkte, die einer bestimmten Strecke des Originals entspricht, die aber nach § 4, 14 nur dann das Bild der Strecke ist, wenn dieselbe R nicht einschließt. Im Grenzfalle B in R wird das Bild unendlich groß. Man hat ebenso und im nämlichen Sinne aus AR und BR

$$AB = k^2 \frac{Q'B' - Q'A'}{Q'A' \,.\, Q'B'} = k^2 \frac{A'B'}{Q'A' \,.\, Q'B'}.$$

Insbesondere ist $A'B' = AB$ für

$k^2 = AR \,.\, BR$; und weil $k^2 = AR \,.\, Q'A' = BR \,.\, Q'B'$ ist,

so ergibt sich als die Bedingung der Gleichheit entsprechender endlicher Strecken

$$BR = Q'A' \quad \text{oder} \quad AR = Q'B';$$

d. h. der Gegenpunkt Q' ist vom Bilde des einen Endpunkts ebensoweit entfernt wie das Original des andern Endpunkts vom Gegenpunkt R,

Man erhält dieselbe Bedingung auch aus

$$AR \,.\, Q'A' = BR \,.\, Q'B' \quad \text{oder} \quad AR : BR = Q'B' : Q'A',$$

indem man bildet

$$(AR - BR) : BR = (Q'B' - Q'A') : Q'A' \text{ d.h. } AB : BR = A'B' : Q'A'.$$

Hat man also A und A' als Anfangspunkte entsprechend gleicher Strecken, so trägt man $Q'A'$ im Original beiderseits von R nach B und E ab; ebenso RA im Bilde beiderseits von Q' nach B' und E'. Dann sind BB', EE' Paare entsprechender Punkte und (Figur S. 64)

$$AB = A'B', \quad AE = A'E'$$

entsprechende, in A, A' beginnende Strecken je von einerlei Länge, von denen die ersten die Gegenpunkte Q' und R nicht einschließen und die letzten sie einschließen.

Und trägt man noch $Q'A'$ bez. RA in g' bez. g von Q' bez. R nach der entgegengesetzten Seite auf, so erhält man entsprechende Punkte D', D, in denen die gleichen entsprechenden Strecken $DB = D'B'$ mit eingeschlossenen Gegenpunkten R, Q' und $DE = D'E'$ mit ausgeschlossenen beginnen. Und man hat zudem nach der Konstruktion

$$A'B' = -D'E' = AB = -DE$$

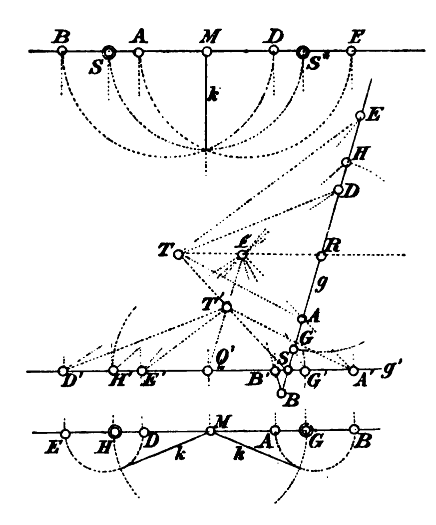
und wieder $A'E' = -D'B' = AE = -DB$.

Die Endpunkte der mit den gleichen Abständen von den Gegenpunkten erhaltenen und zum gleichen System Gehörigen in derselben Reihe, wie B, E und A, D in g, und B', E' und A', D' in g' liegen symmetrisch zu ihrem Gegenpunkt. Es gibt also in zwei perspektivischen Geraden zwei durch die Lage zu den Gegenpunkten unterschiedene Systeme entsprechend gleicher Strecken. Die einen, wie AB, DE, welche die Gegenpunkte nicht einschließen, gehören als Bilder und Originale im gewöhnlichen Sinne zusammen, bei den andern, wie AE, DB, welche die Gegenpunkte einschließen, ent-

spricht die endliche Strecke der ausgeschlossenen unendlich großen perspektivisch. (Vergl. § 14.)

Die Konstruktionsregel für die entsprechend gleichen Strecken legt nahe, die beiden Reihen so zusammen zu legen, daß R von g auf Q' von g' fällt. Denken wir etwa zuerst g entgegen dem Sinne des Uhrzeigers um R gedreht bis es parallel zu g' ist, und dann parallel so verschoben, daß R auf Q' fällt, so fallen die Punkte B, A, D, E bezüglich auf A' B', E', D', oder die gleichen entsprechenden Strecken des die Gegenpunkte ausschließenden Systems AB und $A'B'$, DE und $D'E'$ sind verkehrt, d. h. mit A' auf B und B' auf A, E' auf D, D' auf E in Deckung gelangt. Und ebenso müssen alle andern Paare gleicher entsprechender Strecken dieses Systems verkehrt in Deckung sein.

Das Grundgesetz $RA \,.\, Q'A' = k^2$ wird, wenn wir den Punkt $Q'R$ mit M bezeichnen, $MA \,.\, MA' = k^2 = MD \,.\, MD'$, sodaß K der Halbmesser eines Kreises ist, der die über den entsprechend gleichen Strecken AA', DD' als Durchmesser beschriebenen Kreise in den Berührungspunkten der von M aus an sie gehenden Tangenten, also zugleich rechtwinklig schneidet. (Nebenstehende Fig., unten.) (Kreisbüschel mit Grenzpunkten.)



Drehen wir aber g zuerst mit dem Uhrzeiger um R bis zum Parallelismus mit g' und verschieben es dann parallel sich selbst, sodaß R auf Q' fällt, so fallen ebenso die gleichen entsprechenden Strecken des die Gegenpunkte einschließenden Systems verkehrt zusammen, wie die für A, A' konstruierten AE auf $E'A'$, DB auf $B'D'$. (Figur, oben.) Das Grundgesetz von der perspektivischen Potenz gibt $MA \,.\, MA' = -k^2$, d. h. alle die über den Strecken des die Gegenpunkte einschließenden

Systems als Durchmesser beschriebenen Kreise schneiden den um M mit dem Radius k beschriebenen Kreis in den Endpunkten seines zur Reihe normalen Durchmessers (Figur S. 64 oben): Kreisbüschel mit Grundpunkten. Man nennt diese Vereinigungen von Bild und Original einer Geraden involutorisch oder Involutionen, und man spricht von den Endpunkten der sich verkehrt deckenden Strecken als ihren Paaren und nennt die erste, in welcher kein Paar durch ein anderes getrennt wird und welches zwei Doppelpunkte hat, also Strecken von allen Größen von Null bis Unendlich enthält, die hyperbolische Involution. (Vergl. B. 2 und Figur S. 64, unten.) Dagegen die zweite, wo jedes Paar jedes andere trennt und die nur Strecken von den Längen $2k$ (symmetrisches Paar S, S^*) bis Unendlich enthält, die elliptische Involution. (Vergl. B. 2 und Figur S. 64, oben.)

Wir kommen auf diese wichtigen Beziehungen zunächst schon in §§ 18, 20 wieder zurück; ihr Auftreten bei der ersten Frage des Maßes in der Zentralprojektion ist bedeutungsvoll.

B. 1) Für

$$AB = A'B' \text{ ist } AB = AR - BR = \frac{k^2}{Q'A'} - Q'A'$$

d. h.
$$AB \,.\, Q'A' + \overline{Q'A'}^2 = k^2 (= SQ' \,.\, RS);$$

somit
$$Q'A' = -\frac{AB}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\,\overline{AB}^2 + SQ' \,.\, RS},$$

d. h. stets reell, solange k^2 positiv ist, und reell für $\overline{AB}^2 > 4k^2$ bei negativem k^2.

Das System der gleichen entsprechenden Strecken enthält also im allgemeinen zwei Paare gleicher Strecken von gegebener Länge. Man konstruiere sie für $AB = A'B' = 2d$. Insbesondere wird $AB = \infty$ für $Q'A' = 0$ oder $= \infty$; in der Tat ist $Q'R' = QR = \infty$. Es ist klar, daß man damit auch die durch Parallelen zur Tafel begrenzten entsprechend gleichen Streifen in einer Ebene und ihrem Bilde bestimmt, wenn eine Grenzlinie (parallel s) oder wenn die Breite gegeben ist.

2) Man erhält ferner $AB = A'B' = 0$ für positives k^2

$$Q'A' = BR = k = \sqrt{SQ' \,.\, RS};$$

d. h. es gibt zwei Punktepaare G, H in g und G', H' in g' (Figur S. 64, Mitte und unten), welche die entsprechenden Nullstrecken genannt werden sollen; weil Anfangs- und Endpunkt der entsprechenden gleichen Strecken jeweils in ihnen zusammenfallen, kann man sie

auch als die **Doppelpunkte** bezeichnen. Sie müssen dem ersten System der entsprechend gleichen Strecken beigezählt werden, die die Gegenpunkte nicht einschließen.

Im andern System treten dafür zwei gleiche entsprechende Strecken auf, die von ihren Gegenpunkten halbiert werden; man bezeichnet ihre Endpunkte auch als **das symmetrische Paar**.

3) Sind die Gegenpunkte unendlich fern, d. h. entweder Bild und Original der Geraden einander parallel oder das Zentrum unendlich fern, so existieren gleiche entsprechende Strecken entweder gar **nicht** oder **alle** entsprechenden Strecken sind gleich. Die Reihen sind **ähnlich**, bei unendlich fernem Zentrum und bei entgegengesetztem gleichem Abstand vom Zentrum **kongruent**.

4) Man trage die Punkte P auf, für welche $SP = SP'$ ist — durch $Q'P' = SR$. Wenn man in einer Ebene sq' in der Geraden, welche die projizierende Normalebene zu ihrer Spur aus ihr herauschneidet, diese Punkte (T) und T bestimmt, so sind dieselben die Scheitel entsprechender symmetrisch gleicher Strahlenbüschel d. h. mit entgegengesetztem Sinn. (Figur S. 58.) Es ist $Q'T' = RS = \mathfrak{C}Q'$ und $RT = Q'S = \mathfrak{C}R$. Sie liegen symmetrisch zu $\mathfrak{C}$ in Bezug auf r und q' bez. Auch erhält man die Schnittpunkte $\mathfrak{T}'$, $(\mathfrak{T})$ der symmetrisch gleichen entsprechenden Reihen t', (t) in demselben Strahl SQ' wegen $\mathfrak{C}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}'\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{C}R = \mathfrak{T}'Q' = Q'S'$ und $\mathfrak{C}Q' = (\mathfrak{T})R = RS$, also symmetrisch zu s in Bezug auf q' bez. r. (Vergl. § 14.) Zugleich folgt durch Addition

$$2Q'R = T'(T) = \mathfrak{T}'(\mathfrak{T}), \text{ etc.}$$

5) Da die Größe k^2 nur von den Seitenlängen, nicht aber von den Winkeln des Parallelogramms $\mathfrak{C}RSQ'$ abhängt, so folgt der Satz: Wenn zwei Gerade perspektivisch sind, so **bleiben** sie dies auch bei einer Drehung der einen von ihnen um den gemeinschaftlichen Punkt. Das Zentrum $\mathfrak{C}$ der Perspektive ist immer die vierte Ecke des durch die Q', S und R bestimmten Parallelogramms; bleibt also SQ' fest, so durchläuft $\mathfrak{C}$ den aus Q' mit dem Halbmesser $Q'\mathfrak{C}$ beschriebenen Kreis. Jeder Punkt in ihm hat den Charakter und erlaubt die Verwendung eines **Teilungspunktes**. (§ 4; Text und 2. § 12; 7. Figur S. 53.)

6) Für eine projizierende Gerade ist $R\mathfrak{C} = 0$ also $k^2 = 0$ und $A'B'$ stets gleich Null, d. h. das Bild der Geraden ist ein Punkt.

16. Gehen wir zur **Betrachtung** von zwei **Paaren** von **Punkten** A, B und C, D der Geraden g und ihrer Bilder A', B' und C', D' in g' über, so ergeben sich die Relationen der Abstände der Punkte des ersten Paares von denen des zweiten (Figur S. 68).

$$A'C' = k^2 \cdot \frac{AC}{AR \, . \, CR}, \quad A'D' = k^2 \cdot \frac{AD}{AR \, . \, DR},$$
$$B'C' = k^2 \cdot \frac{BC}{BR \, . \, CR}, \quad B'D' = k^2 \cdot \frac{BD}{BR \, . \, DR};$$

daraus folgen für die einfachen Teilungsverhältnisse (§ 7), nach denen die Strecke $A'B'$ durch die Punkte C', bez. D' geteilt ist und ihre entsprechenden im Original die Relationen

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AR}{BR}, \quad \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AD}{BD} : \frac{AR}{BR},$$

d. h. alle Teilungsverhältnisse derselben Strecke werden nach gleichem Verhältnis geändert; und es ergibt sich somit für das Verhältnis dieser Teilverhältnisse oder das Doppelverhältnis der Punkte $ABCD$

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

d. h. das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden wird durch Zentralprojektion nicht geändert — ist im Bilde dasselbe wie im Original; in projektivischen Geraden haben die gleichgebildeten Doppelverhältnisse von Vierergruppen entsprechender Punkte einerlei Wert.

Wir wollen daher für die vorige Gleichung abkürzend schreiben

$$(A'B'C'D') = (ABCD).$$

Das Bildungsgesetz für das Doppelverhältnis der Gruppe A, B, C, D läßt sich dann auch so erläutern. Weil

$$(A'B'C' \infty) = A'C' : B'C'$$

ist, so sind die Relationen in Zeile 7 v. o. äquivalent den Spezialfällen des Vorigen

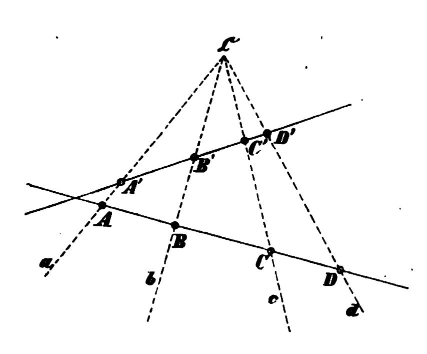
$$(A'B'C' \infty) = (ABCR), \quad (A'B'D' \infty) = (ABDR).$$

Diese liefern also durch Division $(A'B'C'D') = (ABCD)$.

Ist weiter $\mathfrak{C}$ das Zentrum der Projektion und bezeichnen wir die projizierenden Strahlen AA', BB', CC', DD' bez. durch a, b, c, d und durch (a, b) den von zweien a, b unter ihnen gebildeten Winkel, so hat man nach bekanntem doppeltem Ausdruck der Dreiecksflächen folgende Relationen:

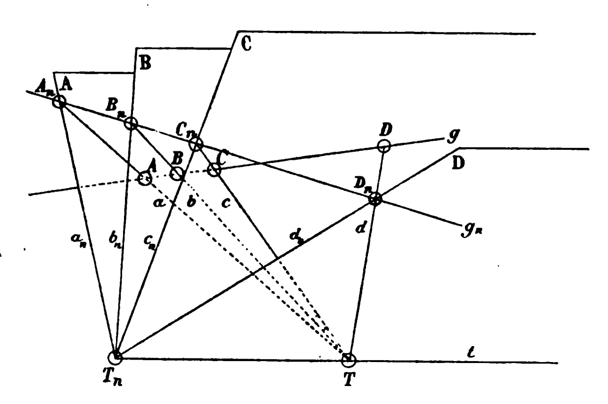
$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\Delta A\mathfrak{C}C}{\Delta B\mathfrak{C}C} : \frac{\Delta A\mathfrak{C}D}{\Delta B\mathfrak{C}D} = \frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)} : \frac{\sin(a, d)}{\sin(b, d)} = (abcd),$$

weil die halben Produkte der die Winkel (a, c) etc. bildenden Seiten in den Dreiecken $A\mathfrak{C}C$ etc. sämtlich sich aufheben; und das leitet mit Anwendung der analogen Abkürzung auf den analogen Ausdruck; d. h. das Doppelverhältnis von vier Punkten in gerader Linie stimmt mit dem gleichgebildeten Doppelverhältnis der entsprechenden Strahlen eines darüber stehenden Strahlenbüschels überein. Diese Unveränderlichkeit der Doppelverhältnisse ist das Wichtigste, was den projektivischen Eigenschaften des § 14 hinzuzufügen war; ihre Tragweite erweist sich sogleich in der Größe des Gebietes, das sie nach der vorigen Entwicklung beherrschen, in der Art wie sie es tun, und in der fast unmittelbaren Evidenz der bezüglichen Sätze.



Zuerst geht die Gleichheit der Doppelverhältnisse entsprechender Gruppen von Punkten in perspektivischen Geraden daraus wieder hervor. Oder:

Alle vierpunktigen Reihen, die aus demselben Strahlenbüschel durch verschiedene Transversalen geschnitten werden



(oder untereinander perspektivisch sind), haben gleiches Doppelverhältnis. Alle vierstrahligen Büschel, die über derselben Reihe von vier Punkten an verschiedenen Scheitelpunkten er-

zeugt werden (oder perspektivisch sind), haben gleiches Doppelverhältnis. Also auch: Ein Strahlenbüschel in der Originalebene und sein Bild haben gleiches Doppelverhältnis — und alle die Punktreihen und Strahlenbüschel, welche durch beliebige Gerade und Ebenen aus einem Büschel von projizierenden) Ebenen geschnitten werden (vergl. § 6) haben gleiches Doppelverhältnis: es ist dem entsprechenden Doppelverhältnis dieses Ebenenbüschels, d. h. dem aus den Sinus seiner entsprechenden Flächenwinkel gebildeten, selbst gleich. Denn (Figur S. 68 unten) für T als einen beliebigen Punkt der Scheitelkante t des Ebenenbüschels $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ und g als eine beliebige Transversale desselben mit den Schnittpunkten A, B, C, D in den vier Ebenen ist das Strahlenbüschel T. $ABCD$ oder $abcd$ der Querschnitt mit einer beliebigen Ebene des Raumes. Führt man nun durch einen beliebigen Punkt T_n der Scheitelkante den Normalschnitt a_n, b_n, c_n, d_n des Ebenenbüschels und ist g_n die Schnittlinie der Ebene desselben mit der Ebene Tg, so sind die Schnittpunkte A_n, B_n, C_n, D_n derselben mit den vier Ebenen des Büschels zugleich ihre Schnittpunkte mit den gleichnamigen Strahlen des Büschels in Tg. Man hat also

$$(\mathbf{ABCD}) = (a_n b_n c_n d_n) = (A_n B_n C_n D_n) = (abcd) = (ABCD).$$

(Für eine Darstellung in Zentralprojektion kann man t als projizierende Gerade, T als ihren Durchstoßpunkt und T_n als das Projektionszentrum wählen und g in der Bildebene annehmen; g_n ist dann die Fluchtlinie der Normalebenen zum projizierenden Strahl t und die Figur S. 68 erhält ihre einfachste Form.)

Oder: Die Ebenenbüschel, welche vier Punkte einer Geraden mit beliebigen sie nicht schneidenden Geraden im Raume bestimmen, haben dasselbe Doppelverhältnis, wie diese vier Punkte. Alle diese Sätze lassen sich, wenn man dem Schnitt mit Ebenen und Geraden den Schein aus Punkten und Geraden gegenüberstellt, in der Aussage zusammenfassen: Doppelverhältnisse werden durch Schnitt- und Scheinbildung nicht geändert. Und wir bemerken, daß die drei Elementargebilde — man sagt erster Stufe —: Die Punkte in einer Geraden, die Ebenen durch eine Gerade und die Geraden durch einen Punkt in einer Ebene durch

Schnitt- und Scheinbildungen nur ineinander übergeführt werden, oder daß sie in Bezug auf Projektionsprozesse eine in sich abgeschlossene Gruppe bilden.

B. 1) Den ersten Formeln des Textes analog hat man

$$AC = k^2 \cdot \frac{A'C'}{Q'A' \,.\, Q'C'}, \text{ etc.};$$

daraus sodann entsprechend den zweiten

$$\frac{AC}{BC} = (ABC\infty) = (A'B'C'Q'), \quad \frac{AD}{BD} = (ABD\infty) = (A'B'D'Q')$$

und durch Division von beiden Formeln

$$(ABCD) = (A'B'C'Q') : (A'B'D'Q') = (A'B'C'D').$$

2) Nach der zweiten Formelgruppe des Textes kann niemals $\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}$ werden; aber immer $\frac{A'C'}{B'C'} = -\frac{AC}{BC}$, nämlich für $AR = -BR$. Aus $(ABC\infty) = (A'B'C'Q')$ folgt als äquivalente Bedingung auch $Q'A' = -Q'B'$.

3) Wenn der Punkt C der Originalgeraden die Mitte zwischen den Punkten A und B derselben ist, sodaß $AC = -BC$, so liefern die Relationen

$$A'C' = k^2 \frac{AC}{AR \,.\, CR}, \quad B'C' = k^2 \frac{BC}{BR \,.\, CR}$$

$$A'C' : B'C' = \frac{k^2}{AR} : -\frac{k^2}{BR} = Q'A' : -Q'B'$$

oder

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'Q'}{B'Q'} = -1.$$

Ist im Original C die Mitte zwischen A und B, so haben die Paare A', B' und C', Q' im Bilde das Doppelverhältnis -1, oder wie man sagt, C' und Q' s i n d k o n j u g i e r t h a r m o n i s c h zu A', B'. Da im Original die Strecke AB durch den Mittelpunkt C und den unendlich fernen Punkt Q in den Verhältnissen -1 und $+1$ geteilt wird, so ist das Doppelverhältnis der Gruppen AB, CQ gleichfalls -1 und das gewonnene Ergebnis ein Spezialfall des Hauptsatzes im Texte. (Vergl. Fig. S. 74.)

Ebenso die Halbierung der Bildstrecke SQ' durch das Bild M' von M für S als die Mitte zwischen R und M. H a r m o n i s c h e T e i l u n g w i r d d u r c h P r o j e k t i o n n i c h t g e s t ö r t.

Man erhält hiernach z. B. das Bild vom Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC aus seinem Bilde und der Fluchtlinie q' seiner Ebene; man bestimmt zu den Fluchtpunkten von zwei Seiten $B'C'$ und $C'A'$ die vierten harmonischen in denselben und erhält S' als Schnittpunkt ihrer Ecktransversalen. Der Umstand, daß die Spur der Ebene nicht gebraucht wird, sagt aus, daß die Schwerpunkte

aller parallelen Schnitte derselben dreiseitigen Pyramide in einer Geraden durch ihre Spitze liegen. (Vergl. 13.)

4) Alle Strahlenbüschel über einer Gruppe harmonischer Punkte sind harmonische Büschel; ebenso alle Ebenenbüschel, welche durch dieselbe gehen.

5) Man ziehe durch einen Punkt P in der Ebene des Dreiecks ABC die Geraden $PA_1B_1C_1$, $PB_2C_2A_2$, $PC_3A_3B_3$, in denen P mit den Schnittpunkten in den Dreiecksseiten harmonische Gruppen bildet. (Ausführung nach 13 unten.)

6) Man hat für den Zusammenhang zwischen Bild und Original einer geraden Linie speziell

$$(AB\infty R) = (A'B'Q'\infty')$$

$$BR : AR = A'Q' : B'Q' \quad \text{oder} \quad AR \,.\, A'Q' = BR \,.\, B'Q',$$

das erste Gesetz des § 15.; ferner

$$(SQ'A'R') = (SQAR) \quad \text{oder} \quad (SQ'A'\infty) = (S\infty AR)$$

d. h.

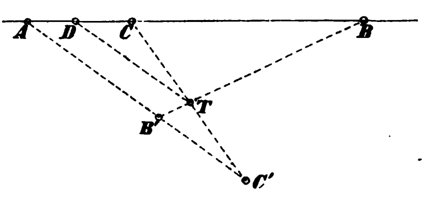
$$\frac{SA'}{Q'A'} : \frac{S\infty'}{Q'\infty'} = \frac{SA}{\infty A} : \frac{SR}{\infty R} \quad \text{oder} \quad \frac{SA'}{Q'A'} = \frac{SA}{SR} = \frac{y}{d},$$

das Grundgesetz für die Auftragung von Punkten einer Geraden aus ihren Tafelabständen in § 7.

7) Jedes Doppelverhältnis kann wie oben im Text

$$(ABCR) = (A'B'C'\infty) \quad \text{und ebenso} \quad (A'B'C'Q') = (ABC\infty)$$

auf ein einfaches Verhältnis reduziert, und damit zu drei Elementen einer Reihe oder eines Büschels ein viertes zu einer algebraischen Zahl als gegebenem Doppelverhältnis konstruiert werden. Sind A, B, C, D Punkte einer Reihe, so bilde man über ihnen ein Strahlenbüschel a, b, c, d aus einem Punkte T und schneide dasselbe durch eine Transversale aus A parallel dem Strahl d in den Punkten B', C', ∞'; dann ist $(ABCD) = (AB'C'\infty')$ d. i. $= AC' : B'C'$; man konstruiert ebenso bequem aus



$$(AB'\infty'D') = B'D' : AD';$$

aus $(A\infty C'D') = AC' : AD'$ und aus $(\infty BC'D') = BD' : BC'$.

Soll also z. B. in der Figur D so bestimmt werden, daß $(ABCD) = 5 : 2$ sei, so trage man auf eine durch A gezogene Gerade $AC' = 5$, $B'C' = 2$ für beliebige Einheit auf; dann liefern die Geraden BB', CC' als ihren Schnittpunkt den Scheitel T des Büschels und der zu $AB'C'$ parallele Strahl aus diesem bestimmt in der Reihe ABC den Punkt D.

8) Man verfolge die Bewegung des Punktes D durch die Reihe, unter der Annahme, daß das Doppelverhältnis die Reihe der positiven und negativen Zahlen durchläuft.

Man konstruiere insbesondere den vierten harmonischen Punkt D zu der Gruppe ABC, z. B. die Zentralprojektion des Mittelpunktes C' der in $A'B'$ projizierten Strecke der Geraden SQ'. (Vergl. unter 14 die Konstruktion mit Hilfe des Lineals allein.)

9) Da sich die vier Elemente A, B, C, D in 24 verschiedene Gruppen ordnen lassen, so entspringt die Frage nach der Beziehung des Doppelverhältnisses einer Gruppe $(ABCD)$ zu denen der 23 übrigen Gruppen. Sie wird durch das Folgende erledigt. Man erkennt durch Bildung der Doppelverhältnisse unmittelbar die Richtigkeit der folgenden Tafel:

$$\begin{aligned}
(ABCD) &= (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = d_1, \\
(BACD) &= (ABDC) = (CDBA) = (DCAB) = d_1^{-1}; \\
(BCAD) &= (CBDA) = (ADBC) = (DACB) = d_2, \\
(CBAD) &= (BCDA) = (ADCB) = (DABC) = d_2^{-1}; \\
(CABD) &= (ACDB) = (BDCA) = (DBAC) = d_3, \\
(ACBD) &= (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = d_3^{-1}.
\end{aligned}$$

Ferner die Relation $d_1 d_2 d_3 = -1$.

Betrachtet man aber $(ABCD)$ und $(ACBD)$, so zeigt die Methode von 7) oder die Auswertung durch Projektion von D ins Unendliche, ihre Werte gleich $A'C' : B'C'$ und $A'B' : C'B'$ oder $B'A' : B'C'$, d. h. ihre Summe ist gleich Eins. Man hat also $d_1 + d_3^{-1} = 1$ und ebenso $d_2 + d_1^{-1} = 1$, $d_3 + d_2^{-1} = 1$.

10) Für d_1 gleich $-1, 0, +1, \infty$ erhält man d_2 und d_3 respektive gleich

$$\begin{array}{cccc} 2, & \infty, & 0, & 1; \\ \frac{1}{2}, & 1, & \infty, & 0. \end{array}$$

Die Doppelverhältniswerte 0, 1, ∞ sind nur uneigentlich Doppelverhältnisse, weil sie nicht zu vier verschiedenen Elementen in der Reihe resp. im Büschel gehören. Denn

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)} \frac{\sin(b, d)}{\sin(a, d)} \quad \text{etc.}$$

kann nur 0 werden für C in A oder D in B, nur ∞ für C in B oder D in A, und nur $+1$ für B in A oder D in C, etc.

11) Dagegen ist für die harmonische Gruppe

$$(CABD) = \frac{CB}{AB} : \frac{CD}{AD} = \tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{AD}{CD} = \tfrac{1}{2} \frac{AB}{CB}$$

und somit
$$\frac{AC + CD}{CD} = \tfrac{1}{2} \frac{AC + CB}{CB}$$

und durch Division mit AC

$$\frac{1}{CD} + \frac{1}{AC} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{CB} + \frac{1}{AC}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{CD} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{CB} + \frac{1}{CA}\right).$$

Völlig analog entwickelt man für das harmonische Strahlbüschel

$$(cabd) = \frac{\sin cb}{\sin ab} : \frac{\sin cd}{\sin ad} = \tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin ad}{\sin cd} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin ab}{\sin cb},$$

d. h.

$$\frac{\sin(ac + cd)}{\sin cd} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin(ac + cb)}{\sin cb}$$

und also

$$\frac{1}{\tan cd} + \frac{1}{\tan ac} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan cb} + \frac{1}{\tan ac}\right)$$

oder

$$\frac{1}{\tan cd} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan cb} + \frac{1}{\tan ca}\right),$$

was für unendlich fernen Scheitel des Büschels in die Relation der harmonischen Reihe übergeht.

12) Ist M die Mitte von AB, so folgt dagegen für die harmonische Punktgruppe aus $(ABCD) = -1$ oder

$$AC : BC = -AD : BD, \quad \text{d. i.} \quad AC \,.\, BD = -AD \,.\, BC$$

oder $\quad (AM + MC)(BM + MD) = (DM + MA)(BM + MC)$

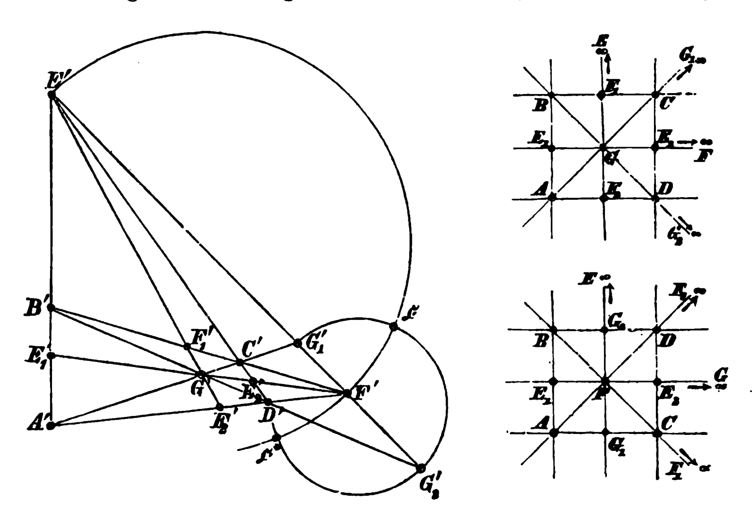
wegen $\quad AM = -BM \quad$ auch $\quad \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = MC \cdot MD.$

13) Für $d_1 = d_2 = d$ folgt auch $d_3 = d$ und $d^2 - d - 1 = 0$

also $\quad d = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\,(1 \pm i\sqrt{3}).$

14) Da nach den §§ 14 und 15 in der Umlegung einer ebenen Figur alle geraden Reihen derselben mit ihren Bildern für dasselbe Zentrum $\mathfrak{C}$ perspektivisch sind, so sind ihre entsprechenden Doppelverhältnisse einander gleich. Man zeigt überdies leicht, daß zu jedem Viereck $A'B'C'D'$, das als Bild gegeben ist, eine Gegenachse q' — nämlich die Verbindungslinie $E'F'$ der Schnittpunkte von $A'B'$ mit $C'D'$ und von $B'C'$ mit $A'D'$ — und zwei Lagen des Kollineationszentrums $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}^*$ gefunden werden können, für welche die entsprechenden Umlegungen Quadrate werden, deren Größe von der Lage der Kollineationsachse s abhängt. Die Zentra $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}^*$ sind die Schnittpunkte der über den Abschnitten $E'F'$ und $G_1'G_2'$ der Gegenpunkte von $A'B'$ und $B'C'$ bez. von $A'C'$ und $B'D'$ als Durchmessern beschriebenen Kreise, weil im Quadrat sowohl die Nachbarseiten AB, BC, als auch die Diagonalen AC, BD aufeinander rechtwinklig sind. Weil also eine solche zentrische Kollineation immer existiert, so ergeben sich aus den Eigenschaften des Quadrats $ABCD$ allgemeine projektivische, d. h. durch Projektion nicht zerstörbare, Eigenschaften der Vierecke. Sind die Schnitt-

punkte der Linienpaare $A'B'$, $C'D'$; $B'C'$, $A'D'$; $C'A'$, $B'D'$ bez. E', F', G' (Figur links), so liegen von den entsprechenden Punkten E, F, G zwei in unendlicher Ferne, z. B. E, F und der dritte ist der Mittelpunkt des Quadrats G. (Figur rechts.) Durch die erlaubte Veränderung der Ordnung der Buchstaben A, B, C, D kann jeder



der drei zum Mittelpunkt gemacht werden. Im gedachten Falle entsprechen den Geraden $E'F'$, $F'G'$, $G'E'$ der Reihe nach die unendlich ferne Gerade q und die Parallelen aus dem Mittelpunkt zu den Seiten des Quadrats. Die entsprechenden Reihen und Büschel der beiden Figuren sind projektivisch; nennt man also noch die Punkte $A'C'$, $E'F'$; $B'D'$, $E'F'$ resp. G_1', G_2' (Figur links) und ihre entsprechenden im Unendlichen G_1, G_2 (Fig. rechts), so erhält man die Relationen

$$(A'C'G'G_1') = (ACGG_1) = -1,$$
$$(B'D'G'G_2') = (BDGG_2) = -1,$$

weil G die Mitte zwischen A und C, resp. B und D ist und G_1, G_2 unendlich fern sind; analog folgt für die Büschel

$$(G'.A'B'E'F') = (G.ABEF) = -1,$$

weil die Seitenrichtungen des Quadrats die Winkel seiner Diagonalen halbieren. Man gibt diesen allgemeinen Eigenschaften aller Vierecke, denen analoge aller Vierseite beizugesellen sind, zweckmäßigen Ausdruck durch die folgende Terminologie:

Vier Punkte A, B, C, D bestimmen ein vollständiges Viereck mit drei Paaren von Gegenseiten AB, CD; BC, DA;

Vier Gerade a, b, c, d bestimmen ein vollständiges Vierseit mit drei Paaren von Gegenecken ab, cd; bc, da; ca,

CA, *BD*, deren Schnittpunkte *E*, *F*, *G* Diagonalpunkte desselben und durch die Diagonalen *EF*, *FG*, *GE* verbunden heißen sollen.

In jedem Diagonalpunkte bilden die Seiten und die Diagonalen, die durch ihn gehen, ein harmonisches Büschel; auf der gegenüberliegenden Diagonale die Diagonalpunkte mit den Punkten der nicht durch sie gehenden Seiten eine harmonische Reihe.

bd, deren Verbindungslinien *e*, *f*, *g* Diagonalen desselben und sich in den Diagonalpunkten *ef*, *fg*, *ge* schneidend heißen sollen.

In jeder Diagonale bilden die Ecken und die Diagonalpunkte, die auf ihr liegen, eine harmonische Reihe; am gegenüberliegenden Diagonalpunkt seine Diagonalen und die Strahlen nach den nicht in ihnen liegenden Ecken ein harmonisches Büschel.

Mit Hilfe der vorigen Sätze konstruiert man zu jedem Punkte *C* in Bezug auf zwei Punkte *A B* derselben Geraden den vierten harmonischen Punkt *D* und zu jedem Strahle *c* in Bezug auf zwei Strahlen *a*, *b* desselben Büschels den vierten harmonischen Strahl *d*. Man wählt im ersten Falle auf einer willkürlichen Geraden durch *C* zwei Punkte *E*, *F*, zieht *EA* und *FB*, die sich in *G* und ebenso *EB* und *FA*, die sich in *H* schneiden und erhält *D* auf *GH*.

Ebenso zieht man im zweiten Falle durch einen angenommenen Punkt auf *c* zwei Gerade *e*, *f*, bestimmt *ea* und *fb*, die auf *g*, und *eb*, *fa*, die auf *h* liegen und erhält *d* als durch *gh* gehend.

Die erste Konstruktion ist aus der Figur S. 71 zu erhalten, wenn man noch die Gerade *AT* zieht, die *BC'* in *D'* schneidet; dann sind *B'D'D* in einer geraden Linie.

Hier ist der Gebrauch des Zirkels vermieden, die Konstruktion linear.

15) Welche Gestalt erhalten die Sätze von 14), wenn eine der Ecken *D* des Vierecks oder eine der Seiten *d* des Vierseits als unendlich fern gedacht wird?

16) Wenn in der allgemeinen Zentralprojektion des § 6 zwei gerade Linien g_1 und g_2 dasselbe Bild und vertauschte Bestimmungspunkte *S*, *U* haben — also S_1 in U_2' und S_2 in U_1' — so lehrt die im Beisp. zu § 6* gezeigte Umlegung mit der projizierenden Ebene, daß ihr Schnittpunkt in derjenigen Ebene des Büschels von der Scheitelkante 𝔲 liegt, welche zur Ebene *C*𝔲 harmonisch konjugiert ist in Bezug auf die Bildebene **S** und die feste Ebene **U**; sein Bild ist der vierte harmonische Punkt zu *S*, *U'* und dem Schnittpunkt des Bildes der Geraden mit 𝔲. Dieselbe Ebene ist somit auch der Ort für die Durchschnittslinien aller der Ebenenpaare, für welche die bestimmenden Geraden *s* und *u'* verkehrt aufeinanderfallen, und die Bilder jener Durchschnittslinien sind harmonisch konjugiert zu 𝔲 in Bezug auf *s* und *u'*. Für **U** als

unendlich fern wird die bezeichnete feste Ebene zur zweiten Parallelebene; etc. Man erläutere die Spezialisierung hiervon für die orthogonale Parallelprojektion mit einem Bilde und zwei Fix-Ebenen **S** und **U**.

17. Sind von zwei Gruppen von gleichem Doppelverhältnis in projektivischen Elementargebilden erster Stufe (§ 16 Ende) drei Paare entsprechender Elemente gegeben, z. B. in zwei Reihen von Punkten die Paare A, A'; B, B'; C, C', so bestimmt das Gesetz der Doppelverhältnisgleichheit

$$(ABCX) = (A'B'C'X')$$

zu jedem vierten Elemente X der einen Reihe das entsprechende Element X' der andern.

Läßt man X die ganze Gerade ABC in bestimmtem Sinne durchlaufen, so durchläuft X' gleichzeitig im entsprechenden Sinne (§ 14, Schluß) die ganze Gerade A', B', C' und man erhält zwei projektivische oder speziell perspektivische Reihen von unendlich vielen Punkten, sagen wir vollständige projektivische Reihen. Die entsprechenden Gruppen von vier Elementen derselben haben gleiches Doppelverhältnis.

Ihr Zusammenhang werde durch die Formel ausgedrückt

$$(ABCDE\ldots) = (A'B'C'D'E'\ldots).$$

Das Analoge gilt für zwei Strahlenbüschel und für ein Strahlenbüschel und eine Punktreihe, etc., nach den Relationen

$$(abcde\ldots) = (a'b'c'd'e'\ldots), \quad (ABCDE\ldots) = (a'b'c'd'e'\ldots)$$

Wenn zwei projektivische Reihen oder Büschel drei Elemente entsprechend gemein haben, so sind sie demnach identisch. Also auch: Wenn von einer Reihe und einem dazu projektivischen Büschel von Strahlen oder Ebenen — überhaupt von zwei projektivischen und ungleichartigen der Gruppe von Gebilden: Punktreihe, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel — drei Elemente des einen in den entsprechenden Elementen des andern liegen, so liegen alle Elemente des einen in den entsprechenden des andern. Und wenn zwei projektivische Reihen den gemeinsamen Punkt, resp. zwei projektivische Büschel in derselben Ebene den gemeinsamen Strahl entsprechend haben, so liegen sie perspektivisch, d. h. sie sind Schnitte eines Strahlbüschels oder die Verbindungsgeraden aller entsprechenden Punktepaare gehen durch ein Zentrum; respektive sie sind

Scheine oder projizierende Büschel derselben Reihe oder die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlenpaare liegen in einer Geraden oder Perspektivachse. In dieser perspektivischen Lage erkannten wir, daß zwischen projektivischen Reihen und Büscheln Übereinstimmung des Bewegungssinnes besteht, d. h. daß die entsprechenden zu vier Elementen des einen, die in einem bestimmten Bewegungssinne aufeinander folgen, wiederum in einem bestimmten Bewegungssinne im andern sich folgen. Es ist klar, daß drei Elemente desselben Gebildes durch ihre Aufeinanderfolge einen Bewegungssinn in demselben festsetzen und somit auch die drei entsprechenden im andern den entsprechenden Bewegungssinn; alle übrigen Paare entsprechender Elemente beider Gebilde müssen sich in die so bestimmte Folgeordnung entsprechend einfügen.

Mit Hilfe dieser Charakteristik der perspektivischen Lage gleichartiger projektivischer Gebilde, nach welcher die beiden Reihen oder Büschel das gemeinsame Element — bei Ebenenbüscheln ist daher Vorbedingung, daß sie eine gemeinsame Ebene enthalten — entsprechend gemein haben, lassen sich zunächst vollständige projektivische Reihen und Büschel einer Ebene in allgemeiner Lage aus drei Paaren entsprechender Elemente linear konstruieren.

Sind A, B, C in der Geraden t und A', B', C' in t' (Figur S. 79) die drei entsprechenden Paare von Punkten, so sollen zu den Punkten $D, E, \ldots$ die entsprechenden $D', E', \ldots$ nach dem Gesetze der Projektivität gefunden werden. Denken wir aus einem Paar entsprechender Punkte wie A, A' oder B, B', etc., die Strahlenbüschel über der jedesmaligen andern Reihe gebildet, so hat man nach leichtverständlicher Bezeichnung

$$(A\,.\,A'B'C'D'\ldots) = (A'\,.\,ABCD\ldots),$$

und diese Büschel sind perspektivisch, weil in ihrem gemeinsamen Strahl AA' zwei entsprechende Strahlen derselben vereinigt sind; sie stehen also über derselben Reihe oder haben eine perspektivische Achse t'', den Ort der Schnittpunkte der Paare von Geraden $AB', A'B$; $AC', A'C$; $AD', A'D$ etc. Dieselbe ist somit aus den Punktepaaren AA', BB', CC' bestimmt und dient ihrerseits zur Bestimmung aller übrigen Paare ent-

sprechender Punkte DD', EE', etc.: Man zieht (Figur S. 79) $A'E$, verbindet den Schnittpunkt mit t'' mit A und erhält in t' den Punkt E'. Im Schnittpunkt der Geraden t, t' sind zwei nicht entsprechende Punkte O, P' vereinigt und die Konstruktion zeigt, daß ihre entsprechenden O' und P in t' und t die Punkte sind, welche diese mit der perspektivischen Achse t'' gemein haben. Daraus folgt, daß die perspektivische Achse t'' von der Wahl der Scheitel (A, A') der Büschel unter den Paaren der Punkte unabhängig ist, daß also die Geraden BC' und $B'C$ sich gleichfalls in ihr schneiden; man erhält also drei Punkte der perspektivischen Achse aus den gegebenen Elementen.

Wenn man in der Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte z. B. in AA' ein Paar Punkte T, T' willkürlich wählt, um aus ihnen über den Reihen in t, t' bez. Büschel zu bilden, so sind dieselben auch perspektivisch und ihre perspektivische Achse t'' erlaubt dieselbe Benutzung wie vorher. Sie ist aber nur durch zwei Punkte bestimmt und liefert nicht mehr unmittelbar durch ihren Schnitt mit t', t die Punkte O', P; doch erhält man dieselben leicht nach dem nämlichen allgemeinen Verfahren. Man kann die dreipunktige als die perspektivische Achse von der unbestimmten letzterwähnten als einer perspektivischen Achse unterscheiden; die Aufgabe, diese letzte mit einer beliebigen Geraden der Ebene identisch zu machen, hat zwei Lösungen. Vergl. § 21, 7.

B. 1) Man erhält die Gegenpunkte R, Q' der beiden projektivischen Reihen durch die Konstruktionen des Textes als die entsprechenden der unendlich fernen Punkte R' Q derselben; man zeige, daß im Falle der ersten Konstruktion die Gerade RQ' zu t'' parallel ist. In Figur auf S. 79 ist D' aus D mittels Q' bestimmt.

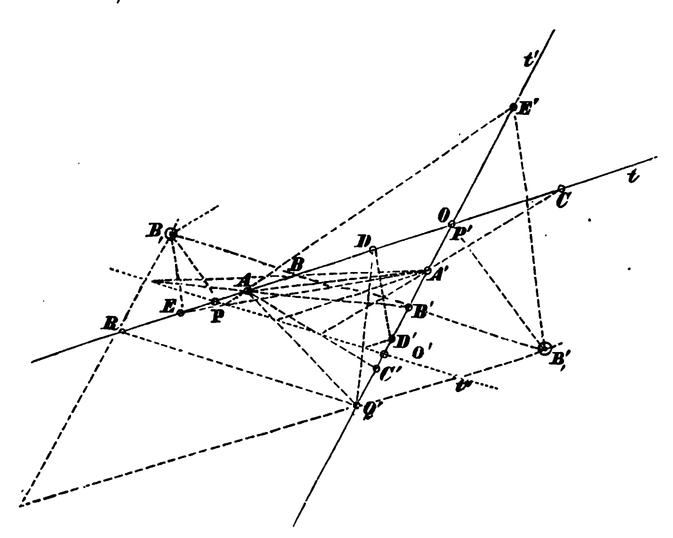
2) Die Schnittpunkte der Verbindungsstrahlen der Gegenpunkte mit ihren entsprechenden d. h. von QQ' und RR' mit irgend einem Verbindungsstrahl BB' entsprechender Punkte sind Scheitel gleicher und paralleler Büschel über den projektivischen Reihen — weil diese Büschel den Scheitelstrahl als sich selbst entsprechend haben und somit perspektivisch sind, aber (wegen zwei Paaren entsprechender und paralleler Strahlen) mit der unendlich fernen Geraden als Achse. Die von den Reihen dieser Scheitel B_1', B_1 (Figur auf S. 79) in QQ' und RR' gebildeten Reihen sind projektivisch.

Wenn die gegebenen Reihen perspektivisch sind, so markiert jede durch ihren Schnittpunkt S gezogene Gerade in QQ' und RR'

d. i. in $Q'\mathfrak{C}$ und $R\mathfrak{C}$ zwei solche Scheitel T, T' paralleler Büschel über denselben. (Vergl. Figur auf S. 64.)

3) Mit Hilfe der Gegenpunkte bestimmt man die entsprechend gleichen Strecken wie in § 15 und insbesondere die entsprechenden Nullstrecken. Die Beachtung des Sinnes $A'Q'R'$ und des entsprechenden Sinnes AQR beseitigt auch die scheinbare Unbestimmtheit der Konstruktion.

4) Zwei projektivische Reihen t, t' sind vollkommen bestimmt durch die perspektivische Achse t'' oder $O'P$ und ein Paar AA' entsprechender Punkte oder den Gegenpunkt der einen von ihnen; oder auch durch die Gegenpunkte Q', R und ein Paar entsprechender Punkte A, A'.



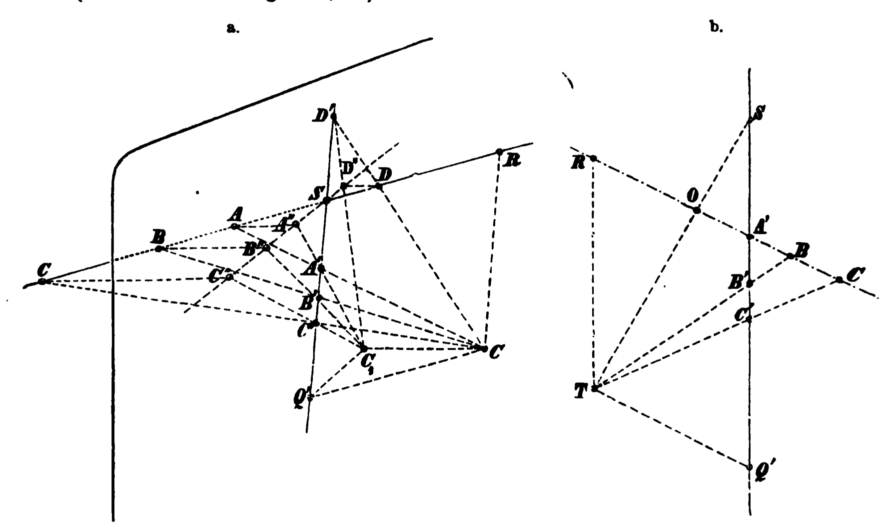
5) Wenn die Gegenpunkte unendlich fern sind, d. i. wenn die unendlich fernen Punkte der Reihen sich entsprechen, so findet **Ähnlichkeit** oder Proportionalität zwischen denselben statt, man hat $(ABX\infty) = (A'B'X'\infty')$ oder $AX : BX = A'X' : B'X'$. Die Konstruktion zeigt dasselbe; das Verjüngungs- oder Ähnlichkeitsverhältnis ist $OP : O'P'$. Dies ist das Verhalten einer zur Tafel parallelen Geraden g zu ihrem zentralprojektivischem Bilde g' (§ 15, 3); das Ähnlichkeitsverhältnis ist $p : p'$, das Verhältnis der in derselben Geraden gemessenen Abstände des Zentrums C von der Geraden und ihrem Bilde. Es ist auch das Verhalten jeder Geraden g zu ihrer Projektion g' aus einem unendlich fernen Zentrum; die Konstante des Ähnlichkeitsverhältnisses ist von der Lage der Geraden gegen die Bildebene und die projizierenden Strahlen abhängig. (Vergl. § 21.) Ähnliche Reihen sind durch zwei Paare

A, A' und B, B' entsprechender Punkte bestimmt; man konstruiere sie daraus mit dem Lineal nach der allgemeinen Konstruktion.

6) Wenn die perspektivische Achse t'' einer der Halbierungslinien des Winkels (t, t') parallel geht, so sind die projektivisch ähnlichen Reihen insbesondere projektivisch gleich; $OP : O'P' = \pm 1$. (Vergl. § 21.)

7) Verschiebt man die Reihe t um die Strecke PP' und im Sinne derselben in sich selbst, oder die Reihe t' um die Strecke $O'O$ und im Sinne derselben, so werden beide Reihen perspektivisch.

8) Man bestimme die Distanz, den Durchstoßpunkt S und Fluchtpunkt Q' einer Geraden, wenn für drei Punkte derselben die Bilder A', B', C' und die Tafelabstände y_1, y_2, y_3 gegeben sind. (Nachstehende Figur a, b.)



Ist C das Zentrum der Projektion (vorstehende Figur a), g die Gerade mit den Punkten A, B, C, D; S ihr Durchstoß-, R ihr Verschwindungspunkt, also Q' ihr Fluchtpunkt, g' ihr Bild, mit den Bildern A', B', C', D' der besagten Punkte; ist C_1 der Hauptpunkt und somit g'', die durch S zu C_1Q' gezogene Parallele, der Ort der Fußpunkte A'', B'', C'', D'' der Tafelnormalen von A, B, C, D, so hat man $(ABCD) = (A'B'C'D') = (A''B''C''D'')$, d. h. für y als die Tafelordinate von D

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} : \frac{y_1 - y}{y_2 - y}.$$

Legt man (vorstehende Figur b) also durch A' eine Gerade, in der man die y von einem Anfangspunkte O aus mit Rücksicht auf ihren Sinn so abträgt, daß y_1 in A' endigt, so liefern die Ordinaten y_2, y_3 Punkte B, C, die mit B', C' verbunden Strahlen

eines Büschels vom Scheitel T liefern, welches die vorige Beziehung abbildet. Die Verbindung von T mit einem beliebigen Punkte D' der Geraden $A'B'C'$ schneidet in $A'BC$ eine Länge OD ab, welche der Ordinate von D (dem Original von D') gleich ist; denn es ist

$$(A'B'C'D') = (A'BCD) = \frac{A'C}{BC} : \frac{A'D}{BD} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} : \frac{y_1 - y}{y_2 - y}.$$

Der Strahl von T nach dem Anfangspunkte O gibt den Punkt des Bildes S, welchem die Tafelordinate Null entspricht; der zu $A'BC$ parallele Strahl aus T gibt in $A'B'$ den Punkt Q', der der unendlich großen Ordinate entspricht; der Strahl TR parallel $A'B'$ gibt in dem Abstande OR die Ordinate des Verschwindungspunktes R, d. h. die Distanz d. Man erhält dieselbe auch durch den Strahl TM' nach dem Mittelpunkt M' der Strecke SQ', da dieser die Ordinate von M gibt. (§ 3 f.)

Wenn weitere Data fehlen, so kann der Hauptpunkt C_1 jetzt willkürlich festgesetzt werden, sodaß den gegebenen Bestimmungen ein vollständiges Strahlenbündel vom Scheitel S entspricht. (§ 3, 2.)

9) Es ist ein Spezialfall dieser Bestimmung, wenn die Gerade durch ihren Durchstoß- und Fluchtpunkt bei gegebener Distanz bestimmt wird; es sind die Bilder der Punkte von den Tafelordinaten Null, Unendlich und d gegeben. Wie modifiziert sich die Konstruktion von Aufg. 8, wenn der Durchstoßpunkt S oder der Fluchtpunkt Q' der Geraden bekannt ist; oder der Punkt M'?

10) Alle ebenen Schnitte desselben Ebenenbüschels sind perspektivische Strahlenbüschel, inbesondere gleiche, wenn die Ebenen parallel sind oder wenn eine Halbierungsebene ihres Flächenwinkels zur Scheitelkante des Ebenenbüschels normal ist. Die Reihen, welche dasselbe Ebenenbüschel aus zwei Geraden schneidet, sind projektivisch, insbesondere ähnlich, wenn die Geraden zu derselben Ebene des Büschels parallel sind, weil ihre Parallelebenen im Büschel die Gegenpunkte enthalten; wenn sie sich schneiden, perspektivisch für den Schnittpunkt ihrer Ebene mit der Scheitelkante als Zentrum. (Vergl. § 16, Schluß und Figur auf S. 68 unten.)

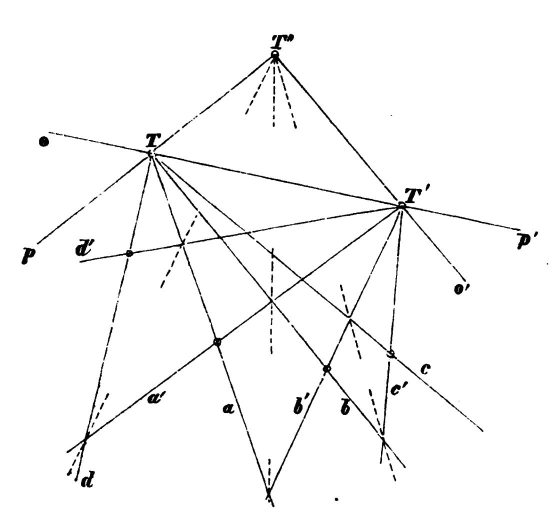
Strahlenbüschel sind also perspektivisch als Scheine derselben Reihe, d. h. wenn sie für dieselbe projizierend sind, und als Schnitte desselben Ebenenbüschels; Reihen sind perspektivisch als Schnitte desselben Strahlenbüschels, oder desselben Ebenenbüschels, falls ihre Geraden sich schneiden; Ebenenbüschel sind perspektivisch als projizierende oder als Scheine desselben Strahlenbüschels und als Scheine derselben Reihe aus sich schneidenden Geraden.

18. In zwei projektivischen Strahlenbüscheln von den Scheitelpunkten T, T' konstruiert man aus drei Paaren entsprechender Strahlen a, a'; b, b'; c, c' die ferneren entsprechenden Strahlenpaare d, d' etc., indem man die Reihen betrachtet, welche zwei entsprechende Strahlen z. B. a, a' mit dem jedes-

maligen andern Büschel bestimmen; man hat in leicht verständlicher Bezeichnung

$$(a\,.\,a'b'c'\ldots) = (a'\,.\,abc\ldots)$$

und da diese Reihen, weil sie in aa' einen Punkt entsprechend gemein haben, perspektivisch sind, so erzeugen sie durch die Verbindungslinien der Paare ihrer entsprechenden Punkte ein Strahlenbüschel, d. h. sie haben ein perspektivisches Zentrum T''. Dasselbe ist zunächst nach der getroffenen Wahl der Reihen durch die Geraden ab', $a'b$; ac', $a'c$ aus den gegebenen Elementen ten bestimmt und dient zur Konstruktion aller übrigen Paare entsprechender Strahlen (beistehende Figur); es liefert zu d den entsprechenden d', weil $a'd$, ad' eine durch T'' gehende Gerade sein muß. Im Verbindungsstrahl der Scheitel TT' sind zwei einander nicht entsprechende Strahlen o, p' der beiden Büschel vereinigt; die Konstruktion zeigt, daß die ihnen entsprechenden Strahlen o', p die Geraden $T'T''$, TT'' sind. Es folgt daraus, daß die Lage des perspektivischen Zentrums T'' von der zufälligen Wahl des Paares entsprechender Strahlen a, a' für die Reihenbildung unabhängig ist, daß also auch die dritte durch die Data bestimmte Gerade bc', $b'c$ durch dasselbe gehen muß. Man erhält dasselbe also als Schnittpunkt von drei Geraden — eine nützliche Genauigkeitsprobe.



Die Konstruktion projektivischer Ebenenbüschel kann nach § 16 (Figur auf S. 69) darauf oder auf die projektivischer Reihen zurückgeführt werden.

Wir geben unter den Beispielen die Entwicklung der Lehre von den entsprechend gleichen Winkeln und bemerken,

daß dieselbe auf die projektivischen Ebenenbüschel ohne wesentliche Änderung übergeht. (5 bis 10, abgesehen von dem Gebrauch der Kreisbüschel bei 9.)

B. 1) Wenn man durch den Schnittpunkt von zwei entsprechenden Strahlen, z. B. aa' ein Paar Gerade t, t' legt, um in ihnen die Reihen der Schnittpunkte mit den gegebenen Büscheln T, T' zu bilden, so sind diese auch perspektivisch und ihr perspektivisches Zentrum T'' gestattet die Konstruktion aller übrigen entsprechenden Strahlenpaare der Büschel T, T'. Nur liefert es nicht direkt o' und p. (Vergl. § 17, Schluß.) Wie erhält man diese und damit das perspektivische Zentrum der Textkonstruktion?

2) Zwei projektivische Strahlenbüschel von den Scheiteln T, T' sind vollkommen bestimmt durch das perspektivische Zentrum im Sinne des Textes und ein Paar entsprechender Strahlen.

3) Wenn die Transversalen t, t' aus dem Schnittpunkt des Paares aa' in 1) zu einem Paar entsprechender Strahlen b, b' parallel gelegt werden, so rückt das perspektivische Zentrum T'' der in ihnen entstehenden Reihen in die unendlich ferne Gerade (als Strahl tb, $t'b'$) oder wird zur Richtung von tc, $t'c'$.

Denkt man t festgehalten und t' um aa' gedreht, so rückt das Zentrum T'' auf einem Strahle des Büschels T' fort und gelangt auf ihm nach dem Vorigen auch in das Unendliche; den einzelnen Lagen von t entsprechen so die Strahlen aus T' und ebenso analog bei festem t' und drehendem t.

Soll ein Zentrum T'' in einem beliebigen Punkte der Ebene liegen, so hat man ein Viereck zu zeichnen, dessen Ecken in b, b', c, c' liegen, während T'' und aa' zwei seiner Diagonalpunkte sind; man erhält zwei Lösungen für das Problem. (Vergl. § 21, 7.)

4) Dreht man das Büschel T' um den Winkel (o', o) und im Sinne desselben um seinen Scheitel, so wird es mit dem Büschel T perspektivisch; ebenso T mit T' durch die Drehung (p, p'). Dann wird TT' durch das perspektivische Zentrum T'' und die Perspektivaxe s harmonisch geteilt. Ebenso bei der perspektivischen Lage der Reihen (§ 17, 7) der Winkel tt' durch t'' und den nach dem Zentrum gehenden Strahl.

5) In den projektivischen Strahlenbüscheln T, T' existieren wie in den projektivischen Reihen zwei Paare von Elementen, die das Doppelverhältnis auf ein einfaches Verhältnis reduzieren (§ 16, 6, 7); es sind die entsprechenden Paare der Rechtwinkelstrahlen, Strahlenpaare qq', rr' (diese Bezeichnung wird kaum Zweideutigkeiten veranlassen) von der Eigenschaft, daß sowohl (q, r) als (q', r') ein rechter Winkel ist. Für sie hat man

$$(abqr) = (a'b'q'r')$$

oder

$$\frac{\sin(a, q)}{\sin(b, q)} : \frac{\sin(a, r)}{\sin(b, r)} = \frac{\sin(a', q')}{\sin(b', q')} : \frac{\sin(a', r')}{\sin(b', r')},$$

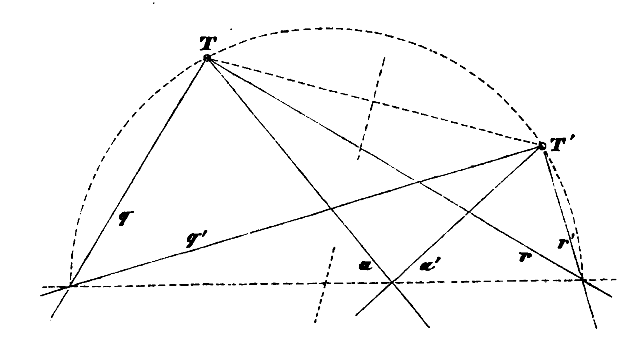
d. h. $\tan(a, q) : \tan(b, q) = \tan(a', q') : \tan(b', q')$ oder auch

$$\tan(a', q') : \tan(a, q) = \tan(b', q') : \tan(b, q), \quad \text{und}$$
$$\tan(a', q') \,.\, \tan(a, r) = \tan(b', q') \,.\, \tan(b, r).$$

Dieses konstante Produkt vergleicht sich mit der perspektivischen Potenz des § 15

$$k^2 = A'Q' \,.\, AR.$$

6) Um die entsprechenden Rechtwinkelpaare qr, $q'r'$ von zwei projektivischen Strahlenbüscheln T, T' zu konstruieren, macht man dieselben durch Drehung des einen perspektivisch (4), bestimmt ihre Perspektivachse und beschreibt den durch T, T' gehenden Kreis, der seinen Mittelpunkt in ihr hat (nachstehende Figur); derselbe



schneidet die perspektivische Achse in den Fußpunkten der Strahlen q, q' und r, r' der entsprechenden Rechtwinkelpaare.

Für die entsprechenden Büschel aus (T), T' über s in der Figur auf S. 58 § 14 entspricht jedem rechten Winkel des einen ein symmetrisch zu s gelegener rechter Winkel des andern — sie sind symmetrisch gleich. Die Büschel um $\mathfrak{C}$ sind in Deckung oder haben auch lauter rechte entsprechende Winkel in Deckung.

7) Schreibt man die Endgleichung von 5) in der Form

$$\tan br : \tan ar = \tan a'q' : \tan b'q'$$

und bildet man

$$(\tan ar - \tan br) : \tan ar = (\tan b'q' - \tan a'q') : \tan b'q',$$

so folgt nach der Formel

$$\tan\alpha - \tan\beta = \tan(\alpha - \beta)\,(1 + \tan\alpha\tan\beta)$$
$$\tan ab \cdot \frac{1 + \tan ar \,.\, \tan br}{\tan ar} = \tan b'a' \,\frac{1 + \tan a'q' \,.\, \tan b'q'}{\tan b'q'};$$

also insbesondere für $\angle ab = \angle a'b'$ oder $\tan ab = \tan a'b'$

$$\tan b'q' + \tan ar \,.\, \tan b'q' \,.\, \tan br = \tan ar + \tan a'q' \,.\, \tan ar \,.\, \tan b'q',$$

d. h. wegen

$$\tan b'q' \,.\, \tan br = \tan ar \,.\, \tan a'q' = k^2$$

$$\tan b'q'\,(1 - k^2) = \tan ar\,(1 - k^2), \quad \text{somit} \quad \tan b'q' = \tan ar$$

oder $\angle b'q' = \angle ar$ und daher auch

$$\angle br = \angle a'q', \quad \angle bq = \angle a'r', \quad \angle b'r' = aq;$$

und dies sind die zu der Konstruktion gleicher entsprechender Strecken in projektivischen Reihen im § 15 vollkommen analogen Konstruktionen für die gleichen entsprechenden Winkel zweier projektivischen Büschel. (Vergl. § 17, 3 und § 20.)

Wenn man den Winkel aq mit b' und $b^{*\prime}$ an r' und den Winkel $a'q'$ in b und b^* an r anträgt, sodaß $\angle ab = \angle a'b'$ und $\angle ab^* = \angle a'b^{*\prime}$ ist, so wird das eine Paar dieser entsprechend gleichen Winkel notwendig durch die Rechtwinkelstrahlen getrennt, das andere nicht.

Wenn man zwei projektivische Büschel (Scheitel T, T') dadurch perspektivisch macht, daß man zwei entsprechende ihrer Rechtwinkelstrahlen vereinigt, etwa r und r', sodaß ihre Perspektivachse s zum andern Paar q, q' parallel und durch einen Punkt A, den Schnittpunkt eines dritten Paares entsprechender Strahlen a, a' bestimmt wird, so sind für dieselbe zwei Lagen s, s^* möglich (Fußpunkte S, S^* in der Geraden TT'), entsprechend den beiden möglichen Antragungen des Winkels $q'a'$ an q' (die s^* ist also durch $a, a^{*\prime}$ oder A^* bestimmt). Für beide liest man aus der Figur unmittelbar ab (wir schreiben es nur für die erste)

$$\tan a'q' = \frac{T'S}{SA}, \quad \tan ar = \frac{SA}{TS},$$

also ihr Produkt $= \dfrac{T'S}{TS}$, für das Strahlenpaar a, a' dasselbe wie für jedes andere, weil A herausfällt — die Relation am Schlusse von 5).

Man hat aber in derselben Figur sogleich die konstruktive Ableitung der Regeln von 6) für die Bestimmung der Endstrahlen gleicher entsprechender Drehungen von a bez. a' aus. Denn s ist zugleich Höhe im Dreieck ATT' und s^* ebenso in A^*TT'; die beiden andern Höhen des ersten schneiden sich auf s in B und die des zweiten auf s^* in B^*, und für TB bez. TB^* als b und b^* sind also $T'BB^*$ oder b' und $T'A^*$ oder $a^{*\prime}$ jene Endstrahlen mit der Relation $ab = a'b'$ und bez. $ab^* = a^{*\prime}b'$; jene die von den Rechtwinkelstrahlen nicht getrennten, diese die getrennten.

Beschreibt man über TT' als Durchmesser den Kreis, so schneidet derselbe s in zwei Punkten, für welche das sie mit T, T' verbindende Dreieck rechtwinklig ist, sodaß seine Höhen aus T, T' mit den bezüglichen Katheten zusammenfallen; d. h. in der ersten Zusammenlegung gibt es zwei entsprechende Nullwinkel. In der zweiten erhält man solche nicht.

8) Zur Bestimmung der entsprechend gleichen Winkel von vorgeschriebener Größe in projektivischen Büscheln dient folgendes. Es ist

$$\tan ab = \tan(ar - br) = \frac{\tan ar - \tan br}{1 + \tan ar \tan br} = \frac{k^2 - \tan^2 a'q'}{\tan a'q' (1 + k^2)}$$

und daraus

$$\tan^2 a'q' + (1 + k^2) \tan a'q' \,.\, \tan ab = k^2$$

$$\tan a'q' = -\frac{1 + k^2}{2} \tan ab \pm \sqrt{\left(\frac{1 + k^2}{2}\right)^2 \tan^2 ab + k^2}\,.$$

$ab = 90^0$ führt auf die entsprechenden rechten Winkel zurück ($a'q' = 90^0$).

Für $ab = 0^0$ ist insbesondere

$$\tan a'q' = \pm k\,.$$

Es ist klar, daß die entsprechend gleichen Winkel Null nur in dem System derjenigen gleichwinkeligen Paare (vergl. 7) vorkommen können, die durch die Rechtwinkelpaare nicht getrennt werden.

Wenn man in zwei projektivischen Ebenenbüscheln die entsprechenden Rechtwinkelpaare **Q**, **R** und **Q**$'$, **R**$'$ kennt, so liefern dieselben Regeln die Konstruktion ihrer entsprechend gleichen Winkel; diese bilden zwei Systeme, in deren einem diese Winkel durch die Gegenebenen **Q**, **R** und **Q**$'$, **R**$'$ getrennt werden oder sie einschließen, während sie in dem andern ausgeschlossen werden; in dem letzten kommen zwei entsprechende Nullwinkel vor, welche sich bei der einen der durch verkehrte Deckung der Gegenebenenpaare erzielten Zusammenlegungen vereinigen. (Vergl. § 20.) Die praktische Konstruktion der entsprechenden Rechtwinkelpaare geschieht durch die der Normalschnitte der Büschel — auch in der allgemeinen Lage gleich einfach.

Ein beliebiger Kreis durch die Scheitel T, T' (Figur S. 84) der perspektivischen Strahlbüschel, der die Achse derselben schneidet, bestimmt in ihr die Fußpunkte zweier entsprechender Strahlenpaare von gleichen Winkeln; wenn T und T' auf einerlei Seite der Perspektivaxe liegen, so sind zwei Kreise dieses Büschels (vergl. § 9) berührend zu ihr und liefern die entsprechenden Nullwinkel — alle andern Paare sind in der Tat durch die Rechtwinkelpaare und durcheinander ungetrennt. Man erhält auf demselben Wege das zweite System, indem man einen der Scheitel T durch den ihm orthogonal symmetrischen T^*, in Bezug auf die Perspektivachse, ersetzt; da im Falle der Figur auf S. 84 die Punkte T^*, T' auf verschiedenen Seiten der Perspektivachse liegen, so gibt es keine berührenden Kreise und keine entsprechenden Nullwinkel in diesem System; seine Paare werden auch sämtlich durch die Rechtwinkelpaare getrennt und trennen einander.

9) Man zeichne in zwei zentrisch kollinearen Ebenen die entsprechenden kongruenten Dreiecke für gegebene Anfangsecke $B\,(B')$

und von ihr ausgehende Seitenlage $a(a')$. Man bestimmt die C, C' nach der Regel der entsprechend gleichen Strecken und die Lagen von BA oder $c(c')$ nach der der entsprechend gleichen Winkel, hierauf die Längen von BA wieder nach der der entsprechend gleichen Strecken. Für die Ecke $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}')$ tritt Unbestimmtheit ein, die Geraden t, t' sind die Orte der Basisecken; analog für die Seite $s(s')$ mit T, T'.

10) Wenn die betrachteten Büschel gemeinschaftlichen Scheitel $S(S')$ haben und einer zentrischen Kollineation angehören, sodaß die sich selbst entsprechenden Strahlen s (die Kollineationsachse) und c (der Strahl nach dem Kollineationszentrum $\mathfrak{C}$) sind (vergl. Figur auf S. 92), so erhält man analog zu § 15, 4)

$$1)\ cq' = rs,\quad cq = r's;\quad cr = q's,\quad cr' = qs;$$

sodann aber für Strahlenpaare t_1, t_1' und t_2, t_2' nach den Relationen

$$t_1 c = ct_1',\quad t_2 s = st_2'$$

die in Regeln der Symmetrie übertragbaren Relationen

$$2)\ t_1 q = cr' = qs,\ t_1 r = cq' = rs,\ cq = t_1' r' = r's,\ cr = t_1' q' = q's;$$
$$t_2 q = sr' = qc,\ t_2 r = sq' = rc,\ sq = t_2' r' = r'c,\ sr = t_2' q' = q'c;$$

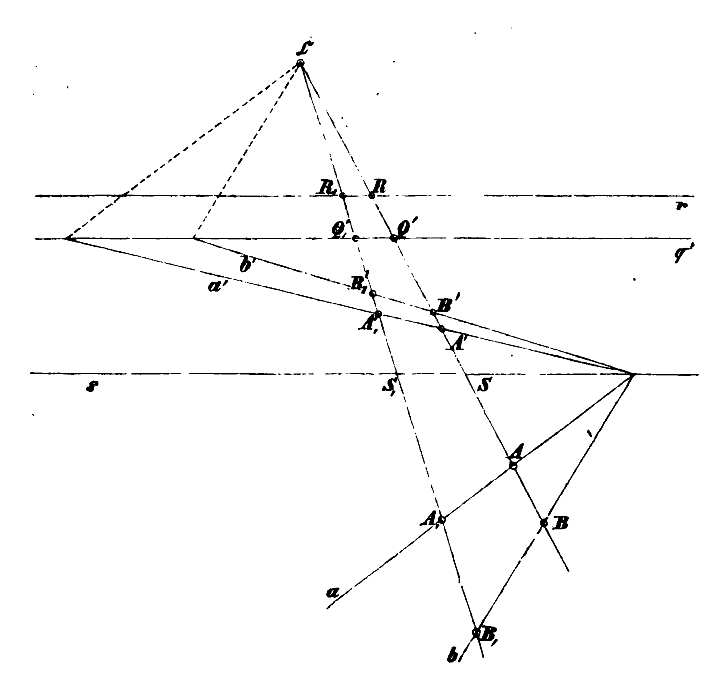
sowie durch Verbindung

$$3)\ t_1' t_2' = t_1 t_2 = sc;\quad t_1 t_1' = t_2 t_2' = 2q'r = 2qr'.$$

19. Die durch die Zentralprojektion gegebene Abhängigkeit ebener Systeme ist nun der Art, daß jeder geradlinigen Reihe t der Originalebene eine zu ihr perspektivische aus demselben projizierenden Strahlenbüschel geschnittene Reihe t' der Bildebene entspricht; jedem Strahlenbüschel T der Originalebene ein zu ihr perspektivisches aus demselben Büschel projizierender Ebenen geschnittenes und über derselben Reihe in der Spur s stehendes Strahlenbüschel T' der Bildebene. Durch die Umlegung der Originalebene in die Bildebene (§ 11) sind alle diese projektivischen Reihen und Büschel in perspektivischer Lage in einer Ebene vereinigt und wir haben schon (§ 16, 14 f.) Nutzen davon gezogen. Die Anwendung der allgemeinen Gesetze der Doppelverhältnisgleichheit auf die entsprechenden Reihen in den vom Kollineationszentrum $\mathfrak{C}$ ausgehenden Strahlen und auf die entsprechenden Büschel aus den in der Kollineationsachse s liegenden Punkten ist jedoch von besonderem Nutzen für die Einsicht in den Zusammenhang beider Ebenen.

Ist t ein Strahl aus dem Kollineationszentrum, sodaß t'

mit ihm zusammenfällt und den Punkten A, B dieses Strahles andere Punkte A', B' desselben Strahles als Bilder entsprechen (nachstehende Figur), und ist S der zugehörige Punkt in der Kollineationsachse s, so gilt, weil $\mathfrak{C}$ und S sich selbst entsprechen — wir nennen sie die Doppelpunkte der vereinigten projektivischen Reihen — die Relation



$$(\mathfrak{C}SAB) = (\mathfrak{C}SA'B') \text{ d. h. } \frac{\mathfrak{C}A}{SA} : \frac{\mathfrak{C}B}{SB} = \frac{\mathfrak{C}A'}{SA'} : \frac{\mathfrak{C}B}{SB'}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{C}A}{SA} : \frac{\mathfrak{C}A'}{SA'} = \frac{\mathfrak{C}B}{SB} : \frac{\mathfrak{C}B'}{SB'}, \text{ d. h. } (\mathfrak{C}SAA') = \mathfrak{C}SBB').$$

Bezeichnen A_1, A_1' entsprechende Punkte für einen andern durch das Kollineationszentrum $\mathfrak{C}$ gehenden Strahl t_1, t_1' mit dem Punkt S_1 in der Kollineationsachse, so hat das Doppelverhältnis der Gruppe $\mathfrak{C}S_1A_1A_1'$ denselben Wert, wie das vorige, weil die Geraden AA_1, $A'A_1'$ in einem Punkte TT' der Kollineationsachse zusammentreffen und somit die Reihen $\mathfrak{C}SAA'$ und $\mathfrak{C}S_1A_1A_1'$ aus diesem Punkte perspektivisch sind. Also: Entsprechende Paare von Punkten einer zentrischen

Kollineation in der Ebene bestimmen mit dem Zentrum und dem Durchstoßpunkt des Strahls, auf dem sie liegen, ein Doppelverhältnis, das weder von einem Paar zum andern im nämlichen Strahl, noch von einem Strahl zum andern seinen Wert verändert. Und wenn aa', bb' entsprechende Paare von Strahlen der Systeme sind, die von einem Punkte der Achse s ausgehen und c den von da nach dem Zentrum gehenden Strahl bezeichnet, so hat man ebenso

$$(csaa') = (csbb') = \text{const.};$$

die beiden Konstanten für Reihen und Büschel sind einander gleich, weil die Reihen aus den Strahlenbüscheln geschnitten werden und umgekehrt. Wir nennen diese konstante Zahl das charakteristische Doppelverhältnis der zentrischen Kollineation oder der Zentralprojektion, aus der sie entspringt und wollen sie mit Δ bezeichnen. Unter den Beispielen geben wir seine Reduktion auf einfache Verhältnisse (1, 9) und seine geometrische Bedeutung für die zugehörigen Zentralprojektionen (5); wir geben auch die Konstruktion vereinigter projektivischer Reihen oder Büschel.

B. 1) Sind Q' und R die Gegenpunkte des betrachteten Strahles $\mathfrak{C}S$ aus dem Zentrum $\mathfrak{C}$, so ist für A, A' als ein entsprechendes Paar (Figur auf S. 88)

$$(\mathfrak{C}SAA') = \Delta = (\mathfrak{C}SR\infty) = (\mathfrak{C}S\infty Q'),$$

d. h.

$$\frac{\mathfrak{C}A}{SA} : \frac{\mathfrak{C}A'}{SA'} = \Delta = \frac{\mathfrak{C}R}{SR} = \frac{SQ'}{\mathfrak{C}Q'},$$

oder das charakteristische Doppelverhältnis der Zentralkollineation ist auch das einfache Teilverhältnis, nach welchem auf jedem durch das Zentrum gehenden Strahl $S\mathfrak{C}$ durch Q' und $\mathfrak{C}S$ durch R geteilt werden. Infolgedessen ist Q' von S ebensoweit und in demselben Sinne entfernt wie $\mathfrak{C}$ von R, oder q' von s wie $\mathfrak{C}$ von r, wie bekannt. (§ 9.) Wie lautet die Charakteristik mittels der Punkte (T), T' und wieder $(\mathfrak{T})$, $\mathfrak{T}'$ in Figur auf S. 58?

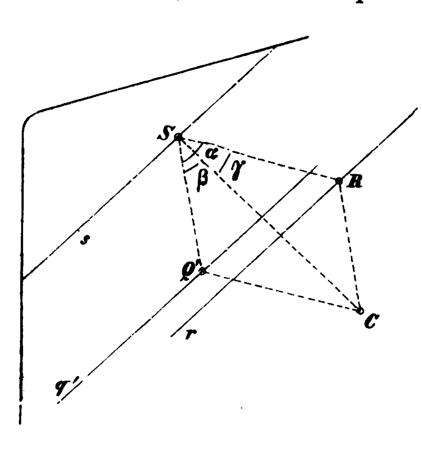
2) Man konstruiere die Zentralkollineationen von den Charakteristiken $\Delta = -\frac{2}{3}$ und $\Delta = \frac{3}{5}$ aus Zentrum und Achse.

3) Auf der Parallelen t_c durch das Kollineationszentrum zur Achse s gilt für entsprechende Punktepaare A, A' die Relation

$$\Delta = (\mathfrak{C} \infty AA') = \mathfrak{C}A : \mathfrak{C}A',$$

d. h. dieselben bilden zwei **ähnliche Reihen** mit dem Ähnlichkeitsverhältnis $\varDelta$ und mit $\mathfrak{C}$ als sich selbst entsprechend, sowie dem zweiten sich selbst entsprechenden Punkt, nämlich dem Durchstoßpunkt, im Unendlichen.

4) Wie läßt sich die vorher gefundene Ähnlichkeit zur Konstruktion zentrisch kollinearer ebener Systeme benutzen? (Vergl. § 21c und § 30; auch § 40.) Je zwei entsprechende zur Kollineationsachse parallele Gerade zeigen gleichfalls die Ähnlichkeit der bezüglichen Reihen.



5) Denken wir vor der Umlegung die Bildebene, die Originalebene und die zu beiden respektive parallelen Ebenen durch das Zentrum C der Projektion (nebenstehende Figur), also die Geraden s, q', r; endlich die Ebene Cs und die zu s normale projizierende Ebene, so schneidet die letzte die vorbezeichneten fünf Ebenen in den vier Seiten und einer Diagonale SC eines Parallelogramms $CRSQ'$, in welchem der Winkel bei S die Tafelneigung α der Ebene ist und dessen Seiten SQ', SR nach der Umlegung in einen zu s normalen Strahl $S\mathfrak{C}$ aus dem Kollineationszentrum fallen. (Vergl. § 14, 5. Q' ist das H von Figg. auf S. 34 u. S. 44.) Bezeichnen wir $\angle Q'SC$ durch β und $\angle CSR$ durch γ, so ist $\alpha = \beta + \gamma$ und

$$\varDelta = \frac{SQ'}{CQ'} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{CR}{SR};$$

d. h. **die charakteristische Konstante der Kollineation ist das Teilverhältnis des Winkels α für die durch die Spur s bestimmte projizierende Ebene.** Sind die Bildebene, die Originalebene und die Charakteristik $\varDelta$ gegeben, so ist der Ort des Zentrums diejenige Ebene, welche den Winkel α, um den drehend die Originalebene in die Bildebene übergeführt wird, nach dem Teilverhältnis $\varDelta$ teilt.

6) Wenn für drei Ebenen die Spuren, die Winkel α_1, α_2, α_3 zur Bildebene und die Charakteristiken $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$ gegeben sind, so ist dadurch das Zentrum der Projektion vollständig bestimmt.

7) Wenn die Charakteristik der zentrischen Kollineation nach der Umlegung um den Winkel α den Wert $\varDelta$ hat, so ist ihr Wert nach Umlegung um den Winkel $(180^0 - \alpha)$ gleich $-\varDelta$.

8) Die Charakteristik $\varDelta = \frac{SQ'}{\mathfrak{C}Q'} = \frac{\mathfrak{C}R}{SR}$ kann die Werte 0, $+1$, ∞ nur annehmen, wenn bez. 1) $SQ' = \mathfrak{C}R = 0$; 2) $\mathfrak{C}Q' = SQ'$, $\mathfrak{C}R = SR$; 3) $\mathfrak{C}Q' = SR = 0$ ist. (§ 16, 10.)

Dem ersten und letzten entspricht das Zusammenfallen der Bilder respektive der Originale auf einem Strahl aus dem Kollineationszentrum in diesen einen Punkt bei Verteilung der Originale respektive Bilder über die ganze Reihe; das Zentrum der Projektion liegt in der einen der beiden Ebenen. Wie sich ihre Punkte und Geraden in diesem Falle entsprechen, ist unschwer weiter auszuführen.

Der Fall $\varDelta = +1$ fordert entweder $\mathfrak{C}$ und s unbestimmt (vergl. § 20, 1) oder er fordert $SQ' = \mathfrak{C}Q'$ und $\mathfrak{C}R = SR$, d. h. $\mathfrak{C}$ in s und die Gegenachsen q' und r äquidistant zu beiden Seiten von s; das Zentrum der Projektion liegt in der Halbierungsebene desjenigen Winkels zwischen Original- und Bildebene, um welchen die Drehung bei der Umlegung nicht erfolgt. Die vereinigten projektivischen Büschel haben in s zusammenfallende Doppelstrahlen, die Reihen in $\mathfrak{C}$ vereinigte Doppelpunkte.

Man erhält $\varDelta = -1$, wenn die Drehung um jenen Winkel selbst erfolgt; wir werden aber von diesem wichtigen Fall der harmonischen Projektion und Kollineation oder der Involution im folgenden Paragraphen speziell handeln.

Hier gedenken wir noch des Falles, wo $\varDelta$ unbestimmt ist, d. h. das Projektionszentrum in jeder Ebene des durch s gehenden Büschels liegt, oder in s selbst, in der Schnittlinie zwischen Original- und Bildebene. Man kann die Art des Entsprechens zwischen den Punkten und Geraden beider Ebenen leicht ausführen und wir kommen auf sie zurück. (Vergl. § 22, f, g.)

Es ist nützlich, die Veränderung von $\varDelta$ mit dem Zentrum $\mathfrak{C}$ für bestimmtes s und q' oder die von q' respektive s mit der Wertveränderung des $\varDelta$ bei festgehaltenem $\mathfrak{C}$ und s, resp. $\mathfrak{C}$ und q' zu betrachten.

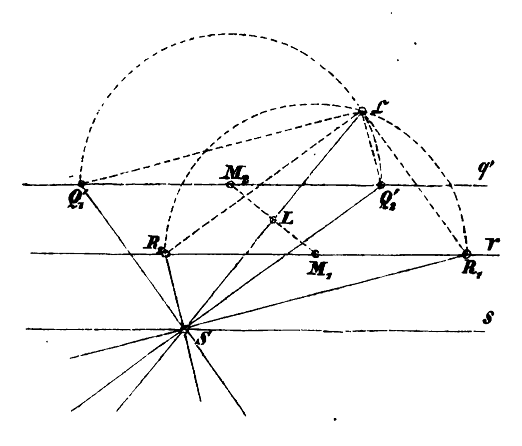
9) Betrachten wir in den konzentrischen entsprechenden Büscheln aus einem Punkte der Kollineationsachse die Paare der entsprechenden Rechtwinkelstrahlen q, q'; r, r', so ist

$$(csqq') = \varDelta = (csrr');$$

mit $\angle cs = 2\alpha$, $\angle r'q = q'r = 2\delta$ und den entsprechenden Werten für die Winkel cq, sq, cq', sq', etc. kommt man leicht zu den Ausdrücken $\varDelta = \tan(\alpha + k) : \tan(\alpha - k)$, d. h. $\tan cq : \tan sq$; etc.

Sind $\mathfrak{C}$, s, q' oder r als Data der zentrischen Kollineation gegeben, so entsprechen jedem Punkte TT' oder S von s als Scheitel bestimmte Rechtwinkelpaare q, r, q', r' oder SR_1, SR_2, SQ_1, SQ_2' (Figur auf S. 92), die man wie folgt konstruiert: Man halbiert $\mathfrak{C}S$ in L, errichtet dort die Normale zu ihr und schneidet mit derselben q' in M_2 und r in M_1; die Kreise, die von M_2 und M_1

als Mittelpunkten aus durch 𝔈 und S gehen, schneiden ihre Durchmesser q' und r in den Gegenpunkten Q_1', Q_2' und R_1, R_2 der entsprechenden Paare der Rechtwinkelstrahlen. Man begründet die Konstruktion durch die Bemerkung, daß von den beiden konzentrischen projektivischen Büscheln $csqr$, $csq'r'$ jedes parallel sich selbst nach 𝔈 verlegt mit dem andern perspektivisch sein muß, wo dann die Gegenachsen q', respektive r als die perspektivischen Achsen derselben entstehen (vergl. Fig. auf S. 84); daß aber hiernach die Konstruktion des § 18, 6 Anwendung finden muß. Das ist, was die angegebene Konstruktion vollzieht. Die Halbierungslinien der von den Doppelstrahlen c, s gebildeten Winkel halbieren auch die Winkel zwischen den Rechtwinkelpaaren SR_1, SQ_2'; SR_2, SQ_1'. (Vergl. § 18, 10.)



10) Mit Hilfe derselben Betrachtung findet man die entsprechenden Rechtwinkelpaare zu zwei beliebigen entsprechenden Punkten A, A'. Aber die Kollineationsachse bestimmt sie auch, als ihre perspektivische Achse, mit dem aus ihr beschriebenen Kreise durch A, A'. (§ 18, 6.)

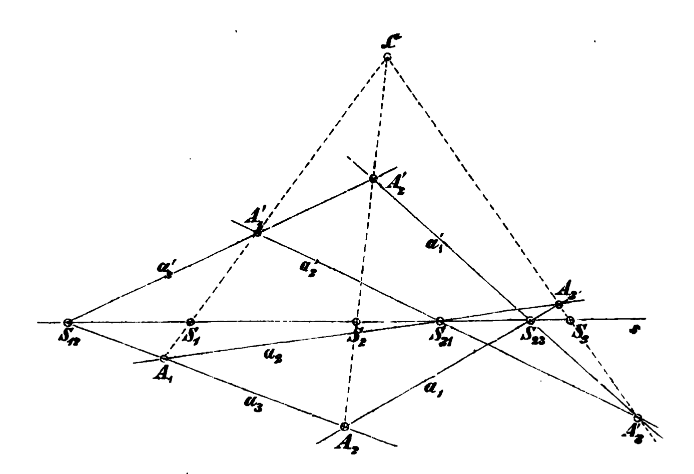
11) Wenn die Ecken von zwei Dreiecken $A_1A_2A_3$, $A_1'A_2'A_3'$ (Figur auf S. 93, oben) in Paaren A_1, A_1' etc. in geraden Linien aus einem Zentrum 𝔈 liegen, so schneiden sich die Paare ihrer entsprechenden Seiten A_1A_2, $A_1'A_2'$; A_2A_3, $A_2'A_3'$; A_3A_1, $A_3'A_1'$ in drei Punkten S_{12}, S_{23}, S_{31} einer geraden Linie s; und umgekehrt.

Betrachtet man nämlich s als die Gerade $S_{23}S_{31}$ und nennt ihre Schnittpunkte mit den Strahlen A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3' respektive S_1, S_2, S_3, so gelten, sofern beide Dreiecke in derselben Ebene liegen, die Relationen perspektivischer Reihen aus S_{23} und S_{31}

$$(\mathfrak{C}S_2A_2A_2') = (\mathfrak{C}S_3A_3A_3'), \quad (\mathfrak{C}S_3A_3A_3') = (\mathfrak{C}S_1A_1A_1')$$

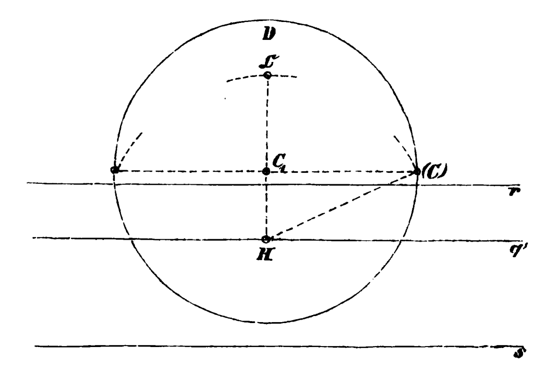
und somit auch $(\mathfrak{C}S_1A_1A_1') = (\mathfrak{C}S_2A_2A_2')$, d. h. auch diese Reihen sind in Perspektive aus S_{12}, und somit S_{12}, S_{23}, S_{31} in einer Geraden s. Daß der umgekehrte Satz gilt, beweist man mit Leichtigkeit, indem man die Charakteristik der entsprechenden Zentralkollineation durch die Büschel aus S_{12}, S_{23}, S_{31} ausdrückt, welche paarweise perspektivisch sind für die Strahlen A_1A_1', etc. als ihre Achsen. Wenn beide Dreiecke nicht in derselben Ebene liegen, so liefert die Anschauung ihres Verhältnisses zum Zentrum 𝔈 als

zweier ebener Schnitte des Mantels einer dreiseitigen Ecke einen unmittelbaren Beweis; und die in dem Satze ausgesprochene Verknüpfung nebst Umkehrung ist in jeder Zentralprojektion der Figur auf eine Ebene dieselbe; überdies läßt sich der Beweis für die Lage in derselben Ebene in aller Form auf den dreidimensionalen Fall



zurückführen. Der Satz von den perspektivischen Dreiecken erhält dadurch seine hohe Bedeutung für die Begründung der projektivischen Geometrie. (Vergl. § 20, 13 f.)

12) Wenn von zwei ebenen Systemen das eine die Zentralprojektion des andern ist, so **bleiben** sie in solcher Beziehung auch bei Drehung des einen um ihre Durchschnittslinie. (Vergl. § 15, 5.) Der Ort, den das Zentrum der Projektion bei dieser Bewegung beschreibt, ist ein Kreis K, dessen Ebene zu jener Schnittlinie normal ist und der seinen Mittelpunkt in der Fluchtlinie der Originalebene in der Anfangslage hat. Einer gegebenen zentrischen Kollineation ebener Systeme $\mathfrak{C}sq'$ (vorstehende Fig.) entsprechen somit unendlich viele Zentralprojektionen von verschiedenen Distanzen und Hauptpunkten; jene haben den Abstand des Kollineationszentrums $\mathfrak{C}$ von q' zu ihrem Maximum, diese liegen innerhalb der Strecke $\mathfrak{C}\mathfrak{C}^*$, welche



durch die beiden Umlegungen des Zentrums (§ 9) begrenzt ist. (Vergl. 5.) Die Entwicklungen des Textes zusammen mit der geometrischen Deutung unter 5) liefern den Beweis.

13) Zwei durch drei Paare entsprechender Punkte AA', BB', CC' gegebene vereinigte projektivische Reihen lassen sich vervollständigen, indem man die eine derselben z. B. A', B', C' aus einem beliebig gewählten Zentrum T auf eine willkürlich angenommene Gerade in A'', B'', C'' projiziert. Man erhält in den projektivischen Reihen von allgemeiner Lage ABC und $A''B''C''$ nach § 17 zu jedem Punkte X den entsprechenden Punkt X'' und daraus durch Zurückprojizieren aus T den Punkt X'; und man erhält ebenso aus Y' durch Hinausprojizieren von T aus Y'' und daraus Y.

Legt man die Gerade der $A''B''C''$ durch A', sodaß A'' mit A' zusammenfällt, so geht die perspektivische Achse des § 17 durch A.

Ebenso geht man von zwei projektivischen Büscheln am nämlichen Scheitel und in derselben Ebene durch den Schnitt des einen mit einer Transversale t und den Schein der entstandenen Reihe aus einem willkürlichen Punkte zu projektivischen Büscheln von allgemeiner Lage über und konstruiert sodann nach § 18.

14) Die vorige Konstruktion läßt sich vereinfachen, wenn unter den drei gegebenen Paaren ein sich selbst entsprechendes Element ist, z. B. für Reihen aus AA', $B\,B'$, S. Man projiziert A', B', S aus einem beliebigen Zentrum T auf eine durch S gehende Gerade in A'', B'', S und bestimmt durch AA'', BB'' das Perspektivzentrum T' der Reihen $A, \ldots$ und $A'', \ldots$; dann findet man X' zu X, indem man durch XT' den Punkt X'' bestimmt und ihn mit T verbindet; etc. Offenbar bestimmt die Gerade TT' den zweiten Doppelpunkt $\mathfrak{C}$ der vereinigten Reihen. (Vergl. § 21 u. das. 1, 2.)

20. Die charakteristische Zahl Δ gibt nach ihren Werten eine Klassifikation der Zentralprojektionen, deren Sinn aus § 19, 5, 7 und 8 erhellt. Unter diesen Werten ist der besondere Fall $\Delta = -1$, der Fall des harmonischen Verhältnisses, namentlich zu beachten. Die projizierende Ebene der Kollineationsachse s halbiert dann den Drehungswinkel α zwischen der Bildebene und Originalebene; man hat wie auch hieraus wieder direkt folgt:

$$-1 = \frac{SQ'}{\mathfrak{C}Q'} = \frac{\mathfrak{C}R}{SR},$$

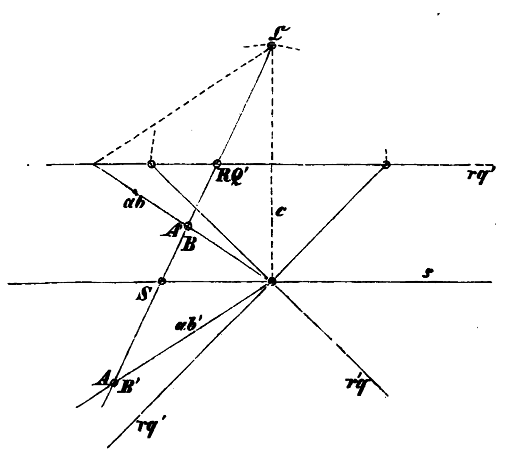
d. h. die Gegenpunkte Q', R sind in der Mitte zwischen den sich selbst entsprechenden Punkten $\mathfrak{C}$, S oder die Gegenachsen q', r (Figur auf S. 95) in der Mitte zwischen Zentrum und Kollineationsachse vereinigt. Als charakteristisch für diese

harmonische Zentralkollineation ergibt sich dann allgemein ein beliebiges Paar entsprechender Punkte

$$(\mathfrak{C}SAA') = -1 = \frac{\mathfrak{C}A}{SA} : \frac{\mathfrak{C}A'}{SA'} = \frac{\mathfrak{C}A'}{SA'} : \frac{\mathfrak{C}A}{SA} = (\mathfrak{C}SA'A)$$

und ebenso $$(csaa') = (csa'a)$$

für entsprechende Strahlen, d. h. man kann in einer derartigen Zentralkollineation je zwei entsprechende Punkte und ebenso je zwei entsprechende Gerade vertauschen — das Bildelement als Original und das Originalelement als Bild betrachten — ohne das Entsprechen zu stören. Entspricht (folgende Figur) auf einem Strahl aus $\mathfrak{C}$ dem Punkte A der Punkt A' als Bild, so entspricht ihm als Bild B' der Punkt A' als Original B; man sieht, die Paare entsprechender Punkte auf einem Strahl aus dem Zentrum $\mathfrak{C}$ bilden verkehrt aufeinanderliegende gleiche entsprechende Strecken $AB, B'A'$ aus dem durch die Gegenpunkte nicht getrennten System; die Gegenpunkte, die in $Q'R$ vereinigt sind, geben die unendlich großen, unter diesen Strecken $Q'Q$, RR'; in gleichen Abständen von $Q'R$ liegen die vereinigten sich selbst entsprechenden Nullstrecken $\mathfrak{C}$ und S, das Quadrat dieser Abstände ist die perspektivische Potenz des § 15: Die Reihen der entsprechenden Original- und Bildpunkte in jedem Strahl aus $\mathfrak{C}$ bilden Paare einer **hyperbolischen Involution**, der Kreis aus seinem RQ' durch $\mathfrak{C}$ und S schneidet alle Kreise über solchen Paaren als Durchmessern rechtwinklig. Die Doppelpunkte bilden mit jedem Paar eine harmonische Gruppe.



Und analog für die Paare entsprechender Geraden wie ab', $a'b$ in der Figur; der Winkel ab der Originale ist verkehrt in Deckung mit dem Winkel $a'b'$ der zugehörigen Bilder;

gleiche entsprechende Winkel in projektivischen Büscheln an demselben Scheitel, wie sie nach § 18, 7 von den Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel qr, $q'r'$ aus bestimmt werden können, fallen in jedem Paar zusammen; sie gehören zu dem von dem entsprechenden rechten Winkeln nicht getrennten System. Die Nullwinkel unter ihnen sind der Strahl c nach dem Zentrum 𝔈 und die Kollineationsachse s; sie bilden mit mit jedem Paar a, a' ein harmonisches Büschel. Wir wollen sagen, diese Paare bilden eine hyperbolische Involution im Strahlbüschel.

Ist dann $ABCD\ldots$ eine Gruppe von Punkten des Originals — denken wir sie als die aufeinander folgenden Ecken eines Vielecks — und $A'B'C'D'\ldots$ die Gruppe der entsprechenden Punkte des Bildes, so verhalten sich auch als Original und Bild die Gruppen

$$A'BCD\ldots,\ AB'C'D'\ldots;\ AB'C'D\ldots,\ A'BCD'\ldots;$$
$$A'BC'D\ldots,\ AB'CD'\ldots;\ \text{etc.}$$

Ebenso für beliebige Gruppen von Geraden und ihre entsprechenden. Weil die Unterscheidung von Bild und Original damit aufgehoben ist, so kann man zur Bezeichnung entsprechender Paare statt der A, A'; a, a' die A, A_1; a, a_1 etc. benutzen.

Zwischen zwei derartigen Systemen besteht projektivisches Entsprechen mit Vertauschbarkeit; man hat in den Reihen entsprechender Punkte auf den Strahlen aus dem Zentrum projektivische Reihen mit vertauschbarem Entsprechen und man hat in den Büscheln entsprechender Geraden aus den Punkten auf der Achse projektivische Büschel mit vertauschbarem Entsprechen. Man nennt solche projektivische Reihen in derselben Geraden, solche Strahlenbüschel in derselben Ebene und vom nämlichen Scheitel, solche ebene Systeme in derselben Ebene und also auch die zugehörigen projizierenden Strahlen- und Ebenenbündel mit vertauschbarem Entsprechen involutorische Reihen, Büschel, Ebenen und Bündel. Wir entwickeln die Entstehung solcher Involutionen in Reihen und Büscheln aus der Vereinigung projektivischer Reihen und Büschel in den Beispielen; einige Wiederholungen wie 8 f. betonen nur die Wichtigkeit der Sache.

Am Schluß (16) lösen wir die Linealkonstruktionen der Involutionen in Reihe und Büschel aus der Abhängigkeit von

der Elementargeometrie, in der sie zuerst gefunden sind. Sie werden damit zum Fundament der projektivischen Geometrie, die den verschiedenen Geometrien gleichmäßig angehört.

B. 1) Ist im allgemeinen $(\mathfrak{C}SAA') = \varDelta$ die Charakteristik einer zentrischen Kollineation und entsprechen dem Punkte P als Originalpunkt im Bilde P' und demselben als Bildpunkt im Original P_1, so haben wir $(\mathfrak{C}SPP') = \varDelta = (\mathfrak{C}SP_1P)$ und man hat durch Multiplikation $(\mathfrak{C}SP_1P') = \varDelta^2$; d. h. wenn man in derselben zentrischen Kollineation zur Figur F als Original das Bild F' und zur nämlichen Figur F als Bild das Original F_1 konstruiert, so sind die Figuren F_1 und F' zentrisch kollinear nach dem Quadrate der gegebenen Charakteristik als Charakteristik. Für $\varDelta = -1$ erhalten wir F_1 und F' als sich deckend mit $\varDelta^2 = +1$; d. h. (vergl. § 19, 8) kongruente Systeme in Deckung sind zentrisch kollinear mit der Charakteristik Eins; Zentrum und Achse sind unbestimmt. Man erläutere die Bedeutung dieser Resultate für den räumlichen Vorgang der Projektion.

2) Liegt P entweder in der Mitte zwischen den Doppelpunkten $\mathfrak{C}$ und S oder unendlich fern, so erhält man $SP' : \mathfrak{C}P' = \mathfrak{C}P_1 : SP_1$, d. h. die Mitte zwischen P und P_1 ist auch die Mitte zwischen den Doppelelementen. (Vergl. § 19, 1 u. § 9.) Man formuliere das entsprechende Resultat für Büschel.

3) Man konstruiere eine involutorische Zentralkollineation, erläutere das vertauschbare Entsprechen an Original und Bild einer ebenen Figur und besonders die Vereinigung der Gegenachsen in der Mitte zwischen $\mathfrak{C}$ und s als die unerläßliche Bedingung seiner Möglichkeit. Wie gestaltet sich die Konstruktion mit Benutzung der Parallelen zu s durch $\mathfrak{C}$ und der symmetrischen entsprechenden Reihen in derselben? (Vergl. § 19, 1, 3, 4.)

4) Man erläutere das Viereck von zwei entsprechenden Punktepaaren A, A', und B, B' oder Geradenpaaren a, a' und b, b' hinsichtlich seiner harmonischen Eigenschaften. Für D in B' ist D' in B und daher die Verbindungslinie der Schnittpunkte von AB, $A'B'$ und von AB', $A'B$ die Achse s der involutorischen Kollineation; ihre Durchstoßpunkte mit den Strahlen AA', BB' sind die vierten harmonischen zum Schnittpunkt $\mathfrak{C}$ derselben. (§ 16, 14.) Die Parallelen durch $\mathfrak{C}$ zu $A'B'$ und AB, zu AB' und $A'B$ schneiden je die andere dieser Geraden in vier Punkten einer zu s parallelen Geraden — der Gegenachse $q'r$. So für jeden der drei Diagonalpunkte und die bez. gegenüberliegende Diagonale. Darum die harmonischen Gruppen der Doppelelemente mit jedem Paar $\mathfrak{C}SAA'$, $csaa'$.

5) Man verzeichne ein Sechseck und ein Dreieck in schräger Ebene, dessen Ecken bei der Umlegung mit andern Ecken von ihm selbst zusammenfallen. Eine Ecke in der Achse gibt ein $2n-1$eck.

6) Macht man die entgegengesetzte Umlegung im Falle der

Involution oder $\Delta = -1$, sodaß man mit $\Delta = +1$ zu $A, B \ldots$ die in Bezug auf s orthogonal symmetrischen A_1, B_1, etc. bildet, so liegt $\mathfrak{C}_1$ in der Achse s, und r_1 symmetrisch zu q' in Bezug auf s; also gehen $A'A_1$, $B'B_1, \ldots$ durch $\mathfrak{C}_1$ in s und die Parallelstrahlen der Bilder treffen die Originale mit dem Index Eins in r_1.

7) In den involutorischen Büscheln aus den Punkten der Kollineationsachse fallen die entsprechenden Strahlen der Rechtwinkelpaare q, q' mit r', r zusammen (Figur S. 95), nämlich in den Halbierungslinien der von den Strahlen c und s gebildeten Winkel. Man beweise dies aus dem charakteristischen Doppelverhältnis (§ 19, 9.) und aus der Konstruktion.

8) Wenn bei zwei in derselben Geraden vereinigten projektivischen Reihen t, t' ein Paar von Punkten sich vertauschungsfähig entsprechen, so tun dies alle Paare und die Reihen sind involutorisch. Jenes erfordert die Vereinigung der Gegenpunkte, und daraus folgt das vertauschbare Entsprechen aller Paare. Ganz analog für die vereinigten projektivischen Büschel.

Dasselbe folgt aber auch direkt aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse. Ist $(ABCC') = (A'B'C'C)$, sodaß sich C, C' vertauschbar entsprechen, und denken wir D' in B, so muß auch D in B' sein; denn

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AC'}{BC'} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'C}{B'C} \text{ gibt } \frac{BC'}{BC} \times \frac{B'C'}{B'C} = \frac{AC'}{AC} \times \frac{A'C'}{A'C},$$

wo die Vertauschung von B mit B' die von B' mit B nach sich zieht. Involutorische Reihen sind durch zwei Paare entsprechender Punkte AA', BB' bestimmt; denn C in A' gibt C' in A oder $A'A$ als drittes Paar. Daß auch D in B' ebenso D' in B fordert, ist nach dem eben Bewiesenen keine Überbestimmung.

Legt man also zwei projektivische Reihen so aufeinander, daß ein Paar ihrer Punkte sich vertauschbar entspricht, — und man erreicht dies, indem man ihre Gegenpunkte Q', R zur Deckung bringt, in M, dem Zentralpunkt, Mittel- oder Hauptpunkt der Involution — so sind sie in Involution; denn dann fallen alle die entsprechend gleichen Strecken des einen Systems (§ 15) zufolge ihrer Konstruktion verkehrt aufeinander. Und weil jene Vereinigung in einer zweiten Art möglich ist, die aus der ersten durch Drehung der einen Reihe um 180^0 hervorgeht, so kann man zwei projektivische Reihen in zweierlei Weise involutorisch machen, den zwei Systemen entsprechend gleicher Strecken gemäß; bei der einen kommen die entsprechenden Nullstrecken G mit G', H mit H' zur Deckung und bilden zwei sich selbst entsprechende oder Doppelpunkte G und H; bei der andern fällt G auf H', G' auf H, man erhält ein zu M symmetrisches Paar und Doppelpunkte existieren nicht. Bei dieser trennen sich die Paare, bei der ersten nicht. Die erste Art entspricht der Involution ebener Systeme durch Zentralprojektion oder der harmonischen Kollineation.

9) Sowie in den Reihen die entsprechenden unendlich großen Strecken die involutorische Vereinigung ermöglichen so in den Büscheln die entsprechenden rechten Winkel — wieder die absolut Größten. Projektivische Büschel von einerlei Scheitel in derselben Ebene werden involutorisch, wenn man ihre entsprechenden Rechtwinkelpaare verkehrt zur Deckung bringt, q mit r', q' mit r; man sagt, daß diese die Achsen der Involution bilden. Auch solche Büschel können in zweierlei Art involutorisch gemacht werden. Im einen Falle, nämlich bei entgegengesetztem Sinn der beiden Gebilde oder sich nicht trennenden Paaren, hat die Involution reelle Doppelstrahlen, die vereinigten entsprechenden Nullwinkel g, g' und h, h' (§ 18, 8.), im andern nicht. Bei der entgegengesetzten Aufeinanderlegung fällt g auf h' und g' auf h und sie bilden ein Paar, welches zum Rechtwinkelpaar symmetrisch liegt.

10) Wir könnten auch aus der den Bedingungen des Zusammenlegens entspringenden doppelten Möglichkeit der involutorischen Lage schließen, daß es in projektivischen Strahlenbüscheln zwei Systeme entsprechend gleicher Winkel gibt; aber wir wissen schon, daß dieselben zu den entsprechenden Rechtwinkelstrahlen in analoger Beziehung stehen, wie die gleichen entsprechenden Strecken zu den Gegenpunkten; etc. (Vergl. § 15; § 18, 5.)

11) Die Relation $(ABM\infty) = (A'B'\infty M)$ gibt:

$$AM \,.\, A'M = BM \,.\, B'M = \pm k^2$$

(§ 15 und § 16, 12) das obere Zeichen für entgegengesetzten, das untere für gleichen Sinn der Reihen ABM, $A'B'\infty$; und entsprechend für die Büschel in Bezug auf die Rechtwinkelstrahlen aus $(abqr) = (a'b'rq)$, nämlich $\tan aq \,.\, \tan a'q = \tan bq \,.\, \tan b'q = \pm k^2$. (§ 18, 5.) Für die Doppelpunkte ist $\overline{GM}^2 = \overline{HM}^2 = \pm k^2$; daher erhält man sie bei entgegengesetztem Sinn, wenn man die Länge k von M aus nach beiden Seiten abträgt. Ebenso ist in den Büscheln

$$\tan^2 gq = \pm k^2.$$

12) Weil in der Bildebene zu jedem Punkte derselben die Spur der zum zugehörigen projizierenden Strahl normalen projizierenden Ebene bestimmt ist (§ 10), so wird in jeder in ihr gelegenen Geraden t durch ihre Punkte A, B, ... und durch die Schnittpunkte A_1, B_1, ... mit den Spuren a_n, b_n, ... der Normalebenen, welche ihnen entsprechen, eine Involution von Paaren AA_1, BB_1, ... bestimmt, die den Fußpunkt H der Normale aus dem Hauptpunkt C_1 auf die Gerade zum Mittelpunkt M hat und deren Doppelpunkte nicht reell sind. Denn nach dem Schluß von § 10 bilden die Spuren der Normalebenen ein Büschel, das dem von C_1 nach den Fußpunkten der projizierenden Geraden gehenden gleich also auch projektivisch ist; in der Geraden entstehen also zwei projektivische Reihen. Weil aber aus der Konstruktion die Vertauschbarkeit des Entsprechens von H mit dem unendlich fernen

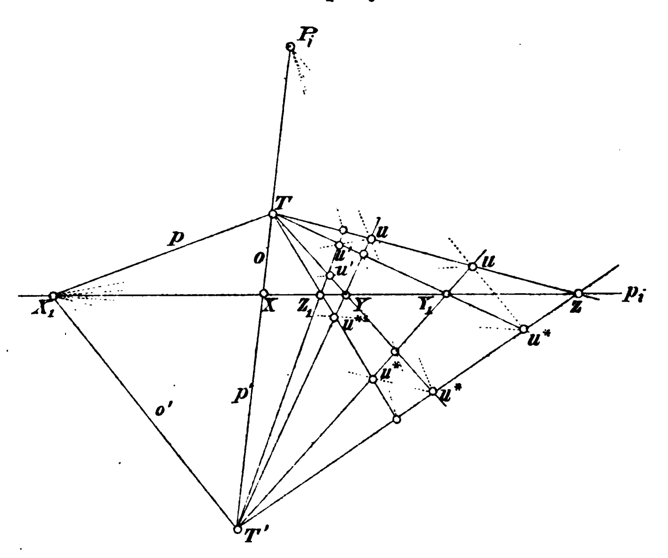
Punkte der Geraden hervorgeht, so bilden sie eine (stets elliptische) Involution mit H als Zentralpunkt.

Ebenso entsteht an jedem Punkte T der Bildebene durch die von ihm ausgehenden Geraden a, b, ... und durch seine Verbindungslinien a_1, b_1, ... mit den zu jenen gehörigen Normalfluchtpunkten A_n, B_n, ... eine stets elliptische Involution von Strahlenpaaren aa_1, bb_1, ...; der Strahl nach dem Hauptpunkt und der zu ihm senkrechte bilden ihr Rechtwinkelpaar und an ihrem vertauschbaren Entsprechen erkennt man die Involution. Diese Sätze bilden die Zusammenfassung der Lehre von den orthogonalen Elementenpaaren in der Zentralprojektion.

13) Jeder Punkt der perspektivischen Achse t'' oder $O'P$ (§ 17) von zwei projektivischen Reihen t, t' bestimmt mit diesen zwei projektivische Strahlenbüschel in Involution; denn dem nach ihrem Schnitt CP' gehenden Strahle entspricht $O'P$ selbst vertauschbar.

Jeder Strahl aus ihrem perspektivischen Zentrum T'' oder $o'p$ bestimmt mit zwei projektivischen Büscheln T, T' zwei projektivische Reihen in Involution (§ 18), denn der Schnittpunkt mit dem Scheitelstrahl op' entspricht dem Zentrum T'' oder $o'p$ vertauschbar.

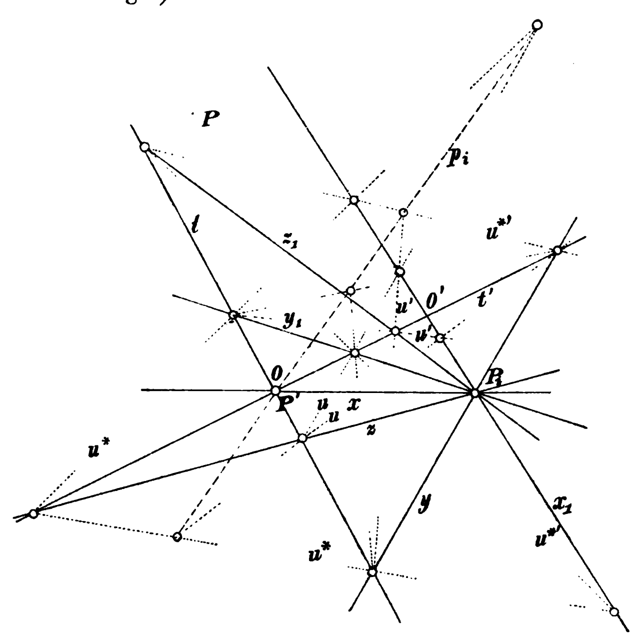
14) In dieser Bemerkung liegt zugleich die einfachste Konstruktion der Involution projektivischer Reihen oder



Büschel aus zwei Paaren ihrer Elemente, abgesehen davon, ob sie hyperbolisch oder elliptisch ist. Zunächst a) die Konstruktion der involutorischen Reihen. Seien in der Figur XX_1, YY_1 zwei Paare einer involutorischen Reihe p_i, so nehme

man etwa X_1 als perspektivisches Zentrum $o'p$ und wähle auf einer durch X willkürlich gezogenen Geraden op' die Scheitel T, T' der projektivischen Büschel; dann sind TY und $T'Y_1$ und wegen der Vertauschbarkeit des Entsprechens auch TY_1 und $T'Y$ entsprechende Strahlen, und für Z als einen Punkt der Reihe, dessen entsprechenden Z_1 man sucht, erhält man diesen im Schnitt der zu TZ in T' und zu $T'Z$ in T bez. entsprechenden Strahlen mit ihr. Wenn man also den Schnittpunkt U von TZ und $T'Y$ (oder $T'Y_1$) mit X_1 verbindet, so liegt der Schnitt U' dieser Geraden mit TY (bez. TY_1) auf $T'Z_1$; und wenn man den Schnitt U^* von TY_1 (oder TY) und $T'Z$ mit X_1 verbindet, so liegt der Schnitt U^* dieser Geraden mit $T'Y$ (bez. $T'Y_1$) auf TZ_1. (Wir lassen weiterhin die Verdoppelung der Konstruktion weg, die in den Klammern angegeben ist.) Aus dem Dreieck $TT'U$ (oder auch $TT'U^*$), dessen Seiten durch X, Y_1, Z bez. gehen, erhält man den Punkt U' (bez. $U^{*\prime}$) und auf beiden Wegen Z_1; oder die Vierecke $TT'UU'$ und ebenso $TT'U^*U^{*\prime}$ führen zum sechsten Punkt der Involution aus fünf gegebenen Punkten derselben; ihre Gegenseitenpaare gehen nach der Konstruktion durch die drei Punktepaare derselben.

Ganz analog b) bei der Involution im Strahlenbüschel, die



wir durch die Paare xx_1, yy_1 gegeben denken. Nimmt man x_1 als perspektivische Achse $O'P$ (in der Figur ist P der Schnittpunkt von x_1 mit t) und legt durch einen Punkt OP' auf x die Ge-

raden t, t' der projektivischen Reihen, so sind ty und $t'y_1$ und wiederum ty_1 und $t'y$ entsprechende Punkte, und für z als den einen Strahl des dritten Paares der Involution erhält man den andern z_1 als Verbindungslinie der zu tz in t' und zu $t'z$ in t entsprechenden Punkte. Wenn man also die Verbindungslinie u von tz und $t'y_1$ mit x_1 schneidet, so geht die Verbindungslinie u' dieses Punktes mit ty durch $t'z_1$; und wenn man die Verbindungslinie u^* von ty_1 und $t'z$ mit x_1 schneidet, so geht die Verbindungslinie $u^{*\prime}$ dieses Punktes mit $t'y$ durch tz_1; etc. Die Vierseite $tt'uu'$ und $tt'u^*u^{*\prime}$ führen zum sechsten Strahl der Involution aus fünf gegebenen; ihre Gegeneckenpaare liegen auf den drei Strahlenpaaren derselben.

Wir kommen auf diesen Zusammenhang in Verbindung mit anderer Interpretation (§ 30) zurück (§ 32) und bemerken hier nur noch, daß die Geraden UU^*, $U'U^{*\prime}$ der ersten Konstruktion durch denjenigen Punkt P_i von TT' gehen, der von X durch diese harmonisch getrennt ist — nach Anwendung des Satzes von den harmonischen Gruppen (§ 16, 13 links) auf die Vierecke UY_1U^*Z und $U'YU^{*\prime}Z_1$; während bei der zweiten Konstruktion die Punkte $u'u^{*\prime}$ in einer Geraden p_i durch tt' liegen, die von x durch diese harmonisch getrennt wird — in Anwendung des Satzes von den harmonischen Gruppen (§ 16, 13 rechts) auf die Vierseite uyu_1z^* und $u'yu^{*\prime}z_1$. Nach demselben Satze gehen auch die Geraden von TY, $T'Y_1$ nach TY_1, $T'Y$ und von TZ, $T'Z_1$ nach TZ_1, $T'Z$ durch denselben Punkt P_i und liegen die Punkte in ty, $t'y_1$ und ty_1, $t'y$, sowie in tz, $t'z_1$ und $t'z$ in derselben Geraden p_i. (Vergl. die Konstruktion harmonischer Gruppen unter 18).

15) Ist eine involutorische Reihe durch zwei Paare AA', BB' gegeben, so konstruiert man sie auch weiter nach der Methode von § 19, 13; man setzt C' in B und C in B' und projiziert B' und B als C' aus einem Punkte T auf eine durch A gehende Gerade in B'' und C'', sodaß man nach § 17 die Gerade TA' als perspektivische Achse für die Reihen A . . und A'' erhält. Damit findet man zu X mittelst XB'' und $X''B$ als sich in $A'T$ durchschneidend X'' und durch TX'' sodann X'. Man hat ein Dreieck gebildet, dessen Seiten durch A, B, X resp. gehen und die Verbindungslinien seiner diesen Seitsn gegenüberliegenden Ecken mit A', B', X' durch einen Punkt T gehend gezogen, sodaß die zwei ersten die letzte und damit X' bestimmen. (Man vergl. § 25, 5, 6.)

Wäre der eine Doppelpunkt G der Involution gegeben, so legt man die Gerade der A'' . . durch ihn und erhält den andern Doppelpunkt H (vergl. § 19, 14); nach § 16, 13 offenbar als den vierten harmonischen zu G in Bezug auf das gegebene Paar AA'.

16a) Die Sätze, in welche sich die Linealkonstruktionen der involutorischen Reihen und Büschel aus zwei bestimmenden Paaren zusammenfassen lassen: 1. Die drei Gegenseitenpaare eines voll-

ständigen Vierecks werden von jeder Geraden seiner Ebene in drei Punktepaaren einer involutorischen Reihe geschnitten. 2. Die drei Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits werden mit jedem Punkte seiner Ebene durch drei Strahlenpaare einer Involution verbunden — gestatten eine von elementargeometrischen Entwicklungen und selbst vom Parallelenaxiom unabhängige Ableitung durch Zurückführung auf die Sätze von den perspektivischen Dreiecken in § 19, 11 von denen dieselbe Unabhängigkeit bereits gezeigt ist. Man beweist ihre Erweiterungen auf perspektivische ebene Vierecke und Vierseite, welche lauten:

Wenn zwei vollständige Vierecke so in einer Ebene liegen, daß fünf ihrer entsprechenden Seitenpaare sich in fünf Punkten einer Geraden s schneiden, so geht auch ihr sechstes Seitenpaar durch einen und denselben Punkt dieser Geraden und die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Ecken gehen durch einen Punkt S.

Wenn zwei vollständige Vierseite so in einer Ebene liegen, daß fünf ihrer entsprechenden Eckenpaare in fünf Geraden aus einem Punkte S liegen, so liegt auch ihr sechstes Eckenpaar in einer Geraden aus diesem Punkte, und die Durchschnittpunkte ihrer entsprechenden Seitenpaare liegen in einer Geraden s.

Sind die entsprechenden Ecken-(Seiten)-Paare durch 1, 1′; 2, 2′; 3, 3′; 4, 4′ bezeichnet und liegen (gehen) die Schnittpunkte (Verbindungsgeraden) von 12, 1′2′; 23, 2′3′; 31, 3′1′; 14, 1′4′; 24, 2′4′ in s (durch S), so liegen die Dreiecke (Dreiseite) 123, 1′2′3′ und wiederum 124 und 1′2′4′ für s und S als Achse und Zentrum perspektivisch, die Gerade (der Punkt) 44′ geht durch S (liegt in s) und die Dreiecke (Dreiseite) 234, 2′3′4′ sind perspektivisch für dasselbe Zentrum und dieselbe Achse; d. h. der Schnittpunkt von 34, 3′4′ liegt in s (die Verbindungsgerade von 34, 3′4′ geht durch S.) Die Bildung dieser und der zum Folgenden gehörigen Figuren überlassen wir dem Leser.

b) Zur Bildung eines solchen Vierecks wird man durch 12, 23, 31 in s drei Gerade als Seiten eines Dreiecks 123 ziehen, durch die Geraden von 1 nach 14 und von 2 nach 24 als ihren Schnitt die Ecke 4 erhalten und durch die Verbindungsgerade 34 den fehlenden Punkt des dritten Paares in s finden. Es wird bei allen dreifach bez. vierfach unendlich vielen so zu bildenden Vierecken der nämliche sein.

Im Falle des Vierseits wählt man auf den Geraden 12, 23, 31 aus S drei Punkte als Ecken eines Dreiseits 123, bestimmt durch die Schnittpunkte von 1 mit 14 und von 2 mit 24 die Seite 4 und zieht durch den Schnittpunkt 34 nach S den fehlenden Strahl des dritten Paares.

17) Sind von einer Involution a) in der Geraden s zwei Paare X, X_1 und Y, Y_1 und ein Element des dritten Paares Z bekannt, so erhält man also Z_1 wie folgt: Man legt durch X, Y, Z drei

Gerade, die ein Dreieck bilden, zieht durch seine, bez. den Seiten aus X, Y gegenüberliegenden Ecken 1, 2 die Geraden nach X_1, Y_1, die sich in 4 schneiden und findet Z_1 auf der Geraden 34. Dann sind zugleich 2, 3 die Scheitel T, T' von zwei projektivischen Büscheln mit dem perspektivischen Zentrum X_1, aus deren Strahlen bez. $2\,Y_1$ oder a und $3\,Y$ oder a' zum Strahle $2\,Z$ oder b des ersten der entsprechende b' oder $3\,Z_1$ des zweiten gefunden wird wie in § 18: Die Gerade $a'b$, X_1 gibt auf a den Punkt 4 als Punkt von b', also Z_1 auf 34.

Und b) für eine Involution im Strahlbüschel S aus den Paaren x, x_1 und y, y_1 wird zu z der entsprechende Strahl z_1 mittelst Konstruktion von zwei projektivischen Reihen durch ihre perspektivische Achse x_1 gefunden, indem man in x, y, z drei Ecken eines Dreiecks 1, 2, 3 wählt, die Gegenseiten von 1 und 2 bez. mit x_1, y_1 schneidet und vom Schnitt der Verbindungslinie dieser Punkte mit der Gegenseite von 3 den Strahl z_1 nach S zieht. Man hat auf den Gegenseiten von 2, 3 als Trägern die zwei projektivischen Reihen t, t' gebildet durch Konstruktion nach § 17.

18) Unter den Geraden in der Vierecksebene sind die durch einen seiner Diagonalpunkte gehenden und die Diagonalen ausgezeichnet; auf jenen ist der Diagonalpunkt ein sich selbst entsprechender oder Doppelpunkt der Involution, auf diesen sind beide Diagonalpunkte solche Doppelpunkte und man findet zu zusammenfallenden X, X_1 und Y, Y_1 den vierten harmonischen Punkt Z_1 zu Z durch die sich spezialisierende erste Konstruktion in 17) übereinstimmend mit § 16, 14.

Ebenso sind unter den Punkten in der Ebene eines Vierseits seine Diagonalpunkte ausgezeichnet: xx_1 und wieder yy_1 fallen in der zugehörigen Diagonalen zusammen; zu dem Strahl z nach der einen nicht in ihnen liegenden Ecke findet man den harmonisch konjugierten z_1 als nach der andern gehend. (§ 16, 14.)

21. Während die zentrische Kollineation $\Delta = -1$ für die vereinigten projektivischen Reihen in den Strahlen aus dem Zentrum reelle Doppelpunkte $\mathfrak{C}$ und S und in allen vereinigten projektivischen Büscheln aus den Punkten der Achse reelle Doppelstrahlen c und s liefert, hat die Bildung involutorischer Reihen und Büschel durch Aufeinanderlegung projektivischer Reihen und Büschel mit verkehrter Deckung ihrer Maximal (∞)-Strecken bez. ihrer Maximal(90^0)-Winkel uns gezeigt, daß es zweierlei Involutionen in Reihe und Büschel gibt, nämlich solche mit reellen Doppelelementen, aus der Deckung der Systeme entsprechend gleicher Strecken und Winkel, die die Gegenpunkte bez. Rechtwinkelstrahlen ausschließen oder mit sich nicht trennenden Paaren; und solche mit nicht reellen

Doppelelementen, aus der Deckung der Systeme, die die Gegenpunkte bez. Rechtwinkelstrahlen einschließen oder mit sich trennenden Paaren. Da beide Arten der Zusammenlegung sich nur durch eine vorhergehende Umwendung bei der einen voneinander unterscheiden, so wird in dem einen Falle der Bewegungssinn (§ 17) in beiden vereinigten Reihen resp. Büscheln übereinstimmen, im andern entgegengesetzt sein und man erkennt sofort, daß das letzte der Fall ist bei den Involutionen mit reellen, das erste bei denen mit nicht reellen Doppelelementen. Für jenes gibt die Reihe aus RQ' oder M und AB', $A'B$ in Figur auf S. 95 und das Büschel aus rq', $r'q$ und ab', $a'b$ daselbst den Typus. Der Bewegungssinn $ABR\infty$ resp. $abqr$ im Original ist dem entsprechenden $A'B'\infty Q'$ resp. $a'b'q'r'$ im Bilde entgegengesetzt und es ist in der Tat offenbar, daß sich zwei Punkte bez. zwei Strahlen begegnen müssen, wenn sie sich in derselben Geraden oder in derselben Ebene um denselben Punkt in entgegengesetztem Sinne bewegen. Wenn in Figur auf S. 95 $A'B$ auf der entgegengesetzten Seite des RQ' von AB' läge etc., so wären die Doppelpunkte nicht reell — in der zentrischen Kollineation $\Delta = -1$ ist also dieser Fall, wie auch der konstruktive Zusammenhang lehrt, nicht enthalten — und der Bewegungssinn $ARB\infty$ mit dem $A'\infty B'Q'$ übereinstimmend. Wegen $AM \,.\, A'M = -k^2$ (§ 20, 12) wäre $GM = k\sqrt{-1}$.

Vergleichen wir nun hiermit die Kollineationen, welche nicht involutorisch sind, so zeigt uns zunächst $\Delta = +1$, die der Involution entgegengesetzte Umlegung bei der Projektion aus einem von Original- und Bildebene gleich entfernten Punkte, die Vereinigung der Doppelpunkte $\mathfrak{C}$, S in der Mitte zwischen den Gegenpunkten Q' und R, oder $\mathfrak{C}$ in s mitten zwischen q' und r, zugleich aber auch die Übereinstimmung des Bewegungssinnes in den vereinigten projektivischen Reihen und Büscheln. Dies ist natürlich, da ja die in beiden Umlegungen erreichten Endlagen um die Summe der Drehungen α und $180^0 - \alpha$, also um 180^0 von einander abweichen, und die nämlichen Geraden CH und C_1H, sowie die zu ihnen bez. normalen Spurparallelen in beiden Fällen zur Vereinigung gelangen. (Die Skizze des Falles, zu der wir einladen, lehrt sofort, daß die Punkte A', B, welche einem gegebenen Punkte AB' entsprechen, durch ihn

und das Zentrum harmonisch getrennt sind, bez. die Strahlen a', b, welche einem gegebenen Strahl ab' entsprechen, durch ihn und die Achse.)

In Bezug auf die Kollineation mit allgemeiner Charakteristik $\pm \varDelta$ ergibt sich offenbar, daß von zwei entgegengesetzten Umlegungen $+\varDelta$ und $-\varDelta$ immer die eine Übereinstimmung und die andere Gegensatz der entsprechenden Bewegungssinne in den vereinigten Büscheln und Reihen zeigen muß, aus denselben Gründen wie im vorerwähnten Spezialfalle. Vergleichen wir nun die Figuren S. 88 u. S. 92 und in Figur S. 34 die Umlegung mit dem Kollineationszentrum $\mathfrak{C}$, so finden wir die Gegenachsen zwischen dem Zentrum und der Achse der Kollineation oder die Gegenpunkte Q' und R auf jedem Kollineationsstrahl zwischen den Doppelpunkten, und die entsprechenden Bewegungen im Gegensatz des Sinnes; die Vergleichung derselben an den Gruppen $\mathfrak{C}RS\infty$ und $\mathfrak{C}\infty SQ'$ zeigt, daß der Gegensatz des Bewegungssinnes mit der Lage der Gegenpunkte zwischen den Doppelpunkten notwendig verbunden ist.

Die Anschauung der entgegengesetzten Umlegung in Figur auf S. 34 lehrt weiter, daß wegen der symmetrischen Lage von $\mathfrak{C}^*$ und $\mathfrak{C}$ in Bezug auf q' und von (r^*) und (r) in Bezug auf s mit der eintretenden Übereinstimmung des Bewegungssinnes die Lage der Doppelpunkte zwischen den Gegenpunkten notwendig verbunden ist, wie dies auch die Vergleichung an den Gruppen $\mathfrak{C}^*R^*\infty S$ und $\mathfrak{C}^*\infty Q'S$ evident macht. Die analoge Betrachtung der vereinigten projektivischen Büschel können wir, als auf die der Reihen zurückführbar ersparen; sie ist aber zur Übung zu empfehlen.

Während nun im Gegensatz des Bewegungssinnes ganz wie im Falle der Involution die Begegnung der entsprechend bewegten Elemente notwendig eintreten muß, ist augenscheinlich ihr Nichtbegegnen wenigstens möglich, wenn sie sich in demselben Sinne bewegen; um so mehr, da die einfache Vorstellung der entsprechenden Bewegungen (wir wollen sie immer für die vereinigten Reihen aussprechen) von entsprechenden Punkten A, A' aus durch die mittelst der Gegenpunkte Q', R bestimmten vereinigten Reihen sofort die Richtigkeit des Satzes lehrt: Bei Gleichheit des Bewegungssinnes kann Begegnung nur zwischen

den Gegenpunkten, bei Ungleichheit desselben muß sie außerhalb ihrer endlichen Strecke stattfinden.

Aber in der Tat liefern die vorigen Überlegungen, in Verbindung mit dem Grundgesetz von der Unveränderlichkeit des Produkts der Abstände entsprechender Punkte von ihren Gegenpunkten (§ 15), sofort die Konstruktion der Doppelpunkte durch Lineal und Zirkel und damit auch die Entscheidung über ihre Realität. Denn für einen Doppelpunkt F in den durch ein Paar A, A' und die Gegenpunkte Q', R bestimmten vereinigten Reihen hat man bei Gegensatz des Bewegungssinnes neben der stets geltenden Relation

$$FR \,.\, FQ' = k^2 = AR \,.\, A'Q'$$

noch, wegen der Lage des Doppelpunktes außerhalb der endlichen Strecke $Q'R$,

$$FR - FQ' = Q'R.$$

Die Bestimmung der beiden Abstände des Doppelpunktes von den Gegenpunkten mittelst ihres Produkts und ihrer Differenz führt auf eine quadratische Gleichung, welche stets zwei reelle Werte liefert. Man konstruiert sie am einfachsten (Figur b auf S. 108), indem man in Q' und R die Länge k rechtwinklig zu $Q'R$ aufträgt und durch die vier Endpunkte, also aus der Mitte zwischen Q' und R, einen Kreis beschreibt; er schneidet die sich selbst entsprechenden oder Doppelpunkte F_1, F_2 aus der Reihe und liefert sie stets reell — um so weiter von den Gegenpunkten je größer k ist. Diese Konstruktion gilt unverändert im Falle der Involution, wo nur Q' und R in M zusammenfallen.

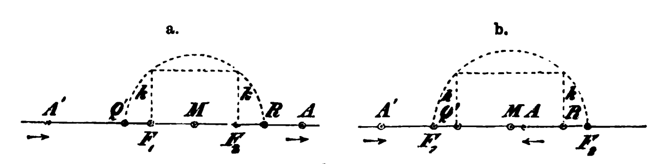
Bei Gleichheit des Bewegungssinnes kennt man aber wegen der Lage der Doppelpunkte zwischen den Gegenpunkten zu dem Produkte der Abstände ihre Summe, oder die Relationen

$$RF + FQ' = RQ', \quad FQ' \,.\, RF = k^2$$

und erhält die Konstruktion mittelst des Kreises (untenstehende Figur a) über dem Durchmesser $Q'R$ durch die Fußpunkte seiner Ordinaten von der Länge k; also nur reell, so lange k nicht größer ist als $\frac{1}{2}\, Q'R$. Im Falle der Gleichheit dieser Werte fallen die Doppelpunkte in der Mitte zwischen Q' und R zusammen; je kleiner k ist, desto mehr nähern sie sich den Gegenpunkten.

Die Involution aus Reihen von entgegengesetztem Sinn kann keine reellen Doppelpunkte haben, weil der Kreis über $Q'R$ ein Punkt ist, es sei denn, daß zugleich k gleich Null ist, wo sie mit M zusammenfallen; in diesem Grenzfall heißt die Involution parabolisch.

Wenn man durch Abtragen von k aus den Gegenpunkten Q', R in der Reihe nach § 15, 2. die entsprechenden Nullstrecken G', H' und G, H bestimmt, so greifen die Segmente GG' und HH' nicht übereinander im Falle der reellen Doppelpunkte bei gleichem Sinn, sie haben einen Endpunkt gemein im Falle der vereinigten (eben diesen selbst), und sie greifen übereinander im Falle der nicht reellen Doppelpunkte; mit ähnlichen Unterscheidungen bei entgegengesetztem Sinn. Im Falle der Involution liefern sie bei ungleichem Sinn die Doppelpunkte, bei gleichem Sinn das symmetrische Paar. (§ 20, 8, 9.)



Man sieht nun leicht, daß die ganz analogen Überlegungen zur Ermittelung der Doppelelemente vereinigter projektivischer Büschel führen. Die Gleichungen

$$\tan fr \,.\, \tan fq' = k^2 = \tan ar \,.\, \tan q'a', \quad fr - fq' = q'r; \text{ etc.}$$

für q', r als nicht entsprechende Rechtwinkelstrahlen gelten nach § 18, 5; man findet auch die entsprechenden Nullwinkel durch $\tan a'q' = \pm k$ nach § 18, 8., sodaß im Falle der Gleichheit des Sinnes auch die Regel über die Realität der Doppelelemente fortbesteht, die wir soeben gaben, wenn wir sie von Winkeln statt von Segmenten verstehen. Wir wollen zur bequemen Unterscheidung die Doppelelemente vereinigter projektivischer Gebilde durch F_1, F_2 resp. f_1, f_2 — in Ebenenbüscheln, auf die sich alles Vorige leicht überträgt, durch $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ — bezeichnen, während sie bei der Involution nach ihrer eben erinnerten Verbindung mit den entsprechenden Nullstrecken und Nullwinkeln durch G, H resp. g, h oder in Ebenenbüscheln $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ bezeichnet sein sollen. Nach § 18, 10 und § 15, 4 sind die zu den Doppelelementen symmetrischen in Bezug

auf die Elemente Q', R resp. q', r entsprechende Paare der Gebilde. Hiernach fallen dieselben in involutorischen Reihen und Büscheln mit den Doppelelementen selbst zusammen (vergl. § 14 Figur auf S. 58 mit § 20); im Falle der vereinigten Doppelelemente sind sie die entsprechenden Nullelemente, die nicht mit jenen zusammenfallen.

Wir werden weiterhin noch andere Konstruktionsmittel für die Doppelelemente vereinigter projektivischer Reihen und Büschel kennen lernen; die hier verwendeten gewähren den engsten Anschluß an die Elementargeometrie und die anschaulichste darstellend-geometrische Entwickelung. Sie fordern die Kenntniß, also eventuell die vorgängige Ermittelung der Elemente Q', R bez. q', r, die nach dem Früheren keine Schwierigkeit bietet; die Überführung in perspektivische Lage (§ 15, Figur auf S. 62, § 18 auf S. 84) genügt dazu. Die vielseitige Brauchbarkeit der erlangten Konstruktion erläutern wir durch eine Reihe von Beispielen, denen weiterhin zahlreiche andere folgen werden.

B. 1) Zur Bestimmung einer zentrischen Kollineation sind zwei vereinigte projektivische Reihen durch ihre Gegenpunkte Q' und R und ein drittes Paar entsprechender Punkte A, A', sowie ein Punkt S der Kollineationsachse gegeben. Man konstruiert die Doppelpunkte der vereinigten Reihen $A\infty R$, $A'Q'\infty$ nach Ermittelung des Bewegungssinnes aus der Länge k und erhält im Falle ihrer Realität und Verschiedenheit zwei zentrische Kollineationen, deren Zentra F_1, F_2 sie selbst und deren Achsen die Geraden von S nach F_2, F_1 resp. sind, während die Gegenachsen durch Q', R zu diesen parallel laufen. Wenn jene imaginär sind, so ist S der einzige reelle Punkt der Axe und $Q'R$ der einzige Kollineationsstrahl der gesuchten Kollineation.

2) Aus einem Punkt der Achse und zwei vereinigten projektivischen Reihen, die durch drei Paare entsprechender Punkte bestimmt sind, oder aus einem Strahl durch das Zentrum und zwei vereinigten projektivischen Büscheln, welche durch drei Paare bestimmt sind, bestimmt man die zentrischen Kollineationen ebenso.

3) Wenn gefordert wird, daß die Kollineation involutorisch sei, so müssen Q' und R vereinigt sein, resp. es können nur zwei Paare von entsprechenden Punkten oder Strahlen in einem Strahl durch das Zentrum oder an einem Punkte der Achse geben werden, weil aus a, a'; b, b' für c' in b, c in b' und damit das dritte nötige Paar folgt. (Verg. § 20, 8.)

Erläutere die Bestimmung aus zwei entsprechenden Punkten und zwei entsprechenden Geraden.

4) Man soll ein Dreieck bestimmen aus den Basisecken A, B und der Differenz der entsprechenden Winkel ABC und CAB, wenn seine Spitze C in einer gegebenen Geraden l liegen muß. Wenn man die Seite BC um B gedreht denkt, so dreht sich wegen der konstanten Winkeldifferenz AC gleich geschwind um A und die entstehenden gleichen also auch projektivischen Büschel erzeugen auf l zwei projektivische Reihen, deren Doppelpunkte die Aufgabe lösen, d. h. die zwei Lagen der Spitze C in l liefern. Man wird drei der Dreiecke der Serie bilden, darunter die beiden, deren Seiten AC, bez. BC zu l parallel sind, weil die Schnitte der jedesmal andern Seiten BC und AC in l die Gegenpunkte der Reihen liefern. Die nähere Diskussion der Konstruktion ist nützlich.

5) Man soll diejenigen nEcke bestimmen, die einem gegebenen nSeit der Ebene eingeschrieben und einem gegebenen nEck derselben zugleich umgeschrieben sind, oder deren Seiten der Reihe nach durch n gegebene Punkte gehen, während ihre Ecken ebenso in n gegebenen Geraden liegen.

Denken wir $E_1 E_2 \ldots E_n$ als das gesuchte nEck und die Seiten E_1E_2, E_2E_3, $\ldots E_nE_1$ der Reihe nach durch S_1, S_2, S_n dirigiert, die Ecken E_1, E_2, $\ldots E_n$ aber ebenso auf den Geraden e_1, e_2, $\ldots e_n$ lokalisiert, so erkennt man die Lösung in folgender Überlegung: Man ziehe eine erste Seite willkürlich durch S_1 und markiere ihre Schnitte A_1, A_2 in e_1 und e_2, ziehe A_2S_2 bis A_3 in e_3, A_3S_3 bis A_4 in e_4, $\ldots A_nS_n$ bis A_1' in e_1; so entstehen bei Drehung der ersten Seite um S_1 bei S_2, S_3, $\ldots S_n$ Büschel, deren jedes mit dem vorhergehenden und dem folgenden perspektivisch, deren erstes daher mit dem letzten projektivisch ist; somit bilden A_1 und A_1', B_1 und B_1', etc. Paare von zwei vereinigten projektivischen Reihen in e_1, deren Doppelpunkte die zwei dem Problem entsprechenden Lagen der Ecke A_1 sind. Ihre Gegenpunkte erhält man ohne Schwierigkeit, indem man einmal die Parallele zu e_1 durch S_1 als Anfangsseite und das andere mal die Parallele zu e_1 durch S_n als Schlußseite benutzt. Man sieht leicht, daß, den Fall des Dreiecks ausgenommen, die Punkte S auch Ecken eines n Seits der Geraden e sein können.

6) Man bestimme ein Dreieck, das zu einem gegebenen Dreieck ähnlich und ähnlich gelegen ist und seine Ecken in drei gegebenen Geraden der Ebene hat. Ist ABC das gegebene, $A^*B^*C^*$ das gesuchte Dreieck und sind a, b, c die Ortsgeraden seiner Ecken, so wähle man A_1 und A_2 in a willkürlich, ziehe durch sie Parallelen zu AB bis B_1, B_2 in b, durch diese Parallelen zu BC bis C_1, C_2 in c und durch diese Parallelen zu CA bis A_1', A_2' in a. Da für A als unendlich fern in a auch A' dahin fällt, so sind die projektivischen Reihen A, A' in a ähnlich und der im Endlichen liegende Doppelpunkt derselben liefert die Lage der Ecke A^*, womit sich B^* und C^* ergeben. Um aber A^* zu finden, zieht man

aus einem willkürlichen Punkte S die Strahlen nach A_1' und A_2' und schneidet sie mit einer zu a parallelen Geraden a'' in A_1'' und A_2''; man zieht sodann die Geraden $A_1 A_1''$ und $A_2 A_2''$ bis zu ihrem Schnitt S' und erhält im Schnitt von SS' mit a den gesuchten Doppelpunkt A^*.

Man entnimmt aus der Konstruktion, daß die unendlich ferne Gerade als ein den Linien a, b, c eingeschriebenes Dreieck angesehen werden muß, welches mit jedem gegebenen Dreieck ABC ähnlich und ähnlich gelegen ist.

Wenn in Aufg. 5) die Drehpunkte $S_1, \ldots S_n$ in einer geraden Linie liegen, so erscheint diese Gerade in gleicher Weise als eine der beiden Lösungen und die andere wird wie vorher konstruiert; nur muß man die Hilfslinie a'' durch den Schnittpunkt von a oder e_1 mit der Linie der Drehpunkte S hindurchlegen.

7) Man soll diejenigen Vierecke $E_1 E_2 E_3 E_4$ konstruieren, welche zwei ihrer Gegenseitendurchschnittspunkte $E_1 E_2$, $E_3 E_4$ und $E_2 E_3$, $E_4 E_1$ in gegebenen Punkten 12 und 23 der Ebene und ihre vier Ecken der Reihe nach in gegebenen Geraden e_1, e_2, e_3, e_4 haben. Nimmt man A_1 in e_1 an, so liefert die Gerade nach 12 in e_2 die Lage A_2, $A_2 23$ in e_3 den Punkt A_3 und $A_3 12$ in e_4 den Punkt A_4, endlich $A_4 23$ in e_1 einen Punkt A_1'; ebenso erhält man zu B_1 den Punkt B_1'; insbesondere zur Richtung von e_1 als A_1 bez. A_1' die Gegenpunkte Q', R der projektivischen Reihen, die mit diesen schon durch ein Paar A, A' bestimmt sind und die Lagen der Ecke E_1 in a_1 für die gesuchten Vierecke als Doppelpunkte liefern. Wir erinnern an § 18, 3 als ein Beispiel von der Anwendung dieser Aufgabe. Interessante Spezialfälle bildet man leicht.

8) Man bestimme in zwei vereinigten projektivischen Reihen diejenigen Paare entsprechender Punkte, welche eine gegebene Mitte M ihrer endlichen Segmente haben. Die symmetrischen zu den Punkten der zweiten Reihe für M als Zentrum bilden eine zur ersten Reihe projektivische, deren Doppelpunkte mit ihr die Endpunkte der fraglichen Segmente in dieser bilden; ebenso mit Vertauschung der ersten und zweiten Reihe für ihre Endpunkte in der zweiten. Sind die Reihen durch die Gegenpunkte Q', R und das Paar A, A' gegeben, so geben die Symmetrischen zu M von A' und Q' sofort A'' und Q'' und die Doppelpunkte für A, A'' mit R und Q'' als Gegenpunkten das erste Paar der Endpunkte; daraus oder direkt ebenso folgen die zweiten Endpunkte der Segmente.

Ist M ein Doppelpunkt der ursprünglichen Reihen, so fällt das eine Paar der symmetsischen mit ihm zusammen und das andere ist notwendig auch reell.

9) Man ziehe durch einen gegebenen Punkt P diejenigen Geraden, die in zwei festen Geraden t, t' zu zwei festen Anfangspunkten R, Q' derselben die Endpunkte von Segmenten abschneiden, deren Produkt konstant ist. Sind A und A' ein Paar von Punkten

in t bez. t', für welche das Produkt $RA \,.\, Q'A'$ den vorgeschriebenen Wert hat, so liefern die von P aus gehenden Strahlen nach A und A', nach R und in der Richtung von t', in der Richtung von t und nach Q' drei Paare entsprechender Strahlen in projektivischen Büscheln, deren Doppelstrahlen das Problem lösen. (Sectio spatii des Apollonius.)

10) Das Zusammenfallen der Doppelpunkte in der Mitte zwischen den Gegenpunkten ist der Fall der Reihen aus entsprechenden Bild- und Originalpunkten in der Zentrale einer optischen Linie; die Hauptbrennpunkte sind Q' und R. Man hat nach dem Text

$$AR \,.\, A'Q' = \tfrac{1}{4}\,\overline{Q'R}^2$$

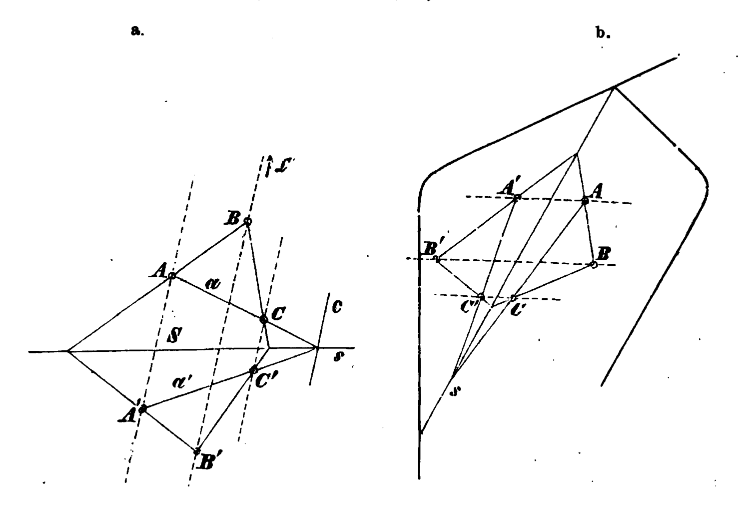
also in Abszissen aus dem Mittelpunkt

$$(a-p)(a'-p) = p^2 \quad \text{oder} \quad aa' - a'p - ap + p^2 = p^2$$

d. i.

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}.$$

22. Aus der allgemeinen zentrischen Kollineation von der Charakteristik $\triangle$ ergeben sich für spezielle Lagen des Zentrums und der Achse der Kollineation, d. h. der Doppelpunkte ihrer vereinigten projektivischen Reihen und der Doppelstrahlen ihrer vereinigten projektivischen Büschel, die folgenden besonderen Beziehungen. (Vergl. § 17, 5.)



a) Das Kollineationszentrum $\mathfrak{C}$ liege unendlich fern. Man hat (obenstehende Figur a, b)

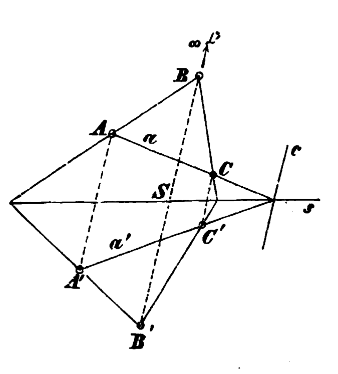
$$\triangle = (\infty\, SAA') = (csaa');$$

für die entsprechenden Punkte ist also $SA' : SA = \triangle$, die

Reihen in den Kollineationsstrahlen sind ähnlich mit dem Ähnlichkeitspunkt in der Achse; entsprechende Gerade teilen einen Winkel von konstanter Größe nach dem konstanten Doppelverhältnis $\triangle$. Für die Gegenpunkte hat man

$$\triangle = (\infty \mathrm{S} \infty Q') = (\infty SR \infty)$$

d. h. Q', R müssen gleichzeitig unendlich fern sein, oder alle entsprechende Reihen sind ähnlich (§ 17, 5). Die Gegenachsen q', r sind nach der Umlegung in der unendlich fernen Geraden der Bildebene vereinigt und ihre Punkte bilden zwei vereinigte projektivische Reihen, für welche das Zentrum und die Richtung der Achse die Doppelpunkte sind. Parallele Gerade des Originals haben parallele Bilder. — Dies ergibt sich auch aus dem Vorgang des Projizierens mit unendlich fernem Zentrum direkt.



Diese Charaktere bezeichnen die allgemeine Verwandtschaft der parallel-projektivischen Systeme, die man die Affinität nennt.

b) Das Kollineationszentrum liegt im Unendlichen und die Charakteristik ist $\triangle = -1$, man hat also Affinität und zugleich Involution. Es ist (obenstehende Figur)

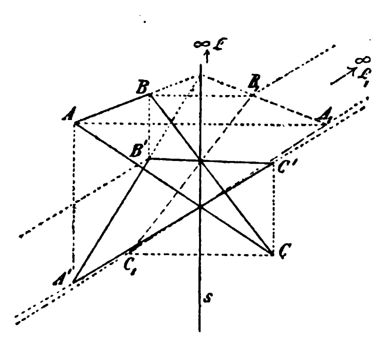
$(\infty SAA') = -1$, also $SA' = -SA$; $(csaa') = -1$;

d. h. entsprechende Punktepaare liegen in fester Richtung äquidistant von der Achse s, die Reihen in den Kollineationsstrahlen sind symmetrisch mit dem Symmetriezentrum in der Achse; entsprechende Strahlenpaare bilden stets mit dieser Richtung und der Achse harmonische Büschel. Entsprechende Dreiecke sind flächengleich, wie man sofort erkennt. Diese Charaktere bezeichnen die schiefe und die normale Symmetrie in Bezug auf eine Achse. Die projizierenden Strahlen sind parallel einer der Ebenen, welche den Neigungswinkel α der Bildebene und Originalebene und sein Supplement $(180^0 - \alpha)$ halbieren.

Wenn, was $\triangle = +1$ entspricht, die Achse s der Affinität das Zentrum $\mathfrak{C}$ zu ihrer Richtung hat, so hat man die

besondere Form der **Affinität flächengleicher Figuren.** (Nachstehende Figur.)

Wenn man zu der einen ABC von zwei solchen Figuren die zu ihr für die Achse s orthogonal symmetrische $A_1 B_1 C_1$ verzeichnet, so ist diese mit der andern $A'B'C'$ schiefsymmetrisch (Zentrum $\mathfrak{C}_1$) für dieselbe Achse. (Vergl. § 19, 8, Fall 2 und § 20, 6.) Wir merken noch an (§ 21), daß für A, B, C als Punkte D', E', F' des Bildes D, E, F in denselben Parallelstrahlen zu s äquidistant mit A', B', C' von A, B, C liegen.



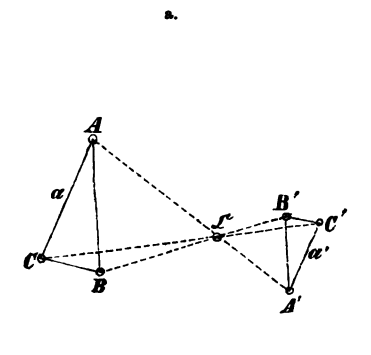
In affinen ebenen Systemen stehen allgemein entsprechende Flächen in festem Verhältnis; gleiche entsprechende Flächen treten entweder gar nicht oder immer auf. Entsprechende Strecken sind nur gleich, wenn ihre Geraden zur Achse parallel oder symmetrisch zur Projektionsrichtung liegen. (Vergl. § 21, 8 für die Realität dieses Paares von Richtungen.)

c) Die Kollineationsachse liegt unendlich fern. Man hat (nachstehende Figur a, b und Figur auf S. 115)

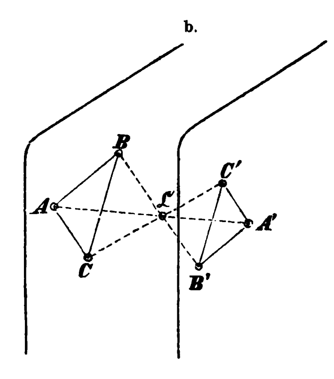
$$\Delta = (\mathfrak{C} \infty A A') = \mathfrak{C}A : \mathfrak{C}A' = (c \infty a a');$$

die Abstände entsprechender Punkte vom Zentrum sind in

a.



b.

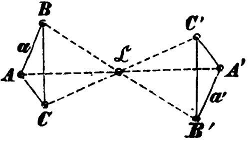


konstantem Verhältnis, sie bilden ähnliche Reihen; entsprechende Gerade sind einander parallel, die zugehörigen Reihen ähnlich nach demselben Verhältnis. Dies ist der

Charakter von ähnlichen und ähnlich gelegenen Systemen, $\mathfrak{C}$ ist ihr Ähnlichkeitspunkt. Es entspricht (vergl. den Schluß von § 11) der Zentralprojektion für jede zur Bildebene parallele Originalebene (vergl. § 17, 5); den entgegengesetzten Umlegungen $\triangle = \pm k$ entsprechen die direkte und die inverse Ähnlichkeit, mit $\mathfrak{C}$ als dem äußern bez. innern Ähnlichkeitspunkt. Man macht von der Verwandtschaft durch Ähnlichkeit fast immer Gebrauch, indem man einen bestimmten Maßstab der Verjüngung für die Darstellung des Objektes wählt, sei dasselbe nun durch Zentralprojektion oder durch Parallelprojektion darzustellen — man zeichnet von der Abbildung, wie sie aus dem Original selbst entstehen würde, ein verjüngtes direkt-ähnliches Bild.

d) Die Kollineationsachse liegt im Unendlichen und die Charakteristik ist $\triangle = -1$; man hat also Ähnlichkeit in ähnlicher Lage und zugleich Involution. Es ist (nebenstehende Fig.)

$$\triangle = (\mathfrak{C} \infty AA') = -1 = (c \infty aa');$$



also

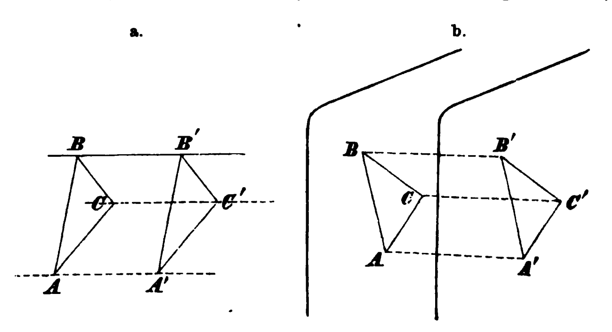
$$\mathfrak{C}A = -\mathfrak{C}A',$$

oder entsprechende Punkte liegen gleichweit und in entgegengesetztem Sinne vom Zentrum entfernt, sie bilden im nämlichen Strahl symmetrische Reihen; entsprechende Gerade sind parallel, bilden also symmetrische Büschel in Bezug auf den gleichgerichteten Zentralstrahl. Dies ist der Charakter von Systemen, die man zentrisch symmetrisch nennt; sie entsprechen der Zentralprojektion für diejenige Ebene, welche der Bildebene parallel und äquidistant vom Zentrum mit ihr ist.

Man sieht, die Symmetrien ebener Systeme sind besondere Fälle ihrer Involution.

Und die Zentralprojektionen symmetrischer Figuren sind involutorische Figuren. Das Bild der Symmetrieachse ist die Achse und der Fluchtpunkt der Parallelen das Zentrum im einen Falle; das Bild des Zentrums ist das Zentrum und die Fluchtlinie der Ebene die Achse der Involution im andern Falle.

e) Die Kollineationsachse und das Kollineationszentrum liegen im Unendlichen, also auch ineinander, d. h. es findet gleichzeitig Affinität mit Flächengleichheit und Ähnlichkeit in ähnlicher Lage statt, man erhält kongruente Systeme. Die Doppelpunkte der vereinigten Reihen und die Doppelstrahlen der vereinigten projektivischen Büschel liegen sämtlich im Unendlichen. Dies entspricht der Parallelprojektion für Ebenen, welche der Bildebene parallel sind. (Nachstehende Figur a, b.)



So sind alle gewöhnlichen Spezialfälle der Projektion des ebenen Systems in der Charakteristik Δ ausgesprochen.

Wir kommen zu den singulären oder Ausnahmefällen. Die Werte 0, ∞ (§ 19, 8) und die Unbestimmtheit von Δ charakterisieren die Lagen des Zentrums C in einer der beiden Ebenen und die in der Schnittlinie beider Ebenen und liefern Fälle der zentralprojektivischen oder kollinearen Abhängigkeit, in denen nicht jedem Punkte und jeder Geraden der einen Ebene ein bestimmter Punkt und eine bestimmte Gerade der andern Ebene entspricht, und die daher auch den praktischen Zwecken der Abbildung nicht mehr genügen, während sie von großem geometrischen Interesse sind. Wir nennen sie Kollineationen mit singulären Elementen. Denken wir das Bündel der projizierenden Strahlen und Ebenen aus C, so ergibt sich im Falle

f) für C in **E**, daß s und q' in der Geraden (**E**, **E**$'$) vereinigt sind und $\mathfrak{C}$ in r liegt ($\Delta = 0$); daß einem beliebigen Punkte A von **E** ein Punkt A' in der Schnittlinie s

beider Ebenen, und zwar allen Punkten der Geraden $\mathfrak{C}A$ oder CA der nämliche, und einer beliebigen Geraden g in E diese Schnittlinie selbst entspricht, dem Punkte C aber jeder beliebige Punkt der Ebene E'; indes einem beliebigen Punkte B' und einer beliebigen Geraden h' von E' immer der Punkt C und bez. eine durch ihn gehende Gerade h entsprechen, der Geraden s aber jede beliebige Gerade in der Ebene E — natürlich im Falle der Bestimmtheit unter Übereinstimmung der entsprechenden Doppelverhältnisse. Es ist das Verhalten der projizierenden Ebenen.

Analog für C in E' mit den entsprechenden Vertauschungen der gestrichenen und ungestrichenen Elemente.

g) für C in der Geraden (E, E'), daß s, q', r in dieser einen Geraden liegen, die auch $\mathfrak{C}$ enthält (Δ unbestimmt); daß den Punkten jeder Ebene unterschiedslos der Punkt C der andern und den Geraden jeder Ebene die Gerade s der andern, einer durch C gehenden Geraden der einen Ebene aber immer jede unbestimmte durch C gehende Gerade der andern Ebene korrespondiert. Das Nämliche folgt in beiden Fällen aus der Konstruktion in der Ebene.

Wir haben vereinigte Reihen und Büschel, wo einem Punkte resp. Strahl alle andern entsprechen. Der Fall g) gibt zugleich parabolische Involution. (§ 21.)

Die Verwandtschaften der allgemeinen Kollineation, der Affinität, der Flächengleichheit, der Ähnlichkeit und der Kongruenz bestehen auch ohne die zentrische Lage, indem nur die auf die vereinigten Reihen und Büschel bezüglichen Eigenschaften entfallen. Man sieht leicht, daß zwei entsprechende Dreiseite die Affinität — bei gleichen Flächen die Flächengleichheit — bestimmen, wie zwei entsprechende Segmente die Ähnlichkeit und zwei entsprechende Punkte mit durch sie gehenden Geraden die Kongruenz. Ebenso leicht ist die Bestimmung (vergl. § 23) in den Fällen der Kollineation mit singulären Elementen, in denen auch die zugehörigen aus beliebigen Zentren gebildeten projizierenden Bündel (die Scheine) in denselben Relationen stehen, während die Scheine der vorerwähnten speziell verwandten Systeme wesentlich allgemein sind.

Die Verwandtschaften der Involution und der Symmetrie

erlauben begriffsgemäß diese Trennung nicht, die beiden verwandten Systeme bilden bei ihnen ein Ganzes; die zugehörigen Bündel aus einerlei Zentrum sind involutorisch und zwar auch die den Symmetrien entsprechenden wesentlich allgemein. Sie zeigen einen Hauptstrahl c, den projizierenden des Zentrums, und eine Hauptebene **S**, die projizierende der Achse, und sind von der Charakteristik $\varDelta = -1$ beherrscht: Entsprechende Strahlen a, a' liegen in einer Ebene durch c und werden von c und ihrer Schnittlinie mit **S** harmonisch getrennt; entsprechende Ebenen schneiden sich in einer Geraden auf **S** und werden von **S** und deren Verbindungsebene mit c harmonisch getrennt. Die ebenen Querschnitte involutorischer Bündel, also die Zentralprojektionen von involutorischen ebenen Figuren und Systemen sind involutorisch kollineare ebene Systeme mit dem Schnitt von **S** als Achse s und dem von c als Zentrum $\mathfrak{C}$. Die zu c parallelen Schnitte liefern Symmetrien mit Achse (wann insbesondere orthogonale?) und die zu **S** parallelen solche mit Zentrum.

1) Wir heben die besondere Wichtigkeit der Symmetrie noch durch ein Beispiel hervor. Der Kreis ist sowohl für sein Zentrum M zentrisch-symmetrisch als auch für jeden seiner Durchmesser d orthogonal-symmetrisch. Die Zentralprojektionen des Kreises sind daher a) für das Bild M' des Zentrums als Zentrum und für die Gegenachse q' des Bildes als Achse in involutorischer Zentralkollineation; aber auch b) für das Bild d' eines Durchmessers d als Achse und das Bild D_1' der zu ihm rechtwinkligen Richtung als Zentrum. Wir können auf § 11, 7 zurückweisen, werden aber in allgemeiner Entwicklung im folgenden Abschnitt die ganze Bedeutung davon erkennen.

Hier wollen wir den zur Tafel parallelen Durchmesser des Originalkreises K betrachten und von der Zentralprojektion $(K)'$ der Umlegung des Kreises in die ihn enthaltende Parallelebene zur Tafel ausgehen. (Vergl. § 14, 8.) Wir denken diesen Durchmesser durch s, die Gegenachse oder Fluchtlinie der Ebene durch q' und die beiden Umlegungen des Zentrums C für dieselbe durch $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$ bezeichnet. Der Schnitt von $\mathfrak{C}\mathfrak{C}^*$ mit q' ist der Fluchtpunkt H' der Falllinien zur Tafel, also auch der zum Durchmesser s rechtwinkligen Ordinaten des Kreises $(K)'$. Da nun infolge der Symmetrie $(K)'$ sowohl in der Umklappung für $\mathfrak{C}$ als in der für $\mathfrak{C}^*$ erhalten wird, so gelangt man zum Bilde K' des Kreises K mit Benutzung der zu s rechtwinkligen Sehnen von den Endpunkten A, A^* und den Mitten B auf s, sowie dem Schnitte der zugehörigen Tangenten T auf s, indem man die Geraden $\mathfrak{C}A$, $\mathfrak{C}A^*$ mit den

Geraden $\mathfrak{C}^*A^*$, $\mathfrak{C}^*A$ durchschneidet; die Verbindungslinie der Schnittpunkte A', $A^{*\prime}$ ist zugleich die Gerade SH'; $A'T$ und $A^{*\prime}T$ sind die Tangenten des Bildes in A', $A^{*\prime}$.

Dies Prinzip der doppelten Umlegung ist für alle ebenen Figuren anwendbar, die eine zur Tafel parallele Symmetrieachse haben; es zeigt natürlich das Wesen der Involution, das vertauschbare Entsprechen. (A als B^*, gibt A^* in B auch im Bilde.)

2) Die Anschauung von Figur auf S. 51 links (§ 12) zeigt, daß die beiden Projektionen desselben ebenen Systems auf dieselbe Ebene von zwei Zentren C, C^* mit gleichen Distanzen zueinander affin sind für die Spur s als Achse und die Richtung der Verschiebung als Zentrum. Für $C_1C_1^*$ parallel s besteht somit zwischen beiden Figuren Flächengleichheit mit zentrischer Lage.

3) Figur auf S. 51 rechts (§ 12) zeigt zentrische Kollineation der beiden Bilder desselben ebenen Systems für seine Spur als Achse und C_1, den Durchstoßpunkt der Verbindungslinie der Zentra C und C^*, als Zentrum. Man bestimme die Gegenachsen dieser Kollineation und zeige, daß dieselbe Beziehung die beiden Bilder desselben ebenen Systems bei jeder Transformation des Zentrums verbindet.

4) Man kann verlangen, diejenigen Transformationen des Zentrums anzugeben, für die die Kollineation zwischen beiden Bildern desselben ebenen Systems insbesondere involutorisch ist; der Durchstoßpunkt $\mathfrak{C}$ der Verbindungslinie des alten Zentrums mit dem neuen kann beliebig gewählt werden.

5) Die Parallelprojektionen von zentrisch- oder achsial-symmetrischen Figuren sind wieder zentrisch- bez. achsial-symmetrisch für das Bild des Zentrums und bez. der Achse.

Für die Bilder involutorischer wie speziell symmetrischer ebener Figuren leitet man aus der einen Hälfte des Bildes die andere nach den Gesetzen der involutorischen Kollineation ab; denn nur so sichert man die Genauigkeit — durch die vielfachen Proben, die der Involution entspringen; sie ist die Schule der Genauigkeit im Konstruieren.

Man erläutere die Besonderheiten der Fälle mehrfach symmetrischer Figuren, wie der Parallelogramme, der regulären Vielecke.

23. Durch das Vorhergehende läßt sich endlich auch die allgemeine Bestimmung und Konstruktion der Projektivität ebener Systeme begründen und die Lösung der sogenannten umgekehrten Aufgaben der Perspektive gewinnen. Die Bestimmungselemente kollinearer ebener Systeme müssen ausreichen, um die Projektivität aller entsprechenden Reihen und Büschel zu bedingen und dies wird offenbar durch vier Paare entsprechender Punkte oder Geraden erreicht, von denen nicht drei in einer geraden Linie liegen, bez. nicht

drei durch einen Punkt gehen. Sind A, B, C, D vier solche Punkte im einen und A', B', C', D' die entsprechenden im andern System, so hat man für jedes neue Paar entsprechender Punkte X, X' die Gleichheiten

$$(A.BCDX) = (A'.B'C'D'X'),\ (C.ABDX) = (C'.A'B'D'X')$$

unter andern analogen. Ist also X gegeben, so konstruiert man den zu AX entsprechenden Strahl $A'X'$ nach der ersten und den zu CX entsprechenden Strahl $C'X'$ nach der zweiten Gleichheit, durch die Methode des § 18 mit dem Lineal allein, und erhält somit X'. So sind, unabhängig von der zentralen Lage, welche die Umlegung der zentral-projektivischen ebenen Systeme gab, alle Paare entsprechender Punkte von zwei projektivischen ebenen Systemen durch vier von ihnen linear bestimmt. Jede beliebige Gerade des einen Systems kann aus ihrer entsprechenden im andern abgeleitet werden, indem man zu zwei Punkten der letzten die entsprechenden sucht, insbesondere zu den Schnittpunkten mit zwei Gegenseiten des Vierecks $ABCD$ oder $A'B'C'D'$; denn man hat mit dem zugehörigen Diagonalpunkt die Bestimmtheit der in diesen Gegenseitenpaaren liegenden entsprechenden Reihen.

Sind a, b, c, d und a', b', c', d' vier Paare entsprechender Geraden, so gibt jede neue Gerade x mit ihrer entsprechenden x' unter andern analogen die Gleichheiten

$$(a\,.\,bcdx) = (a'\,.\,b'c'd'x'),\quad (c\,.\,abdx) = (c'\,.\,a'b'd'x')$$

und so die lineare Konstruktion des x' zu x mittelst der entsprechenden Punktepaare projektivischer Reihen ax, $a'x'$; cx, $c'x'$ nach § 17. Man erhält auch zu jedem Punkte des einen Systems den entsprechenden des andern durch die Verbindungsgeraden mit zwei Gegenecken der Vierseite und die verbindenden Diagonalen.

Die Bestimmung der Systeme in zentraler Lage durch das sich selbst entsprechende Zentrum $\mathfrak{C}$, durch zwei Punkte S_1, S_2 der Spur oder Achse s, welche mit S_1', S_2' respektive zusammenfallen, und einen Punkt Q' der Gegenachse q' oder R in r, dessen entsprechender Q respektive R' die Richtung des nach ihm gehenden Strahls aus dem Zentrum ist, läßt sich als spezielle Form hiervon betrachten. Zugleich bilden die Strahlen aus dem Zentrum $\mathfrak{C}S_1$, $\mathfrak{C}S_2$ und die Geraden s und q' oder r vier

Gerade, deren entsprechende bekannt sind, die der drei ersten als mit ihnen sich deckend, die zu q' oder r im Unendlichen.

Wie durch Aufnahme der unendlich fernen Elemente unter die Data die Bestimmung der kollinearen ebenen Systeme in den besonderen Fällen a) bis e) des Art. 22 zu spezialisieren ist, ergibt sich leicht. Wir wollen die Fälle f) und g) für die allgemeine Lage charakterisieren. Denken wir im Falle f) die zentrische Lage der Ebenen **E**, **E**′ aufgehoben, so erhalten wir zwei kollineare Ebenen, in deren einer ein singulärer Punkt C und in deren anderer eine singuläre Gerade s' liegt; singulär, weil ihnen respektive alle Punkte und alle Geraden der andern Ebene entsprechen; jedem Punkte der singulären Linie entsprechen alle Punkte eines bestimmten durch den singulären Punkt der andern Ebene gehenden Strahls — natürlich jenen Punkten diese Strahlen nach gleichem Doppelverhältnis.

Im Falle g) dagegen haben wir in jeder Ebene einen singulären Punkt und eine ihn enthaltende singuläre Linie, in demselben Sinne, daß dem Punkte alle Punkte der andern Ebene und der Geraden alle Geraden der andern Ebene entsprechen, während jedem Strahl durch den singulären Punkt und jedem Punkt in der singulären Linie der einen Ebene ein unbestimmter Strahl aus dem singulären Punkte und ein unbestimmter Punkt in der singulären Linie der andern Ebene entspricht. Zur Bestimmung solcher Systeme ist natürlich die Angabe der singulären Elemente nötig.

Wir kehren zum allgemeinen Fall zurück und zeigen, nachdem wir sahen, wie sich aus vier bekannten entsprechenden Elementenpaaren alle andern Paare entsprechender Elemente kollinearer Ebenen bestimmen lassen, nun auch, daß die so erhaltenen ebenen Systeme sich zu zentrischer Kollineation vereinigen und daher auf unendlich viele Arten in die Lage der Zentralprojektion bringen lassen. Wir sagen: Zwei beliebige Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ lassen sich stets in zentrisch-kollineare Lage bringen. Sind die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare AB, CD mit E, also $A'B'$, $C'D'$ mit E', BC, DA mit F, $B'C'$, $D'A'$ mit F' bezeichnet, so hat man die Projektivitäten von Reihen (Figur auf S. 123, a.)

$$(ABE\ldots) = (A'B'E'\ldots),\quad (DCE\ldots) = (D'C'E'\ldots);$$

man bestimmt in denselben die Paare der Gegenpunkte R_1, R_2

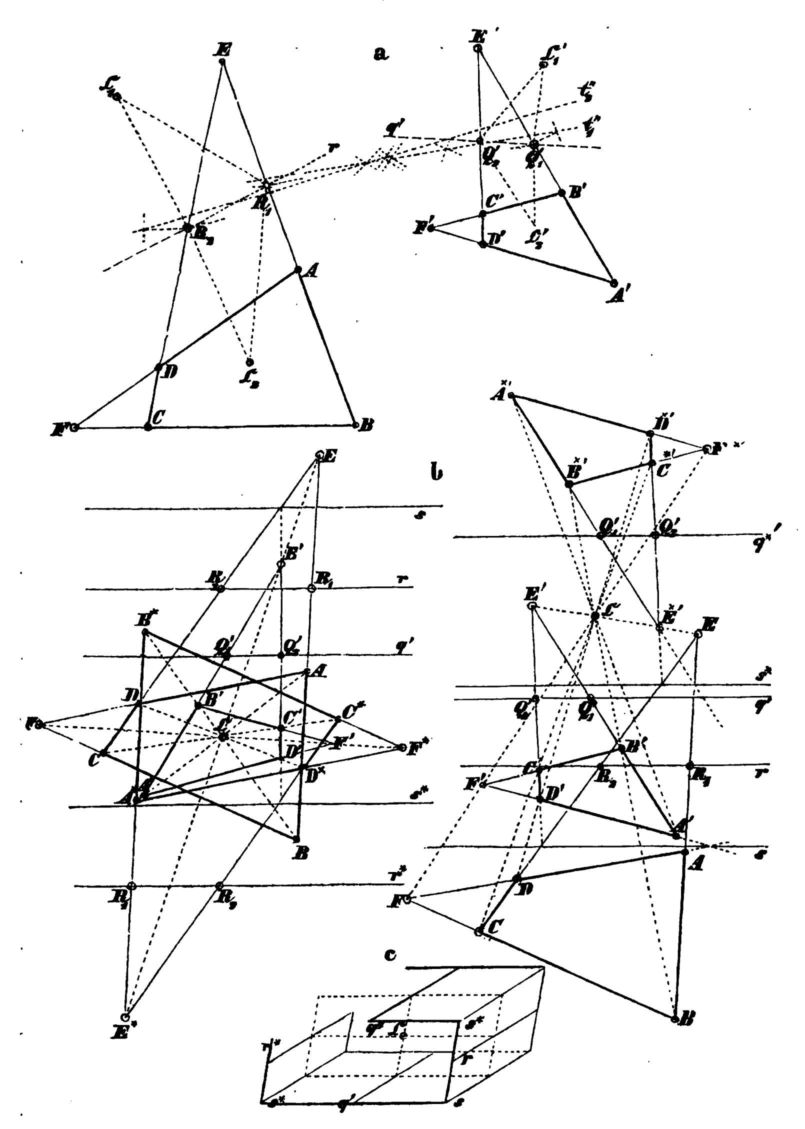
in AB, CD und Q_1', Q_2' in $A'B'$, $C'D'$ und erhält damit in den Geraden R_1R_2 und $Q_1'Q_2'$ die Gegenachsen r und q' der Systeme.

Da die Strahlen vom Zentrum $\mathfrak{C}$ der Kollineation nach den Punkten R_1, R_2 dieselben Winkel mit der Geraden r bilden, wie die Bilder der zugehörigen Geraden $A'B'$, $D'C'$ in Q_1', Q_2' mit der Geraden q', und die Strahlen von $\mathfrak{C}$ nach Q_1', Q_2' dieselben Winkel mit q' wie die Originale AB, DC in R_1, R_2 mit r (§ 9), so erhält man durch ein ihre gegenseitige Lage berücksichtigendes Antragen dieser Winkel in jedem der beiden Systeme zwei Lagen, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$; $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2'$ für das Zentrum $\mathfrak{C}$, orthogonal-symmetrisch zu r bez. q'. (Man könnte jetzt nach § 15, 4 die symmetrisch gleichen Reihen und Büschel t, t', T, T' sowie die Kollineationsachsen s, s' auftragen und zur Weiterkonstruktion der kollinearen Systeme benutzen.) Für eine andere Bestimmung der Zentra, welche das Antragen von Winkeln vermeidet, vergl. man § 31 9 und die Konsequenzen davon in § 33, 12, § 36 12. Bringt man die Systeme nun so zur Deckung, daß ein Paar von jenen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_1'$; $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_2'$ aufeinanderfallen, während zugleich die Gegenachsen q', r zueinander und die Strahlenpaare $\mathfrak{C}R_1$, $A'B'$; $\mathfrak{C}R_2$, $C'D'$; $\mathfrak{C}Q_1'$, AB; $\mathfrak{C}Q_2'$, CD parallel werden, so sind die Vierecke $ABCD$, $A'B'C'D'$ in zentrisch kollineare Lage gebracht, und man erhält die Kollineationsachse s als den Ort der Schnittpunkte entsprechender Paare von Geraden AB, $A'B'$, etc. parallel q', r, und ebensoweit im entgegengesetzten Sinne von $\mathfrak{C}$ entfernt, wie die Mitte zwischen q' und r.

Jeder der beiden angezeigten Vereinigungen entsprechen zwei Lagen der Vierecke und in der Figur b auf S. 123 sind die dem $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_1'$ entsprechenden rechts, die für $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_2'$ links dargestellt; dem Paar $ABCD$, $A'B'C'D'$ entsprechen links wie rechts s, q', r, den Paaren $ABCD$, $A^{*\prime}B^{*\prime}C^{*\prime}D^{*\prime}$ rechts und $A^*B^*C^*D^*$, $A'B'C'D'$ links aber bez. s^*, q', r^* und s^*, $q^{*\prime}$, r. Die Vergleichung der Abstände zwischen den entsprechenden Geraden s, q', r in beiden Figuren macht die Symmetrieverhältnisse der Lagen der Ebenen von Bild und Original ersichtlich.

Eine Skizze c unten zeigt endlich, daß sie auf zwei verschiedene räumliche Lagen zurückkommen und die jedesmaligen beiden Umlegungen repräsentieren, nämlich A rechts

und links mit $A^{*\prime}\ldots$ rechts, $A'\ldots$ links; und A' rechts und links mit A rechts und $A^*\ldots$ links. Beachtet man den Um-



laufungssinn der als Bild und Umlegung zusammengehörigen Vierecke in den vorstehenden Figuren, so hat man links beim Bilde $A'\ldots$ sowohl mit der Umlegung $A\ldots$, wie mit der Umlegung $A^*\ldots$ den nämlichen Umlaufungssinn, den des Uhr-

zeigers bei der alphabetischen Folge; rechts zwischen dem Original $A\ldots$ und seinen Bildern $A'\ldots$, $A^{*\prime}\ldots$ den Gegensatz des Umlaufungssinnes.

Denken wir einen Kreis durch $\mathfrak{C}$ in der Normalebene zu q' und mit dem Fußpunkt H in q' als Mittelpunkt, so ist seine Peripherie der Ort der möglichen Zentra C, von welchen aus das Viereck $A'B'C'D'$ das Bild des Originalvierecks $ABCD$ ist; die Kenntnis des Winkels α, den die Ebene $ABCD$ mit der Bildebene macht, würde die Bestimmung des Zentrums und der Distanz liefern, und damit die Lösung des Problems der umgekehrten Perspektive vollenden. Für $\alpha = 90^0$ wäre H selbst der Hauptpunkt und $\mathfrak{C}H$ die Distanz. Wenn zu einem perspektivischen Bilde das Zentrum gesucht werden soll, so wird also das Bild eines Quadrats oder eines andern regulären Polygons, das man in demselben findet, zur Bestimmung eines solchen Kreises führen, dem das Zentrum angehört, die zweifache Wiederholung davon wird es als den Schnitt zweier Kreise in Normalebenen zur Tafel bestimmen. Dann sind die Lagen- und Größenverhältnisse aller dargestellten Raumformen ableitbar aus den Bestimmungselementen.

1) Welche Spezialitäten ergeben sich für die zentrische Kollineation eines Quadrats mit einem beliebigen Viereck? Wie könnte dieselbe ohne Zuhilfenahme der Projektivitätsgesetze hergestellt werden, auf Grund der Rechtwinkligkeit der Seiten und Diagonalen des Quadrats? (§ 16, 14.)

2) Zwei kongruente Vierecke liefern im allgemeinen unendlich ferne Gegenachsen, die Zusammenlegung zur perspektivischen Lage in der Ebene ist unbestimmt. Im Raum fordert dieselbe den Parallelismus der Ebenen und der Vierecke und liefert alle unendlich fernen Punkte und alle Punkte der Mittelebene zwischen ihnen als Zentra der Projektion, und somit alle Punkte des Raumes. Wenn zugleich (Figur auf S. 123) $BA = AE$, $CD = DE$ sind, so werden die kongruenten symmetrischen Trapeze auch für s in AD und $\mathfrak{C}$ als seine Mitte perspektivisch (Gegenachsen als AB, CD resp. AE, DE halbierend); ebenso für dasselbe s und die Richtung seiner Normalen als Zentrum; etc. Man denke die Achsenschnitte des geraden abgestumpften Kegels und die gleichen Kreisschnitte eines schiefen Kegels wie in § 11, 6.

3) In zwei kollinearen Ebenen ist das Produkt der Abstände entsprechender Punkte von ihren Gegenachsen konstant; denn es ist in perspektivischer Lage so, also auch in der allgemeinen. Und für ein Dreieck von gegebener Fläche in

der einen Ebene variiert der Inhalt des entsprechenden Dreiecks nach dem Produkt der Abstände seiner Ecken von der zugehörigen Gegenachse.

4) In den Vierecken $ABCD$, $A'B'C'D'$ (vergl. Figur a auf S. 123) entsprechen sich außer den Punkten (AB, CD) oder E und E', und (BC, DA) oder F und F' auch (AC, BD) oder G und $(A'C', B'D')$ oder G'; ebenso weiter (EF, BD) und (EF, AC) mit $(E'F', B'D')$ und $(E'F', A'C')$; (FG, AB) und (FG, CD) mit $(F'G', A'B')$ und $(F'G', C'D')$; (GE, AD) und (GE, BC) mit $(G'E', A'D')$ und $(G'E', B'C')$; diese sechs neuen Punktepaare liefern mit den ursprünglichen zwölf und untereinander vier neue Paare entsprechender Geraden, welche neue Punkte und Linien in stets wachsender Zahl, aber immer in entsprechenden Paaren bestimmen; die unbegrenzte Fortsetzung dieser Konstruktion bedeckt die Ebenen mit Netzen entsprechender Elemente; man erhält zwei als Original und Bild zusammengehörige geometrische Netze. Man sieht, die Bildung des Netzes ist die Konstruktion harmonischer Gruppen. (§ 16, 14.)

5) Wenn zwei kollineare ebene Systeme ein Strahlenbüschel Strahl für Strahl entsprechend gemein haben, so haben sie auch eine gerade Reihe Punkt für Punkt entsprechend gemein (und umgekehrt) und sind in perspektivischer oder zentrischer Lage (vergl. § 19, 11).

6) Wenn also insbesondere zwei ebene Systeme (1), (2) mit demselben dritten System (3) für das nämliche Zentrum $\mathfrak{C}$ zentrisch kollinear sind, so sind sie es auch untereinander. Die Kollineationsachsen gehen durch einen Punkt S.

Sind $\Delta_{13} = (\mathfrak{C}SA_1A_3)$, $\Delta_{23} = (\mathfrak{C}SA_2A_3)$ die Charakteristiken der gegebenen Kollineationen, so ist die Charakteristik der Systeme (1) und (2)

$$\Delta_{12} = (\mathfrak{C}SA_1A_2) = \Delta_{13} : \Delta_{23}.$$

Man zeige, daß die Gegenachsen der letzten Kollineation durch die Punkte gehen, in denen die Kollineationsachse s_2 der ersten von der Gegenachse q_1' der zweiten und die Kollineationsachse s_1 der zweiten durch die Gegenachse q_2' der ersten geschnitten wird.

Für $\Delta_{13} = \Delta_{23}$ erhält man $\Delta_{12} = 1$; die Kollineationsachse s_3 geht durch das Zentrum und die Gegenachsen q_3', r_3 sind äquidistant von ihr. (§ 20.)

Für $\Delta_{13} = -\Delta_{23}$ wird $\Delta_{12} = -1$; d. h. es entsteht Involution; s_3 ist parallel zur Verbindungslinie $q_3'r_3$ der Punkte s_2, q_1' und s_1, q_2' und von ihr ebensoweit entfernt wie $\mathfrak{C}$. Man untersuche die den Unterscheidungen des § 22 entsprechenden Spezialfälle.

Wenn zwei ebene Systeme mit demselben dritten System für dieselbe Achse s zentrisch kollinear sind, so

sind sie es auch untereinander. Das entsprechende Zentrum liegt in der Verbindungslinie c der beiden gegebenen Zentra; aus $\varDelta_{13} = (c s a_1 a_3)$, $\varDelta_{23} = (c s a_2 a_3)$ folgt $\varDelta_{12} = (c s a_1 a_2) = \varDelta_{13} : \varDelta_{23}$; etc.

7) Schreibt man $(A \,.\, BCDX) = (A' \,.\, B'C'D'X')$ in entwickelter Form,

$$\frac{\sin BAD}{\sin CAD} : \frac{\sin BAX}{\sin CAX} = \frac{\sin B'A'D'}{\sin C'A'D'} : \frac{\sin B\ A'X'}{\sin C'A'X'},$$

so hat man sofort

$$\frac{BA \,.\, DA \,.\, \sin BAD}{CA \,.\, DA \,.\, \sin CAD} : \frac{BA \,.\, XA \,.\, \sin BAX}{CA \,.\, XA \,.\, \sin CAX} = \ldots$$

d. h. die Doppelverhältnisgleichheit entsprechender Dreiecksflächen,

$$\frac{BAD}{CAD} : \frac{BAX}{CAX} = \frac{B'A'D'}{C'A'D'} : \frac{B'A'X'}{C'A'X'};$$

und analog für sechs Punktepaare A, B, C, D, E, F, etc. das Doppelverhältnis der Dreiecksflächen $\frac{ACD}{BCD} : \frac{AEF}{BEF}$ konstant vom Original zum Bild. Denn mit G und H als Schnitten der Geraden AB mit CD, resp. EF hat man

$$\frac{AG}{BG} = \frac{ACD}{BCD}, \quad \frac{AH}{BH} = \frac{AEF}{BEF}$$

und daher $(ABGH)$ ein vom Original zum Bild bleibendes Doppelverhältnis als Ausdruck des geschriebenen Doppelverhältnisses der Dreiecksflächen. Für die Affinität gehen diese Relationen in die einfache Verhältnisgleichheit entsprechender Flächen über. (Vergl. § 22, a.)

Überblick. Wir blicken zurück und vorwärts. Die Zentralprojektion fügt zu dem Punkt als seinen Schein die projizierende Gerade mit der Punktreihe seiner Bilder und zu der geraden Linie oder Punktreihe als Schein das projizierende Strahlenbüschel oder die projizierende Ebene, die ihre Bilder erfüllen; und insofern eine Ebene durch ein Strahlenbüschel bestimmt werden kann, führt die Zentralprojektion als den Schein des letzten das projizierende Ebenenbüschel als die dritte für die Untersuchung nötige Anschauung ein; seine ebenen Querschnitte sind die Bilder des ersten. Diese drei, die gerade Punktreihe, das ebene Strahlenbüschel und das Ebenenbüschel, bilden eine in sich abgeschlossene Gruppe gegenüber dem Prozeß des Projizierens, der aus der Bildung des Scheines und der nachfolgenden des Schnittes zusammengesetzt ist (vergl. p. 3 unter Methode) und sie sind im Falle ihres Zusammenhanges durch Zentralprojektion durch das näm-

liche Gesetz verbunden. Jedes der drei Gebilde geht bei dem Prozeß des Projizierens aus jedem der zwei anderen hervor: Die Punktreihe als Schnitt aus dem Strahlenbüschel durch eine beliebige Gerade; das Strahlenbüschel als Schein der Punktreihe aus einem Punkte und als Schnitt eines Ebenenbüschels durch eine Ebene; das Ebenenbüschel als Schein des Strahlenbüschels aus einem Punkte und als Schein der Punktreihe aus einer Geraden — mit zweckmäßiger Erweiterung des Ausdrucks. (§ 16.) Diese drei Gebilde sind, sowie sie paarweise beim Prozeß des Projizierens aus einem Zentrum auftreten, in perspektivischer Lage und genügen dem Gesetz der Doppelverhältnisgleichheit entsprechender Gruppen, oder sie sind projektivisch in perspektivischer Lage; sie heißen projektivisch — ohne Beifügung wenn diese spezielle Lage aufgehoben wird. Man nennt diese drei Gebilde die projektivischen Elementargebilde oder die Grundgebilde der ersten Stufe.

Um die unendliche Mannigfaltigkeit der Figuren einer Ebene zu projizieren, betrachtet die Zentralprojektion das ebene System entweder als eine Vereinigung von unzählig vielen Punkten oder als eine solche von unzählig vielen Geraden (§ 11); jene konnte sie als verteilt in unzählig viele gerade Reihen, diese als verteilt in unzählig viele Strahlenbüschel auffassen, sodaß jeder einzelne Punkt als gemeinsamer Punkt von zwei solchen Reihen und jede einzelne Gerade als gemeinsamer Strahl von zwei solchen Büscheln bestimmt ist. Das ebene System ist in beiderlei Betracht eine Vereinigung von unendlich vielen Elementar- oder Grundgebilden erster Stufe. Es wird nun projiziert durch die Verbindung aller seiner Elemente mit dem Zentrum der Projektion, also durch die Gesamtheit der projizierenden Strahlen seiner Punkte — man sagt durch ein Strahlenbündel — oder der projizierenden Ebenen seiner Geraden — man sagt durch ein Ebenenbündel; also durch eine Unendlichkeit von projizierenden Strahlenbüscheln seiner geraden Reihen nach der ersten Auffassung und durch eine Unendlichkeit von projizierenden Ebenenbüscheln seiner Strahlenbüschel nach der zweiten. Der Schein des ebenen Systems aus einem Punkte außerhalb desselben, das projizierende Strah-

lenbündel oder Ebenenbündel ist auch eine Vereinigung von unendlich vielen Grundgebilden erster Stufe. Man nennt darum das ebene System von Punkten oder Strahlen und das Strahlen- oder Ebenenbündel die Grund- oder Elementargebilde zweiter Stufe. Die konstituierenden Grundgebilde erster Stufe im ebenen System und im projizierenden Bündel sind im Falle der Projektion perspektivisch und bleiben, wenn ihr Entsprechen bei Aufhebung dieser Lage festgehalten wird, projektivisch — und dies allein macht die Brauchbarkeit der Projektionen aus. Die projektivischen Eigenschaften der Gebilde erster Stufe führen zu denen der Gebilde zweiter Stufe durch Zusammensetzung (§ 15 f. § 23).

Wenn insbesondere das ebene System, dessen Schein man bildet, die Vereinigung zweier ebenen Systeme zur zentrischen Kollineation ist (§ 14), so ist auch das entstehende Bündel aus Strahlen und Ebenen eines Original- und eines Bildsystems zusammengesetzt, die in zentrischer Kollineation sind. Je zwei entsprechende Strahlen liegen mit dem Zentralstrahl, dem projizierenden des Kollineationszentrums, in einer Ebene; und je zwei entsprechende Ebenen schneiden sich in der Kollineationsebene, der projizierenden der Kollineationsachse. Zwei entsprechende Strahlen bilden mit dem Zentralstrahl und dem Schnitt ihrer Ebene mit der Kollineationsebene ein konstantes Doppelverhältnis; dasselbe Doppelverhältnis wird auch von zwei entsprechenden Ebenen mit der nach dem Zentralstrahl gehenden Ebene ihres Büschels und der Kollineationsebene hervorgebracht und kann als Charakteristik Δ der Zentralkollineation im Bündel bezeichnet werden (§ 19). Mit $\Delta = -1$ ist diese Kollineation involutorisch (§ 20), alle entsprechenden Elemente entsprechen sich vertauschbar (§ 22 Schluß).

Es ist die natürliche Fortsetzung dieser Betrachtungsweise, daß der Raum als die unendliche Menge seiner Punkte, seiner Ebenen und seiner Geraden betrachtet werden muß. Als Punktsystem ist er z. B. die Vereinigung von unendlich vielen ebenen Punktsystemen, die in ein Ebenenbüschel gruppiert sind; als Ebenensystem ist er die Vereinigung von unendlich vielen Ebenenbündeln, deren Scheitel in eine gerade Reihe geordnet werden können. In beiderlei Betracht

setzt er sich aus den Gebilden zweiter Stufe ebenso zusammen, wie diese aus denen der ersten zusammengesetzt sind; er wird darum als ein Elementar- oder Grundgebilde dritter Stufe bezeichnet. Ganz analog den Verhältnissen der zentrischen Kollineation ebener Systeme, bei denen die entsprechenden Grundgebilde erster Stufe in perspektivischer Lage für ein Zentrum sind, gibt es auch wirklich eine Abbildung des Raumes durch den Raum, bei welcher die entsprechenden Grundgebilde erster und zweiter Stufe, aus denen der Originalraum und der Bildraum sich zusammensetzen, in perspektivischer Lage für ein Zentrum sind. (Vergl. § 36 f.) Sie wird als zentrische Kollineation räumlicher Systeme bezeichnet und liefert die Modellierungsmethoden der darstellenden Geometrie. Betrachtet man den Raum als den Inbegriff aller seiner Geraden, so kann man dieselben in die Strahlenbündel verteilen, deren Scheitel die sämtlichen Punkte einer Ebene sind, und erkennt ihn aus Gebilden zweiter Stufe ebenso zusammengesetzt, wie diese aus den Elementen Punkt, Ebene und Strahl; er ist also in diesem Sinne als Gebilde vierter Stufe zu bezeichnen. Die Übertragung der Eigenschaften aus denen der Gebilde niederer Stufe durch Zusammensetzung bleibt bestehen.

So entspringt aus den Grundanschauungen und der Methode der darstellenden Geometrie das natürliche System der Geometrie. In demselben ist die Scheidung der Geometrie in der Ebene von der Geometrie des Raumes aufgehoben.

Wir sehen den Projektionsprozeß raumbildend wirken in gleicher Weise von der Geraden zur Ebene und von der Ebene zum Raum; die Punkte der Geraden werden mit einem Punkte außer ihr durch Gerade verbunden bei Bildung der Ebene als ihrer projizierenden; die Punkte der Ebene mit einem Punkte außer ihr bei Bildung des projizierenden Bündels, welches den Raum von drei Dimensionen erfüllt. Es ist die natürliche Fortsetzung dieses Verfahrens, daß man den drei-dimensionalen Raum von einem Punkte außer ihm projiziert denkt durch Strahlen, die nur je einen Punkt mit ihm gemein haben und nun den Raum von vier Dimensionen

bilden, indem alle andern Punkte jedes derselben diesem Raume angehören. Wir versagen uns die Verfolgung dieser Methode über den drei-dimensionalen Raum hinaus in diesem Werke; aber die fundamentalen Gedanken desselben, und selbst der Aufbau der Entwicklung z. B. der §§ 1—11 im vorigen bieten sich für diese Fortsetzung unverändert dar.

Die Beziehung der Doppelverhältnisgleichheit oder Projektivität, welche sich als fundamental ergibt, gilt für die drei Grundgebilde der ersten Stufe ganz in gleicher Weise; in den allgemeinen Eigenschaften der Figuren, welche sich auf sie gründen, treten daher Beziehungen von geraden Reihen und von Strahlenbüscheln — vergl. als Beispiel § 23, 5; §§ 17, 18 — und Ebenenbüscheln in gleicher Weise hervor; die Sätze, Konstruktionen und Beweise zeigen ein Gesetz der Symmetrie, das als eine Korrespondenz zwischen dem Liegen in Geraden oder in Ebenen und dem Gehen durch Gerade oder durch Punkte, zwischen Ebene und Punkt, zwischen der Geraden als Verbindungslinie von zwei Punkten und der Geraden als Schnittlinie von zwei Ebenen bezeichnet werden kann. Dasselbe Gesetz zeigt sich auch als Symmetriegesetz des Systems, in welchem die Punkte einer Geraden, die Ebenen durch eine Gerade, die Geraden durch einen Punkt in einer Ebene als Gebilde erster Stufe, dann die Punkte einer Ebene und die Ebenen durch einen Punkt, die Geraden in einer Ebene und die Geraden durch einen Punkt nebeneinander als Gebilde zweiter Stufe, die Punkte und die Ebenen des Raums als Gebilde dritter Stufe erscheinen. Wir nennen es das Gesetz der Dualität. Als elementare Beispiele dafür dienen:

B. 1) Die gerade Linie enthält unendlich viele Punkte und liegt in unendlich vielen Ebenen; somit bestimmen

ein Punkt und eine Gerade (als Ebenenbüschel) eine Ebene.	eine Ebene und eine Gerade (als Punktreihe) einen Punkt.

Die Zentralprojektion beginnt mit der Bestimmung des sich selbst dualen Elements, der Geraden; und es geht von ihr ebenso zu den Punkten wie zu den Ebenen.

2) Drei Punkte bestimmen eine Ebene, wenn sie nicht in einer Geraden liegen.	Drei Ebenen bestimmen einen Punkt, wenn sie nicht durch eine Gerade gehen.
3) Wenn von beliebig vielen Geraden jede zwei sich schnei-	Wenn von beliebig vielen Geraden jede zwei sich schneiden,

den, aber nicht alle durch einen Punkt gehen, so liegen sie alle in einer Ebene.

aber nicht alle in einer Ebene liegen, so gehen sie alle durch einen Punkt.

4) Die Transversale zu zwei windschiefen Geraden aus einem Punkte ist die Schnittlinie der Ebenen, welche jene Geraden mit diesem Punkte bestimmen.

Die Transversale zu zwei windschiefen Geraden in einer Ebene ist die Verbindungslinie der Punkte, welche jene Geraden mit dieser Ebene bestimmen.

5) Die Transversalen zu drei Geraden sind die Schnittlinien der Ebenenpaare, welche zwei derselben mit den Punkten auf der dritten verbinden.

Die Transversalen zu drei Geraden sind die Verbindungslinien der Punktepaare, in welchen sich zwei derselben mit den Ebenen durch die dritte schneiden.

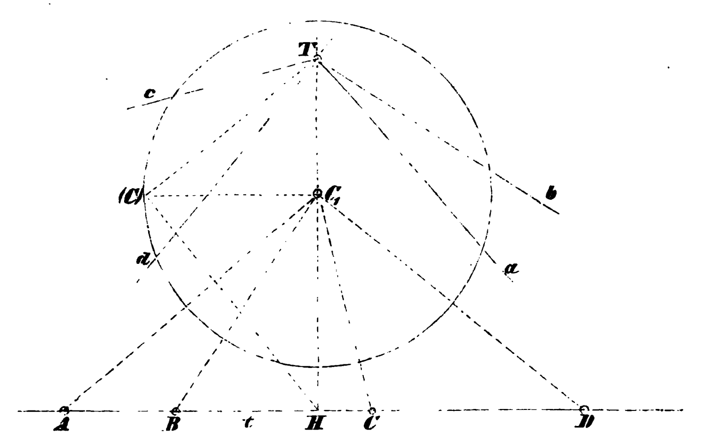
Man vergleiche auch die Sätze über die perspektivische Lage der projektivischen Gebilde erster Stufe in § 17, 10.

Man kann, analog zu dem Übergang von einer Figur zu einer mit ihr kollinearen, einen Übergang durch Konstruktion zwischen solchen dualen oder reziproken Figuren denken.

Zu einer speziellen Korrespondenz in der Ebene, welche den Charakter der Dualität zeigt, wie er hiernach erwartet werden muß — also zwischen Punkten und Strahlen derselben — hat in der Tat die konstruktive Untersuchung bereits geführt. Jedem Punkte der Bildebene als Spur eines projizierenden Strahls entspricht eine Gerade in derselben als Spur einer projizierenden Ebene, welche zu jenem normal ist (§ 10); die Punkte derselben Reihe haben in dieser Beziehung zu ihren entsprechenden Strahlen die Strahlen eines Büschels aus dem der Geraden der Reihe entsprechenden Punkt und umgekehrt. Solche entsprechenden Reihen und Strahlenbüschel haben gleiches Doppelverhältnis — weil nach jener Konstruktion das aus dem Hauptpunkt C_1 über der Reihe $ABC\ldots$ gebildete Büschel zu dem Büschel der Spuren $abc\ldots$ (Figur S. 132) der entsprechenden Normalebenen gleichwinklig, also auch projektivisch ist. Die so gebildeten Systeme (§ 20, 12) sind eine besondere Art der reziproken Systeme, der wir noch wiederholt, erst in der Ebene (§ 34 f.), dann im Raume (Bd. II, §§ 74, 76, und Bd. III) begegnen werden; sie sind involutorisch, indem einem ihrer Elemente stets dasselbe andere entspricht, ob man es zum einen oder andern System rechnet. Sie gehören daher zu den Polarsystemen; man kann

sie speziell Orthogonalsysteme nennen, indem man den für die projizierenden Bündel genau bezeichnenden Ausdruck auf ihre Spuren in der Bildebene überträgt. In dieser entspricht immer der unendlich fernen Geraden der Fußpunkt der Normale vom Scheitel des Bündels oder der Hauptpunkt, und jedem Punkte des Distanzkreises seine Tangente im andern Endpunkt des nach ihm gehenden Durchmessers. (Vgl. §§ 47, 51.)

Die allgemeine Korrespondenz zweier Ebenen von Punkt zu Strahl, von Reihe zu Büschel und umgekehrt wird nämlich Reziprozität genannt, sodaß man zwei Formen der Projektivität ebener Systeme unterscheidet als Kollineation und Reziprozität, je nachdem die einander entsprechenden



Elemente gleichartig oder ungleichartig sind. Wenn zu vier Punkten A, B, C, D der einen Ebene die vier entsprechenden Geraden a', b', c', d' der andern gegeben sind, sodaß keine drei von jenen derselben Reihe und daher keine drei von diesen demselben Büschel angehören, so ist die Reziprozität der beiden Ebenen bestimmt, d. h. zu einem beliebigen Punkte X und einer beliebigen Geraden y der ersten Ebene kann die entsprechende Gerade x' und der entsprechende Punkt Y' der zweiten konstruiert werden und umgekehrt. Denn X bestimmt mit A und B die vierten Strahlen in den Büscheln $A\,.\,BCDX$ und $B\,.\,ACDX$, denen die Reihen $a'\,.\,b'c'd'x'$ und $b'\,.\,a'c'd'x'$ bez. projektivisch entsprechen, und man erhält so zwei Punkte des Strahles x'; und wenn man zu A, B, C, D als Ecken eines vollständigen Vierecks die Diagonalpunkte (AB, CD) oder E,

(BC, AD) oder F und (CA, BD) oder G (Fig. S. 123) bestimmt, denen im Vierseit der a', b', c', d' die Diagonalen $(a'b', c'd')$ oder e', etc. entsprechen, so erhält man durch eine Gerade y auf irgend zwei der sechs Geraden $AB, AC, \ldots$ ihrer Ebene die vierten Punkte von Reihen, deren entsprechende Büschel in der andern Ebene durch die Korrespondenten der drei ersten und die Projektivität bestimmt sind, sodaß man zwei in Y' sich schneidende Gerade erhält. Man wendet dabei, wie man sieht, ganz wie im Falle der Kollineation die Konstruktion projektivischer Gebilde erster Stufe zweimal an. Analog im Raume bei den reziproken Bündeln, die als Scheine von reziproken Ebenen angesehen werden dürfen, sodaß man ihre Konstruktion durch die von ebenen Schnitten ersetzen kann, in welche der Distanzkreis für den jeweiligen Bündelscheitel als Zentrum eingetragen ist.

Die vorher bezeichneten besonderen Fälle gehören der involutorischen Reziprozität an, bei welcher das Zusammenliegen zweier reziproken Gebilde in derselben Ebene oder an demselben Punkte (im Falle der Bündel) stattfindet und jedem Element derselben das nämliche andere Element entspricht, gleichviel ob man es zum ersten oder zweiten Gebilde rechnet. (Vergl. § 20.) Wir werden später (in Bd. III) sehen, daß der allgemeine Fall von diesem nur durch die Lage unterschieden ist, sodaß, wie wir sagen wollen, zwei reziproke Gebilde derselben Stufe stets in involutorische Lage gebracht werden können.

Wenn zwei Gebilde kollinear sind, so wird ein Gebilde, welches zu dem einen von ihnen reziprok ist, auch zum andern reziprok sein und zwar in allgemeiner Weise in den Fällen a) bis e) des § 22 und involutorisch im Falle des § 20. Wir wollen die Fälle f) und g) der kollinearen Ebenen mit singulären Elementen (Art. 22) in diesem Betracht hervorheben, weil sie sofort zu den Reziprozitäten der Ebenen mit singulären Elementen hinführen. Es entstehen aus f) zwei verschiedene Fälle spezieller Reziprozität, je nachdem wir das eine oder das andere der beiden ebenen Systeme durch ein reziprokes ersetzen. Bei Ersetzung des Systems mit dem singulären Punkt erhalten wir f_1) eine spezielle Reziprozität mit singulären Linien, wo der entsprechende Punkt der singulären Linie jeder

Ebene ein unbestimmter Punkt der andern Ebene ist, und jedem Punkte in der singulären Linie der einen eine unbestimmte Gerade durch einen bestimmten Punkt in der singulären Linie der andern entspricht, während die korrespondierenden Punkte der singulären Linien projektivische Reihen bilden.

Im andern Falle erhalten wir für f_2) eine spezielle Reziprozität mit singulären Punkten, wo jedem derselben eine unbestimmte Gerade der andern Ebene, jeder Geraden durch den singulären Punkt der einen aber ein unbestimmter Punkt in einer bestimmten ihr projektivisch zugeordneten Geraden durch den singulären Punkt der andern korrespondiert.

Man erhält endlich auf demselben Wege aus der speziellen Kollineation g) Art. 22 den Fall g) einer speziellen Reciprozität, wo jede Ebene einen singulären Punkt und eine durch ihn gehende singuläre Linie enthält, denen je eine ganz unbestimmte Gerade und ein ganz unbestimmter Punkt der andern Ebene entsprechen, während einem vom singulären Punkt verschiedenen Punkte der singulären Linie der einen Ebene ein unbestimmter Strahl durch den singulären Punkt der andern entspricht.

B. 1) Man zeige, wie die Konstruktion des entsprechenden Elements zu einem gegebenen in kollinearen Bündeln aus vier Strahlen des einen und den vier entsprechenden des andern, von denen keine drei in einer Ebene liegen, durch zweifache Wiederholung der Konstruktion von Gebilden erster Stufe ausgeführt wird.

2) Man weise dasselbe nach im Falle reziproker Bündel und erörtere die Konstruktion der projektivischen Beziehung zwischen Ebene und Bündel, wenn vier Punkte in jener und die entsprechenden Strahlen (andernfalls Ebenen) in diesem gegeben sind.

3) Für zentralkollineare Bündel läßt sich aus den Relationen in § 18, 10 eine Reihe von metrischen Eigenschaften ableiten.

4) Man soll die beiden singulären Kollineationen von Bündeln und die drei singulären Reziprozitäten der Bündel charakterisieren; ebenso die singulären Projektivitäten zwischen Bündel und Ebene.

Wenn wir im Überblick gezeigt haben, wie die darstellend geometrische Methode in das natürliche System der Geometrie einführt, so folgen wir doch diesem systematischen Zuge hier noch nicht weiter; wir wenden aber die Idee der Dualität auf die Elemente des Projektionsprozesses an und erkennen, daß der Bestimmung der Elemente des Raumes durch

die Elemente, d. h. die Geraden und Punkte, einer festen Bildebene **s** unter Benutzung einer zweiten festen Ebene **u** und eines festen Punktes *C* eine andere Bestimmung derselben durch die Elemente, d. h. die Strahlen und Ebenen eines festen Punktes *S* dual entspricht, unter Benutzung eines zweiten festen Punktes *U* und einer festen Ebene **c**. Auch sie geht von der Bestimmung der geraden Linie aus; an die Stelle des Schnittpunktes mit der Bildebene tritt ihre Verbindungsebene mit dem festen Punkte *S*, an die Stelle des Punktes *U'*, wo der von *C* nach ihrem Schnitt *U* in **u** gehende Strahl **s** trifft, tritt die Ebene, welche die Schnittlinie von **c** mit der Verbindungsebene von *U* mit der Geraden mit *S* verbindet; etc. Wir können auch eines der drei, oder *S* und *U*, aber nicht *U* und **c** zugleich in unendliche Ferne rücken, ohne die Bestimmung zu verlieren. Die Methode ist ebenso einfach und richtig gebildet wie die Zentralprojektion, verdient daher die Überlegung: praktische Verwendung wird sie nicht finden, weil sie nicht Bilder im üblichen Sinne liefert.

Wenn man dagegen aus zwei verschiedenen Zentren auf dieselbe Ebene oder auf zwei verschiedene Ebenen projiziert, so ist das im Grunde gegen das wissenschaftliche Gesetz der Sparsamkeit im Verbrauch von Mitteln; aber man wird wohl immer eine orthogonale und eine schiefe Parallelprojektion auf dieselbe Ebene, als Grundriß und Schatten für Sonnenlicht von demselben Objekt, und die Orthogonalprojektionen auf zwei zueinander rechtwinklige Ebenen für natürliche Kombinationen ansehen. Doch pflanzt sich die besagte Verschwendung dabei fort, die Konstruktionen sind in diesen Bestimmungen weitaus nicht so einfach, wie in den betrachteten Hauptfällen. Die projektivischen Beziehungen zwischen dem Original und den Bildern bleiben unverändert.

Die darstellende Geometrie hat es aber ferner mit den speziellen Raumformen, mit Kurven, etc. zu tun und ein guter Teil ihrer unentbehrlichen Objekte ist nicht theoretisch und systematisch, sondern technisch praktisch bestimmt. Es entspricht dieser Art unserer Disziplin, daß wir die entwickelten Ideen zuerst auf die einfachste und häufigst vorkommende Kurve, den Kreis, als ein solches Objekt der darstellenden Geometrie, anwenden.

B. Die konstruktive Theorie der Kegelschnitte als Kreisprojektionen.

24. Die Kreislinie oder der Kreis erscheint zunächst als eine stetige Folge von Punkten, die von einem Zentrum gleichweit entfernt sind und von denen daher nie mehr als zwei in einer geraden Linie liegen; wenn sich die gerade Linie um den einen ihrer Schnittpunkte mit dem Kreise dreht, so bewegt sich der andere in ihr, und, indem er bei ihrer halben Umdrehung die ganze Kreisperipherie durchläuft und somit von der einen Seite des festen Schnittpunktes im Kreise auf die andere Seite desselben gelangt, wird die zu seinem Radius normale Grenzlage der Geraden markiert, in der ihre beiden Schnittpunkte mit dem Kreise einander unendlich nahe liegen oder in einen zusammenfallen, die Tangente. Eine gerade Linie, die sich in der Ebene so bewegt, daß sie vom Zentrum die feste Entfernung des Radius behält, deckt sich nacheinander mit allen seinen Tangenten und erzeugt den Kreis als ihre Umhüllung oder Enveloppe.

Die Projektion eines Kreises ist der Ort der Durchstoßpunkte der vom Zentrum der Projektion nach den Punkten seiner Peripherie gehenden Strahlen mit der Bildebene; sie ist auch die Enveloppe der Spuren derjenigen Ebenen, welche vom Zentrum der Projektion nach den Tangenten des Kreises gehen. Insofern jene Strahlen wie diese Ebenen gleichmäßig den projizierenden Kegel des Originalkreises bilden, der durch seinen Schnitt mit der Bildebene die Projektion erzeugt, nennt man die Zentralprojektionen des Kreises Kegelschnitte — man meint Schnitte eines Kreiskegels. Die fundamentalen Eigenschaften derselben ergeben sich für beide bezeichnete Anschauungen nach den Grundgesetzen der projekti-

vischen ebenen Systeme aus beiden Haupteigenschaften des Kreises hinsichtlich seiner Punkte und Tangenten:

I. Der Peripheriewinkel über demselben Bogen des Kreises ist konstant.

II. Das von zwei festen Tangenten begrenzte Stück einer beweglichen Tangente des Kreises wird von seinem Mittelpunkt aus unter konstantem Winkel gesehen.

Also für zwei willkürliche Punkte T_1, T_2 und zwei feste Punkte A, B des Kreises vom Mittelpunkt M (nebenstehende Figur) ist

$$\angle AT_1B = \angle AT_2B = \tfrac{1}{2}\angle AMB;$$

und für zwei willkürliche Tangenten t_1, t_2 und zwei feste Tangenten a, b desselben mit den bez. Berührungspunkten T_1, T_2, A, B, und den Schnittpunkten A_1, A_2, B_1, B_2 der letzten in den ersten beiden

$$\angle A_1MB_1 = \angle A_2MB_2 = \tfrac{1}{2}\angle AMB = \tfrac{1}{2}\angle(a, b).$$

(Denn die Geraden MA_2, MB_2, sind rechtwinklig zu T_2A bez. T_2B und ebenso MA_1, MB_1 zu T_1A bez. T_1B).

Sind A, B, C, X vier Punkte des Kreises und a, b, c, x die zugehörigen Tangenten desselben (obenstehende Figur), welche die Tangenten t_1, t_2 in T_1, T_2 in A_1, B_1, C_1, X_1 und A_2, B_2, C_2, X_2 bez. schneiden, so ist wegen der Gleichheit der Peripheriewinkel

$$(T_1 \,.\, ABCX) = (T_2 \,.\, ABCX);$$

die projektivische Abhängigkeit eines beliebigen Peripheriepunktes X von fünf festen Punkten derselben

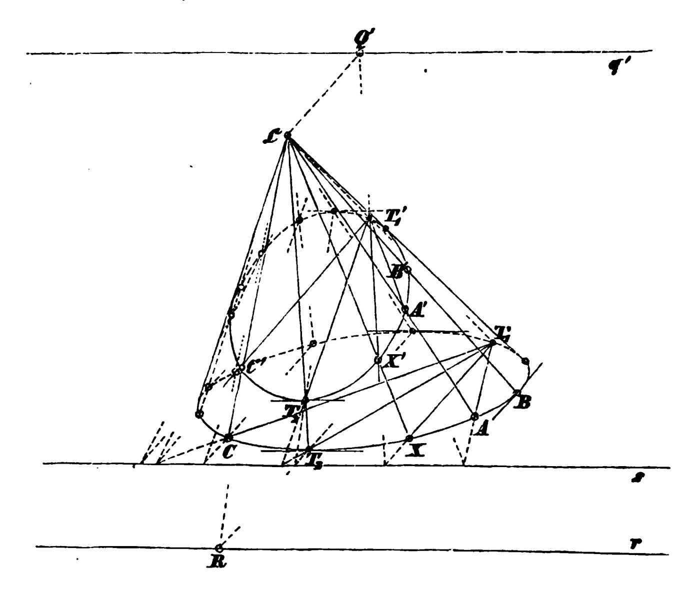
$$T_1,\ T_2,\ A,\ B,\ C.$$

Nach dem andern Satze aber

$$(M \,.\, A_1B_1C_1X_1) = (M \,.\, A_2B_2C_2X_2) = (A_1B_1C_1X_1) = (A_2B_2C_2X_2)$$
$$= (T_1 \,.\, ABCX), \text{ d. i. auch } = (T_2 \,.\, ABCX);$$

die projektivische Abhängigkeit einer beliebigen Tangente x von fünf festen Tangenten.

Dieselben Gleichungen gelten nach der Unveränderlichkeit der Doppelverhältnisse vom Original zur Projektion in jeder Projektion des Kreises, wenn die gleichen Buchstaben die Projektionen der bezüglichen Punkte bezeichnen (untenstehende Figur und Figur auf S. 139 bez. für das elliptische und hyperbolische Bild). Sie stellen die Ableitung des Querschnittes der Tafelebene sq' mit dem Kegel aus dem Mittelpunkt $\mathfrak{C}$ über dem in der Ebene sr hinter ihr liegenden, als Ellipse erscheinenden Kreise durch T_1, T_2, $A\ldots$ anschaulich dar; im ersten Falle trifft r diesen Kreis nicht, im zweiten schneidet sie ihn in zwei Punkten,



welche, weil die Ebene $\mathfrak{C}r$ zur Querschnittebene sq' parallel ist, zu den unendlich entfernten Punkten der Querschnittkurve und ihren Tangenten führen, den Asymptoten der Hyperbel. Denn die Projektivität der Strahlenbüschel

$$(T_1 \,.\, ABC\ldots) \quad \text{und} \quad (T_2 \,.\, ABC\ldots)$$

zieht die der zugehörigen projizierenden Ebenenbüschel nach sich und damit die der Strahlenbüschel in der Projektion

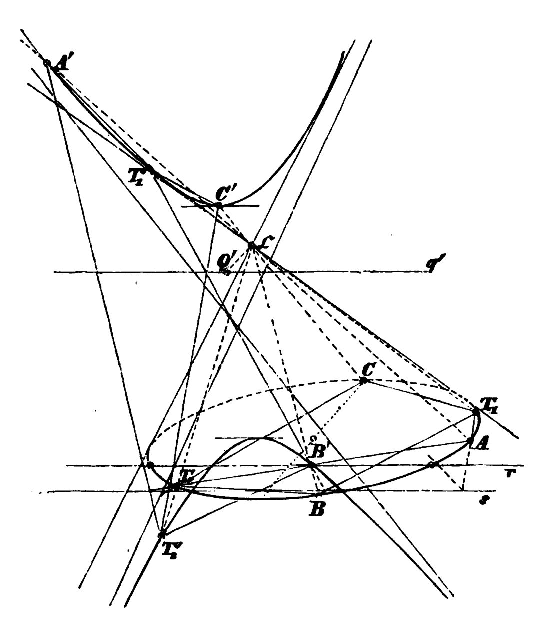
$$(T_1' \,.\, A'B'C'\ldots) \quad \text{und} \quad (T_2' \,.\, A'B'C'\ldots).$$

Man hat also die folgenden Gesetze:

Die geraden Linien von vier festen Punkten eines Kegelschnittes nach einem beliebigen fünften Punkte desselben bilden Strahlenbüschel von unveränderlichem Doppelverhältnis.

Die Durchschnittspunkte von vier festen Tangenten eines Kegelschnittes mit einer beliebigen fünften Tangente desselben bilden Punktreihen von unveränderlichem Doppelverhältnis.

Man sagt daher von vier festen Punkten oder Tangenten eines Kegelschnittes, daß sie ein bestimmtes Doppelverhältnis haben, und hat dann den Satz: Das Doppelverhältnis von vier Punkten eines Kegelschnittes ist konstant und dem Doppelverhältnis seiner vier Tangenten in denselben gleich. Damit ist offenbar das Gebiet wesentlich erweitert, in welchem die Doppelverhältnisgleichheiten gelten.



Diese Eigenschaften kommen nicht nur allen Kreisprojektionen zu, sondern sie gehören, da sie durch Projektion nicht geändert werden, wiederum nicht nur ihnen selbst, sondern auch allen ihren Projektionen an; wir nennen sie projektivische Eigenschaften und werden ihre große Wichtigkeit für die darstellende Geometrie an diesem Beispiel näher kennen lernen.

B. 1) Wählt man die Tangenten t_1, t_2 parallel und betrachtet die bewegliche Tangente in parallelen Lagen a, a^*, so bilden die Berührungspunkte T_1, T_2, A, A^* für jede Lage ein Rechteck mit den Durchmessern $T_1 T_2$, AA^* und die Tangenten einen Rhombus; von einem beliebigen Peripheriepunkte X aus erscheint jeder dieser

Durchmesser unter rechtem Winkel und die zugehörigen Tangenten x, x^* schneiden aus t_1, t_2 Punkte X_1, X_2, bez. X_1^*, X_2^* die beim Mittelpunkte M einen rechten Winkel bilden. Fünf Punkte einer Ebene $T_1', T_2', A', A^{*\prime}, X'$, von denen keine drei in gerader Linie liegen, können daher als Zentralprojektionen zu fünf Punkten eines Kreises betrachtet werden, indem man das Viereck aus vieren in ein Rechteck überführt: q' ist eine seiner Diagonalen, $\mathfrak{C}$ ein Punkt in dem Kreise mit den zugehörigen Diagonalpunkten als Durchmesserenden; denn der fünfte Punkt wird dann der Scheitel von rechten Winkeln über den Gegenecken T_1, T_2 etc. und liefert einen zweiten Ortskreis für $\mathfrak{C}$, also zwei Lagen des Kollineationszentrums.

Und analog fünf Gerade $t_1'\, t_2', a', a^{*\prime}, x'$ von allgemeiner Lage; vier von ihnen als Bilder der Seiten eines Rhombus bestimmen q' und einen Ortskreis für $\mathfrak{C}$ aus der Rechtwinkligkeit der Diagonalen; einen zweiten bietet die Rechtwinkligkeit am Schnitt der Diagonalen für das Stück von x' zwischen den Gegenseiten.

2) Man konstruiere Punkte des durch drei Punkte A, B, C gehenden Kreises bei unzugänglichem Mittelpunkte desselben — vermittelst des perspektivischen Zentrums T gleicher Strahlenbüschel, durch die Relation

$$\angle ABC = \angle CAT, \quad \angle BAC = \angle CBT.$$

Oder aus zwei Punkten T_1, T_2 und der Tangente in einem. Wir denken T_1, T_2 als Scheitel, also $T_1 T_2$ als o_1, p_2 und die Tangente in T_1 als p_1 in den erzeugenden Büscheln, in denen das Perpendikel in T_1 zu p_1 und das in T_2 zu $T_1 T_2$ ein Paar a_1, a_2 sind und deren perspektivisches Zentrum T die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks über $T_1 T_2$ mit der Seite p_1 ist, sodaß es durch die Halbierung von $T_1 T_2$ mittelst des Lineals gefunden werden kann (§ 4, 6). Jeder Strahl aus T schneidet a_2, a_1 in zwei Punkten, die mit T_1, T_2 verbunden entsprechende Strahlen der Büschel und somit einen neuen Punkt des Kreises liefern. Der Kreis entsteht als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen in gleichen Büscheln von gleichem Drehungssinn.

Wenn zwei solche Büscheln perspektivisch liegen, also ihre entsprechenden Strahlen jeweils parallel sind, so erzeugen sie als Ort der Schnitte entsprechender Strahlen ihren gemeinsamen Strahl und die unendlich ferne Gerade; oder jede Gerade kann mit der unendlich fernen Geraden einer durch sie gehenden Ebene zusammen als ein Kreis angesehen werden.

3) Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen in gleichen Büscheln von entgegengesetztem Drehungssinn ist eine gleichseitige Hyperbel. (In der perspektivischen Lage der gemeinsame Strahl und die halbierende Normale des Abstandes ihrer Scheitel). Sind T_1, T_2 die Scheitel der Büschel und ist p_1 der $T_2 T_1$ oder p_2 entsprechende Strahl, so ist o_2 aus T_2 zu ihm parallel; die Normalen zu o_1, p_1 in T_1 und die zu o_2, p_2 in

T_2 sind entsprechende Strahlenpaare a_1, b_1 und a_2, b_2 und jede Parallele zu p_1 liefert mittelst derselben wie in 1) neue Strahlenpaare und je zwei neue Punkte der Hyperbel. Man sieht sofort, daß die Halbierungslinien der Winkel (o_1, p_1) und (o_2, p_2) zwei Paare entsprechender und paralleler Strahlen geben, die also in zueinander rechtwinkligen Richtungen die unendlich fernen Punkte der Hyperbel liefern. Wenn die T_1, T_2 und p_1 der jetzigen mit denen der Konstruktion vom Schluß des vorigen Beispiels übereinstimmen, so haben der Kreis dort und die Hyperbel hier in T_1 Punkt und Tangente, überdies die Punkte T_2 und a_1, a_2 gemein. Ist insbesondere p_1 rechtwinklig zu $T_1 T_2$, so wird der Kreis von 1) in T_1 und in T_2, den Endpunkten eines Durchmessers, von der gleichseitigen Hyperbel in 2) berührt und die Konstruktion zeigt, daß dieser Kreis und diese gleichseitige Hyperbel in zentrischer involutorischer Kollineation sind für einen der Scheitel T_1, T_2 als Zentrum und o_2, bez. p_1 als Achse der Kollineation. (Man vergl. die Entwickelungen in den §§ (36) unten.)

25. Die Umkehrung der Hauptsätze des vorigen Paragraphen führt zu folgenden Erzeugungsarten für die Kegelschnitte:

Der Ort der Schnittpunkte aller entsprechenden Strahlenpaare von zwei projektivischen Strahlenbüscheln in einer Ebene ist eine durch die Scheitelpunkte derselben gehende Curve, welche mit einer Geraden ihrer Ebene nicht mehr als zwei Punkte gemein haben kann, nämlich die sich selbst entsprechenden Punkte der beiden in der Geraden von den erzeugenden Strahlenbüscheln gebildeten projektivischen Reihen. (§ 17; § 21.) Sie heißt daher eine Kurve zweiter Ordnung und ist durch fünf Punkte bestimmt, von denen nicht drei in einer geraden Linie liegen.

Sie geht durch die Scheitelpunkte T_1, T_2 bez. T, T' der

Die Enveloppe der Verbindungslinien aller entsprechenden Punktepaare von zwei projektivischen Punktreihen in einer Ebene ist eine die Träger ger dieser Reihen berührende Curve, welche mit einem Punkte ihrer Ebene nicht mehr als zwei Tangenten gemein haben kann, nämlich die sich selbst entsprechenden Strahlen der beiden an dem Punkte durch die erzeugenden Reihen gebildeten projektivischen Strahlenbüschel (§ 17; § 21). Sie heißt daher eine Kurve zweiter Klasse und ist durch fünf Tangenten bestimmt, von denen nicht drei durch einen Punkt gehen.

Sie berührt die Trägergeraden t_1, t_2 bez. t, t' der erzeu-

erzeugenden Büschel; denn wenn wir eine Tangente der Kurve als die Verbindungslinie von zwei einander unendlich nahen Punkten in ihr betrachten, so erfahren wir: Die dem Scheitelstrahl $T_1 T_2$ oder o_1, p_2 oder wie früher o, p' der Büschel entsprechenden Strahlen o_2, p_1 oder o', p berühren die Kurve in den Scheiteln T_2, T_1 oder $o'p'$, op bezüglich, weil jeder Strahl des einen Büschels die Kurve außer dem Scheitel noch in dem Punkte schneidet, wo er den entsprechenden Strahl des andern trifft.

genden Reihen; denn wenn wir einen Punkt der Kurve als den Schnittpunkt von zwei einander unendlich nahen Tangenten an sie betrachten, so erfahren wir: Die dem Schnittpunkt $t_1 t_2$ oder O_1, P_2 oder wie früher O, P' der Reihen entsprechenden Punkte O_2, P_1 oder O', P sind die Berührungspunkte der Kurve mit den Trägern t_2, t_1 oder $O'P'$, OP der Reihen, weil jeder Punkt der einen Reihe mit der Kurve außer dem Träger noch eine Tangente gemein hat, die ihn mit dem entsprechenden Punkte der andern Reihe verbindet.

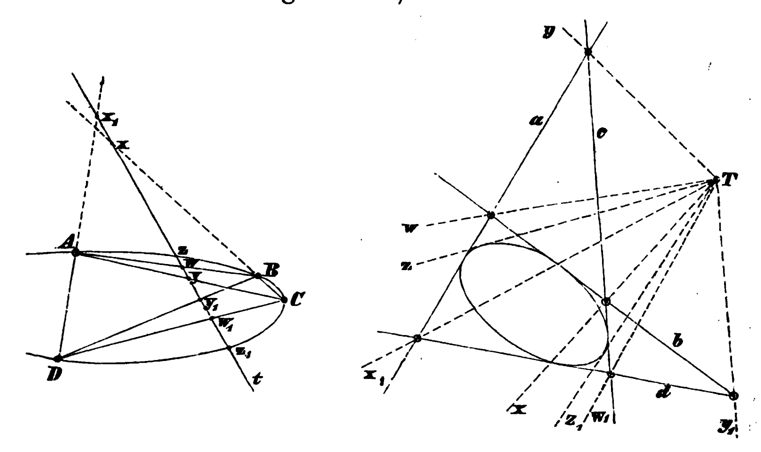
Daher ist ein Kegelschnitt durch drei Punkte und die Tangenten in zweien derselben und ebenso durch drei Tangenten und die Berührungspunkte in zweien derselben bestimmt: Projektivische Büschel bez. Reihen aus dem perspektivischen Zentrum der perspektivischen Achse und einem Paar von Elementen. (§ 17, 4; 18, 2.)

Alle Kreisprojektionen sind nach dem Vorigen Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse zugleich. Daß alle eigentlichen Kurven zweiter Ordnung auch zweiter Klasse und Kreisprojektionen sind, wird der Verlauf der Untersuchung zeigen. (§ 28, 10 und § 30.)

Wenn fünf Punkte (Tangenten) eines Kegelschnittes gegeben sind, so bestimmen irgend zwei derselben durch ihre Verbindungslinien (Schnittpunkte) mit den drei übrigen drei entsprechende Paare von Elementen der zwei erzeugenden projektivischen Büschel (Reihen). Dies ist für die Kegelschnitte als Kreisprojektionen evident; für Kurven zweiter Ordnung und solche zweiter Klasse wäre zu zeigen (vergl. § 27, 1, a und § 28), daß die Kurve von der Wahl der Träger der erzeugenden Büschel oder Reihen unter den fünf Bestimmungselementen unabhängig ist.

Wenn drei der Punkte in einer geraden Linie liegen, oder drei der Geraden durch einen Punkt gehen, so sind die projektivischen Gebilde, welche die beiden übrigen mit ihnen bestimmen, in perspektivischer Lage und der erzeugte Kegelschnitt degeneriert in zwei Gerade im einen Falle — gemeinsamer oder Scheitelstrahl und Perspektivachse — und in zwei Punkte im andern Falle — Schnittpunkt der Reihen und Perspektivzentrum. Analog, wenn die erzeugenden Reihen oder Büschel singulär sind im Sinne von § 22.

Mit vier festen Punkten oder Geraden bestimmt jeder von ihnen unabhängige fünfte Punkt und jede solche fünfte Gerade ihrer Ebene einen Kegelschnitt; man nennt die Gesamtheit



dieser Kegelschnitte im ersten Falle ein Kegelschnittbüschel, speziell mit vier reellen Grundpunkten, und im zweiten eine Kegelschnittschaar, speziell mit vier reellen gemeinsamen oder Grundtangenten. Das Kegelschnittbüschel enthält drei Kegelschnitte, welche in Paare von Geraden und die Kegelschnittschaar drei, die in Paare von Punkten degenerieren, nämlich die Gegenseitenpaare des Vierecks der gemeinsamen Punkte, bez. die Gegeneckenpaare des Vierseits der gemeinsamen Tangenten. Die wichtigen Beziehungen dieser Gesamtheiten zur Involution der Reihen und der Büschel geben wir unter den Beispielen; die Hervorhebung der degenerierten Kegelschnitte des Büschels und der Schaar führt wieder zur Konstruktion der involutorischen Reihen und Büschel mit dem Lineal allein in § 20, 14 f. zurück.

B. 1) Man konstruiere einen Kegelschnitt durch vier Punkte A, B, C, D und den Wert des Doppelverhältnisses für das über denselben stehende erzeugende Strahlenbüschel bei gegebener Ordnung seiner Elemente. Man bemerkt, daß $(ABCD) = (D.ABCD)$ ist und konstruiert den in D berührenden dem Strahl AD entsprechenden Strahl in den projektivischen Büscheln $(A.BCD\ldots) - (D.BCD\ldots)$, welche damit bestimmt sind. Ebenso bestimmt man einen Kegelschnitt zu vier Tangenten und dem Wert ihres Doppelverhältnisses bei gegebener Ordnung der Elemente (§ 16, 7); bei Unbestimmtheit derselben liefert derselbe Wert mehrere Kegelschnitte nach § 16, 9. Insbesondere konstruiere man die harmonischen Kegelschnitte zu vier Punkten bez. vier Tangenten.

Man sieht, daß ein Kegelschnittbüschel bez. eine Kegelschnittschar einfach unendlich viele Kegelschnitte enthält. Die degenerierten Kegelschnitte derselben entsprechen den Ausnahmewerten des Doppelverhältnisses $0, 1, \infty$. (Art. 16, 10.)

2) Alle durch vier feste Punkte A, B, C, D gehenden Kegelschnitte werden von einer beliebigen Geraden t ihrer Ebene in Punktepaaren Z, Z_1 derselben Involution geschnitten, zu welcher auch die Schnittpunkte W, W_1; X, X_1; Y, Y_1 derselben mit den Paaren der Gegenseiten AB, CD; BC, AD; CA, BD gehören (Figur links auf S. 143). Denn es ist

$$(A.CDZZ_1) = (B.CDZZ_1);$$

also in t

$$(YX_1ZZ_1) = (XY_1ZZ_1) = \frac{XZ}{Y_1Z} : \frac{XZ_1}{Y_1Z_1} = (Y_1XZ_1Z).$$

Alle vier feste Gerade a, b, c, d berührenden Kegelschnitte werden aus einem beliebigen Punkte T ihrer Ebene von Strahlenpaaren z, z_1 derselben Involution berührt, zu welcher auch die Verbindungslinien w, w_1; x, x_1; y, y_1 desselben mit den Paaren der Gegenecken ab, cd; bc, ad; ca, bd gehören. (Figur rechts auf S. 143). Denn es ist

$$(a.cdzz_1) = (b.cdzz_1)$$

also an T

$$(yx_1zz_1) = (xy_1zz_1) = \frac{\sin(x,z)}{\sin(y_1,z)} : \frac{\sin(x,z_1)}{\sin(y_1,z_1)} = (y_1xz_1z).$$

Vergl. § 20.

3) $(YX_1ZZ_1) = (Y_1XZ_1Z)$ oder $\dfrac{YZ}{X_1Z} \cdot \dfrac{X_1Z_1}{YZ_1} = \dfrac{Y_1Z_1}{XZ_1} \cdot \dfrac{XZ}{Y_1Z}$

ist die Involution von sechs Elementen. Sind X und X_1 im Doppelpunkt G vereinigt, so folgt

$$(YGZZ_1) = (Y_1GZ_1Z) \quad \text{oder} \quad \frac{YZ}{GZ} \cdot \frac{GZ_1}{YZ_1} = \frac{Y_1Z_1}{GZ_1} \cdot \frac{GZ}{Y_1Z}$$

oder

$$\frac{YZ}{YZ_1} \cdot \frac{Y_1Z}{Y_1Z_1} = \left(\frac{GZ}{GZ_1}\right)^2,$$

die Involution von fünf Elementen. Sind endlich X, X_1 in G und Y, Y_1 in H vereinigt, so ist

$$(GHZZ_1) = (GHZ_1Z) \quad \text{oder} \quad \left(\frac{GZ}{HZ}\right)^2 = \left(\frac{GZ_1}{HZ_1}\right)^2,$$

die Involution von vier Elementen, und weil, so lange Z und Z_1 verschieden sind, beide Brüche nur entgegengesetzt gleich sein können, die harmonische Relation $(GHZZ_1) = -1$.

4) Unter den Kegelschnitten des Büschels sind zwei, welche eine Gerade t seiner Ebene berühren — in den Doppelpunkten der auf ihr erzeugten Involution. Man konstruiert sie durch die Bestimmung dieser Doppelpunkte je aus fünf Punkten.

Unter den Kegelschnitten der Schaar sind zwei, welche einen Punkt T ihrer Ebene enthalten — mit den Doppelstrahlen der an ihm erzeugten Involution als Tangenten. Man konstruiert sie durch Bestimmung dieser Doppelstrahlen je aus fünf Tangenten.

5) Die Gegenseitenpaare eines vollständigen Vierecks werden von jeder Geraden seiner Ebene in drei Paaren einer Involution geschnitten. (§ 20, 16.)

Die Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits werden mit jedem Punkte seiner Ebene durch drei Paare einer Involution verbunden. (§ 20, 16.)

Denn die vierpunktige Reihe in einer Seite ist perspektivisch aus den zwei ihr nicht angehörigen Ecken mit der Reihe in der Transversale, und zwar z. B. für E als Schnitt von AB mit CD die Reihe $BAWE$ aus C und D mit $XYWW_1$ und $Y_1X_1WW_1$, d. h. man hat $(XYWW_1) = (X_1Y_1W_1W)$. Ebenso dualistisch für das Vierseit. (Figuren S. 143.)

Damit wird die Linealkonstruktion der Involution nochmals begründet; man formuliert sie bequem durch den Doppelsatz:

Wenn eine Gerade die Seiten AB, BC, CA eines Dreiecks ABC in Punkten W, X, Y schneidet, und Punkte W_1, X_1, Y_1 in ihr so bestimmt werden, daß sie mit jenen drei Paare einer Involution bilden, so gehen die Geraden CW_1, AX_1, BY_1 durch denselben Punkt D.

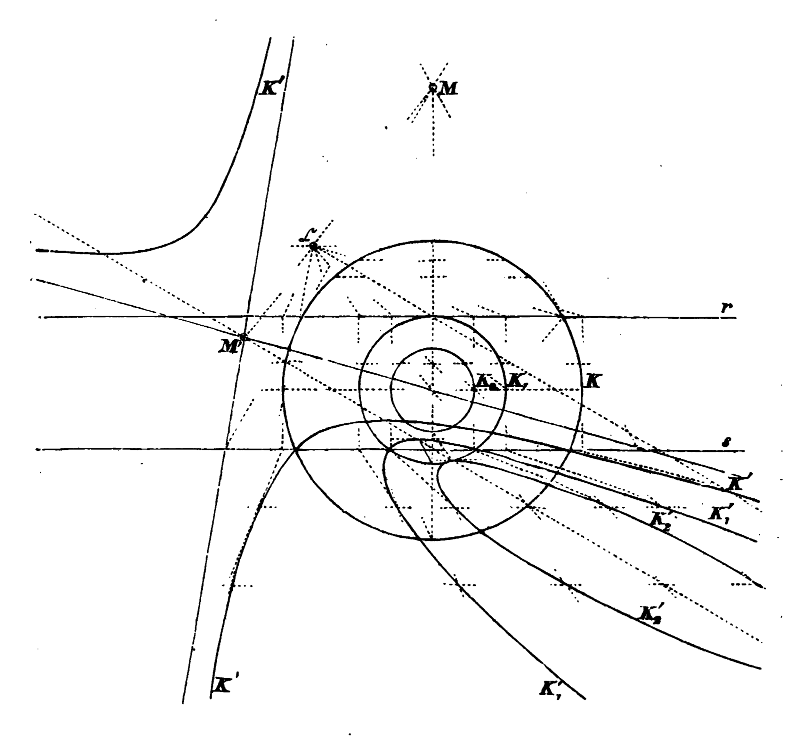
Wenn ein Punkt mit den Ecken ab, bc, ca eines Dreiseits abc durch Strahlen w, x, y verbunden wird und Strahlen w_1, x_1, y_1 aus ihm so bestimmt werden, daß sie mit jenen drei Paare einer Involution bilden, so liegen die Punkte cw_1, ax_1, by_1 in derselben Geraden d.

6) Mit Hilfe der vorigen Konstruktion kann man zu fünf Punkten $ABCDZ$ eines Kegelschnittes auf jeder durch einen derselben Z gehenden Geraden den sechsten Punkt Z_1 konstruieren, und ebenso zu fünf Tangenten $abcdz$ durch jeden auf einer derselben z liegenden Punkt die sechste Tangente z_1 des Kegelschnittes.

7) Als Sätze über ein Viereck und einen umgeschriebenen Kegelschnitt bez. ein Vierseit und einen eingeschriebenen Kegelschnitt betrachtet, führen die Sätze 2) zu Spezialsätzen für die beiden Voraussetzungen, daß zwei Ecken bez. Seiten unendlich nahe zusammenrücken (wo ihre Verbindungsseite zur Tangente, ihre Schnittecke zum Berührungspunkt wird), und bez. daß dies zweimal geschieht. Im letzten Fall erhält man für einen Kegelschnitt, zwei seiner Tangenten a, b und ihre Berührungspunkte A, B den

Satz: Die Schnittpunkte des Kegelschnitts und der Tangenten mit einer Geraden sind Paare einer Involution, die in der Berührungssehne AB einen Doppelpunkt hat; die Tangenten des Kegelschnittes aus einem Punkte und die Strahlen nach den Berührungspunkten von zwei Tangenten a, b sind Paare einer Involution, die in der Geraden nach dem Tangentenschnitt ab einen Doppelstrahl hat.

26. Die Zentralprojektion eines Kreises K oder seine zentrisch kollineare Figur K' kann (vergl. § 11, 7) durch eine geringe Zahl von Tangenten mit ihren Berührungspunkten



praktisch hinreichend markiert und darnach gezeichnet werden. Zieht man im Kreise zwei zueinander rechtwinklige Durchmesser mit den Enden A und B, C und D, so sind die zugehörigen Tangenten a und b, c und d resp. parallel und bilden ein umgeschriebenes Quadrat. Bekanntlich nennt man die Berührungssehne der von einem Punkt ausgehenden Tangenten seine Polare, sodaß den Punkten a, c; b, c; b, d; d, a; a, b; c, d die Geraden AC, BC; BD, DA; AB, CD als Polaren entsprechen, die letzten beiden als Durchmesser die Polaren von zwei un-

endlich fernen Punkten, den Richtungen des jeweiligen andern Durchmessers. Weil auch die Verbindungslinie der Pole von zwei Geraden die Polare ihres Schnittpunktes ist, so ist auch die Gerade von a, c nach b, d die Polare des Schnittes von AC und BD oder der Richtung von b, c nach a, d, und die unendlich ferne Gerade q die Polare des Mittelpunktes M. Gewöhnlich genügt es praktisch, die Zentralprojektion eines einzigen solchen Systems mit Einschluß der Schnittpunkte (ac, bd) und $bc, da)$ mit dem Kreis und ihrer paarweise parallelen Tangenten anzugeben.

Da jeder Pol von seiner Polare durch den Kreis harmonisch getrennt wird — man sehe für die allgemeine Begründung dieser Sätze, die hier aus der Elementargeometrie zitiert werden, § 30 f. — und harmonische Gruppen durch Zentralprojektion nur wieder harmonische Gruppen liefern, so bilden die Punkte a', c'; b', c'; etc. mit C', etc. und dem Fluchtpunkte von c', etc. harmonische Gruppen; ebenso die Punkte a', c' und M' mit dem zugehörigen Fluchtpunkt und dem Punkte $A'C'$ oder $(a'c', b'd')$, etc. Und die Vierecke $A'C'B'D'$; $a'c'$, $c'b', b'd', d'a'$; $b'd'$; $A'M'C'(a'c')$ etc. haben die Schnittpunkte ihrer parallelen Seitenpaare in der Fluchtlinie q' und in paarweise zueinander rechtwinkligen Richtungen von $\mathfrak{C}$ aus.

Die Projektionen des Kreises sind Kurven von sehr verschiedener Gestalt, je nach der Lage des Kreises zur Gegenachse seiner Ebene (vergl. § 14; 2. 3). Schneidet der Kreis K diese Gegenachse — r, wenn wir ihn als Original ansehen, — so hat sein Bild zwei Punkte, die entsprechenden der Schnittpunkte, in unendlicher Ferne und zwei zugehörige Tangenten, die ihn erst in unendlicher Ferne berühren. Man nennt diese Tangenten die Asymptoten und hat jene Punkte als die Asymptotenrichtungen zu bezeichnen. Das Bild zerfällt in zwei Teile oder Zweige, die erst in diesen unendlich fernen Punkten sich zusammenschließen, und wird Hyperbel genannt. In Figur S. 146 entspricht dem Kreise K die Hyperbel K' und ihre Asymptoten sind die Bilder derjenigen Tangenten von K', deren Berührungspunkte in der Gegenachse r liegen.

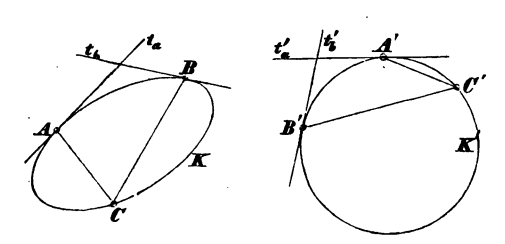
Trifft der Kreis die Gegenachse r seines Systems nicht, so hat sein Bild keine unendlich fernen Punkte, sondern ist wie er eine im Endlichen geschlossene Kurve, eine Ellipse. So K_2', das Bild von K_2 in Figur S. 146.

Berührt endlich der Kreis, wie K_1 in Figur auf S. 146, die Gegenachse r, so hat sein Bild K_1' zwei zusammenfallende Punkte in unendlicher Ferne; wir sagen, die unendlich ferne Gerade seiner Ebene, die entsprechende von r, berührt dasselbe; es besteht aus einem Zweig, der sich erst im Unendlichen schließt, und heißt eine Parabel.

Die kollinear verwandten Kurven des Kreises oder seine Zentralprojektionen (die Kegelschnitte) sind also von dreierlei Art: Hyperbeln, Ellipsen, Parabeln; speziell ergibt sich, daß die Parallelprojektionen des Kreises — oder die ihm affinen Kurven (vergl. § 22 a) — Ellipsen sein müssen, und bekannt ist, daß die zu ihm ähnlichen Kurven (§ 22 c) wieder Kreise sind.

Und sofort allgemein: Die Kollinearverwandten oder Zentralprojektionen eines Kegelschnittes sind Kegelschnitte und zwar Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln, je nachdem er die Gegenachse seines Systems nicht trifft, berührt oder schneidet. Denn zwei für dasselbe Zentrum zu einer dritten Kurve zentrisch kollineare Kurven sind selbst zentrisch kollinear. (§ 23, 6.) Die affinen Kurven oder die Parallelprojektionen eines Kegelschnittes sind Kegelschnitte derselben Art.

Denken wir zwei beliebige Kegelschnitte K, K' (nachstehende Figur) und drei beliebige Punkte des einen A, B, C, als entsprechend drei beliebigen Punkten A', B', C' des andern, überdies die Tangenten t_a, t_a' in A und A' an K, K' und ebenso die t_b, t_b' in B, B' an K, K' als entsprechend, so sind hierdurch einerseits beide Kegelschnitte K, K' aus den erzeugenden projektivischen Büscheln A, B und A', B' nach § 25, andererseits die ebenen Systeme derselben nach § 23 völlig bestimmt, und jedem vierten Punkt D des Kegelschnitts K entspricht ein vierter Punkt D' des Kegelschnitts K'. Zwei Kegelschnitte sind also auf unzählig viele Arten projektivisch oder kollinear verwandt.



Sind AA', BB' ein Paar der gemeinsamen Tangenten beider

Kegelschnitte K, K' (nachstehende Figur) mit den Berührungspunkten A, A' und B, B' bez., und liegen ihre Punkte C, C' mit dem Durchschnittspunkt 𝕮 derselben in einer Geraden, so sind die Büschel

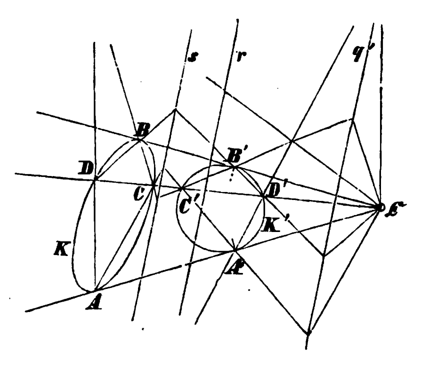
$$(A \,.\, A'BC \ldots), \quad (A' \,.\, AB'C' \ldots)$$

und ebenso

$$(B \,.\, B'CA \ldots), \quad (B' \,.\, BC'A' \ldots)$$

nicht nur projektivisch, sondern auch perspektivisch; ihre Perspektivachse ist die Kollineationsachse s und der Punkt 𝕮 das Kollineationszentrum zweier ebenen durch die Data. bestimmten kollinearen Systeme in zentrischer Lage, in denen nach vorigem die Kegelschnitte K und K' einander entsprechen.

Sind dual a, a'; b, b' die Tangenten von zwei Kegelschnitten K, K' in zweien ihrer gemeinsamen Punkte — deren sie offenbar, wie auch gemeinsame Tangenten, nur vier haben können, weil fünf Punkte ebenso wie fünf Tangenten einen Kegelschnitt bestimmen (vergl. § 25) — und gehen ihre Tangenten c, c' mit der Verbindungslinie s jener Punkte durch einen Punkt, so sind die Reihen $(a \,.\, a'bc \ldots)$ und $(a' \,.\, ab'c' \ldots)$ perspektivisch; sie haben das Perspektivzentrum in 𝕮, dem Kollineationszentrum zur Achse s für zwei ebene Systeme, in denen die betrachteten Kegelschnitte einander entsprechen.



Man bemerke nun, daß auf einem Strahle durch 𝕮 im ersten Falle zwei Punktepaare C, C' und D, D' der Kegelschnitte liegen und daß man nicht bloß C und C', sondern auch C und D' als entsprechend festsetzen kann, dadurch aber zu demselben Zentrum 𝕮 eine andere von der vorigen s verschiedene Kollineationsachse s^* erhält, und daß das dual Analoge in dem Falle der projektivischen Reihen geschieht, indem zu einer Kollineationsachse zwei verschiedene Kollineationszentra 𝕮 und 𝕮* erhalten werden. So gelangt man zu der Einsicht, daß **zwei beliebige Kegelschnitte derselben Ebene im allgemeinen auf zwölf verschiedene Arten zentrisch kollinear**

sind, nämlich für jede der sechs Verbindungslinien ihrer vier gemeinsamen Punkte als Achse mit je zwei verschiedenen der sechs Schnittpunkte der vier gemeinsamen Tangenten als Zentrum der Kollineation.

Es ist augenscheinlich, daß in den verschiedenen Fällen der Lage von zwei Kegelschnitten weder die vier Schnittpunkte noch die vier gemeinsamen Tangenten immer reell sind, und daß sich daher die ausgesprochene Regel modifiziert, insofern nur von reellen zentrischen Kollineationen die Rede sein soll. Daß die zentrisch kollineare Lage mindestens auf vier verschiedene Arten stattfindet, führen wir an und erläutern es für den Fall von zwei Kreisen unter den Beispielen. Die vollständige Erledigung der durch zwei Kegelschnitte der Ebene nahegelegten Fragen gehört der „Geometrie der Lage" an. (Teil III dieses Werkes.)

B. 1) Man übertrage die Betrachtungen am Anfang dieses Paragraphen auf das Bild des Kreises (Figur auf S. 146) und zeige ihre Gültigkeit, sowie die Modifikation der Erscheinungsformen ihrer Resultate in den Fällen des hyperbolischen und parabolischen Bildes; man erweitere sie sodann auf die zentralkollinearen Figuren zu gegebenen Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln und leite namentlich Regeln für die Bestimmung ihrer Mittelpunkte her. (Vergl. § 33.)

2) In Figur auf S. 138, § 24, sind die Gegenachsen q' und r eingetragen für den Fall des elliptischen Bildes, in Figur auf S. 139, § 24 die entsprechenden für das hyperbolische Bild; man erläutere daran die korrespondierende Umlaufsbewegung eines Punktes der Kurve in Original und Bild.

3) Man tue dasselbe für das parabolische Bild des Kreises und für das parabolische Bild der Hyperbel.

4) Wenn in zwei Hyperbeln die Asymptoten a_1, a_2 der einen denen der andern a_1', a_2' und ein Paar ihrer Punkte P, P' bez. ihrer Tangenten t, t' (als wodurch sie bestimmt sind) einander entsprechen, so sind sie zueinander affin; denn die unendlich fernen Geraden entsprechen einander (§ 22, a). Die Mittelpunkte entsprechen einander auch.

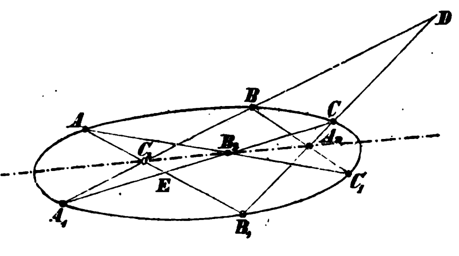
5) Zwei Kreise in derselben Ebene K, K' haben zwei Ähnlichkeitspunkte (vergl. § (7) für ihre Bedeutung im Sinne der Zyklographie) A und J oder $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$. Wenn man einen Radius des einen mit dem Endpunkte P und den parallelen Durchmesser des andern mit den Endpunkten P' und $P^{*\prime}$ zieht, so gehen die Geraden PP' und $PP^{*\prime}$ bez. durch $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$; die zugehörigen Tangenten in P' und $P^{*\prime}$ an K' und in P an K sind parallel, oder die unendlich ferne Gerade ist die Kollineationsachse für die beiden

Kollineationszentra 𝕮 und 𝕮* in Übereinstimmung mit § 22, c). Da aber die Gerade 𝕮PP' die Kreise noch in P_1, P_1' bez. und die Gerade 𝕮*$PP^{*\prime}$ sie noch in P_1^*, $P_1^{*\prime}$ schneidet, so sind die Kreise für dieselben Zentra 𝕮, 𝕮* noch mit einer im Endlichen gelegenen Achse s in zentrischer Kollineation, von welcher man Punkte S, etc. erhält, indem man z. B. die Tangenten von K und K' in P und P_1', P_1 und P', in P und $P_1^{*\prime}$, P_1^* und $P^{*\prime}$ zum Schnitt bringt. Sie steht zur Zentrale rechtwinklig und ist, wenn die Kreise sich reell schneiden, ihre gemeinsame Sehne; wenn sie sich berühren, ihre zugehörige gemeinsame Tangente; wenn sie sich nicht treffen, der Ort der Schnittpunkte gleich langer Tangentenpaare (denn $\triangle SPP_1'$ ist gleichwinklig bei P und P_1', also $SP = SP_1'$). Dadurch ist sie als die Radikalachse oder Potenzlinie derselben definiert.

27. Haben wir einen durch zwei projektivische Strahlenbüschel von den Scheiteln A und B bestimmten Kegelschnitt und sind C, A_1, B_1, C_1 vier weitere Punkte desselben (nachstehende Figur), so ist nach § 24

$$(A \,.\, A_1 B_1 C_1 C) = (B \,.\, A_1 B_1 C_1 C).$$

Schneiden wir diese Büschel bez. mit den Geraden $A_1 C$ und $B_1 C$ und nennen wir die Punkte $A_1 B$, $B_1 C$ und AB_1, $A_1 C$ bez. D und E, dazu die Punkte AB_1, $A_1 B$; BC_1, $B_1 C$; CA_1, $C_1 A$ bez. C_2, A_2, B_2, so ist deshalb



$(A_1 E B_2 C) = (D B_1 A_2 C)$, d. h. diese Reihen sind perspektivisch für das Zentrum $A_1 D, B_1 E$ oder C_2; d. h. C_2, B_2, A_2 liegen in einer Geraden.

Dies ist die Konstruktion projektivischer Büschel in besonderer Form; C_2 ist das zu den beiden Büscheln A und B perspektivische Büschel nach den von C ausgehenden Transversalen CA_1 und CB_1.

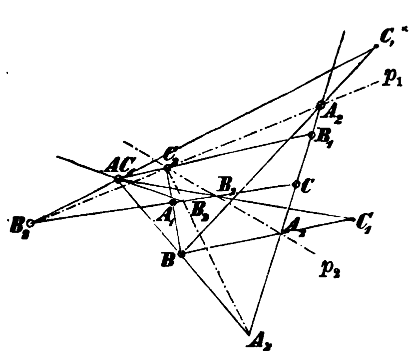
Die betrachteten sechs Punkte bilden in der Ordnung $AB_1 CA_1 BC_1$ ein der Kurve eingeschriebenes Sechseck, für welches die Punkte A_2, B_2, C_2 als die Schnittpunkte der drei Paare gegenüberliegender Seiten erscheinen; man hat also den Satz: Sechs Punkte eines Kegelschnittes bilden in jeder Aufeinanderfolge ein Sechseck, für welches die drei Schnittpunkte seiner Gegenseitenpaare in einer ge-

raden Linie liegen. (Pascals Satz und Sechseck; Pascalsche Linie $A_2B_2C_2$.)

B. 1) Man konstruiere den durch fünf Punkte A, B_1, C, A_1, B bestimmten Kegelschnitt, d. h. man bestimme beliebig viele Lagen des sechsten Punktes C_1 eines Pascalschen Sechsecks. (Nachstehende Figur.)

a) Die Geraden AB_1, A_1B schneiden sich im Punkte C_2 der Pascalschen Linie p; jeder Lage p_1 der um C_2 drehenden Geraden entspricht ein sechster Punkt C_1 des Kegelschnittes. Dieselbe schneidet B_1C in A_2, CA_1 in B_2 und BA_2, AB_2 schneiden sich in C_1.

Man erkennt darin deutlich die Erzeugung des Kegelschnittes durch projektivische Büschel aus A und B wieder, von der der Pascalsche Satz nur eine andere Ausdrucksform ist. Insofern in dieser Ausdrucksform der Charakter der sechs Punkte ununterscheidbar der nämliche ist, erfüllt sie die in § 25 S. 142 unten angedeutete Forderung der Strenge.



b) Der gesuchte Punkt C_1 ist im Sechseck Nachbar von A und von B; zieht man also (beistehende Figur) durch A oder B, sagen wir durch A, eine beliebige Gerade als AC_1, so liefert sie mit A_1C den Schnittpunkt B_2, welcher mit dem Schnitt von AB_1, A_1B oder C_2 die Gerade p_1 gibt; schneidet B_1C sie in A_2, so geht BA_2 durch C_1, d. h. BA_2 schneidet die gewählte Gerade aus A in C_1.

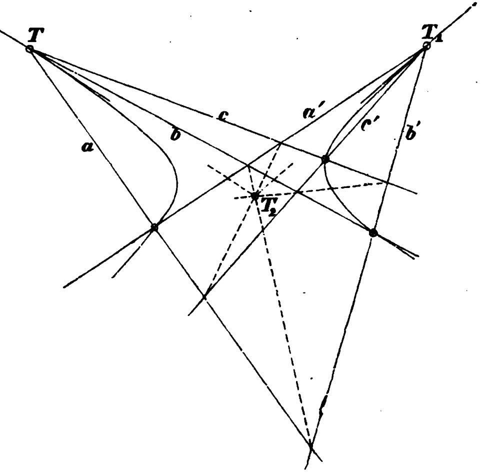
So konstruiert man linear den zweiten Schnittpunkt einer Geraden mit einem Kegelschnitt durch fünf Punkte, unter denen ihr erster Schnittpunkt mit ihm ist.

2) Man konstruiere die Tangente des durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnittes in einem dieser Punkte. (Vergl. § 25.)

Da die Tangente als die gerade Verbindungslinie von zwei unendlich nahen d. h. zusammenfallenden Punkten der Kurve zu betrachten ist, so legen wir dem bezeichneten Punkte die Buchstaben zweier Nachbarecken des Sechsecks bei, z. B. AC_1 (obenstehende Figur). Sind dann A_1, B, C, B_1 die vier übrigen gegebenen Punkte, so bestimmen B_1C, BC_1 den Punkt A_2, AB_1, A_1B den Punkt C_2, die Punkte A_2, C_2 die Gerade p und diese mit A_1C den Punkt B_2, durch welchen auch die Tangente AC_1 gehen muß. Darin liegt der Satz: Die Schnittpunkte von zwei Paaren nicht benachbarter Seiten eines der Kurve eingeschriebenen Fünfecks liegen mit dem Schnittpunkt der fünften Seite mit der Tangente in der Gegenecke in einer Geraden. Ferner folgt ebenso:

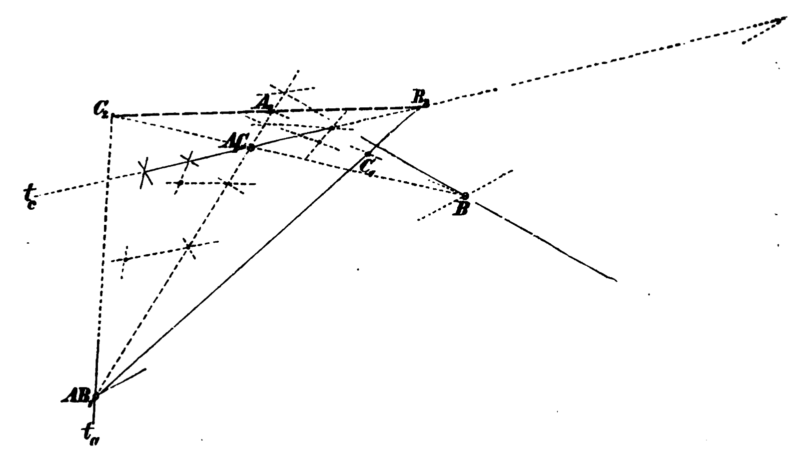
Die Schnittpunkte der Paare der Gegenseiten eines der Kurve eingeschriebenen Vierecks liegen mit den Schnittpunkten der Tangenten in den Paaren der Gegenecken in einer Geraden.

3) Man konstruiere in zweien der fünf Bestimmungspunkte eines Kegelschnittes die Tangenten desselben. (Vgl. § 25.)



Man fasse (nebenstehende Figur) diese Punkte als Scheitel T, T_1 von zwei projektivischen Strahlenbüscheln, die durch die Strahlenpaare aa', bb', cc' nach den drei andern gegebenen Punkten bestimmt sind, und konstruiere das perspektivische Zentrum T_2 für dieselben; dann sind die Geraden TT_2, T_1T_2 die gesuchten Tangenten p und o_1 für o, p_1 als TT_1. (§ 18.)

Man konstruiert auch jeden sechsten Punkt des Kegelschnittes auf einem Strahl von T_1 oder T, indem man mittelst T_2 den entsprechenden Strahl von T bez. T_1 bestimmt.



4) Man konstruiere den durch drei Punkte und die Tangenten in zweien derselben bestimmten Kegelschnitt, insbesondere seine Tangente im dritten Punkt. Sind A, B, C (vorstehende Figur) die Punkte, so betrachten wir die Tangente in A als die Gerade AB_1 — die Verbindungslinie der sich deckenden Punkte A und B_1 —,

die Tangente in C als die Gerade CA_1, und suchen C_1 auf AC_1 oder BC_1 auf nach 1^b oder 1^a. Die Konstruktion ist in vorstehender Figur für mehrere Punkte ausgeführt, wenn auch nur für einen bezeichnet.

Um die Tangente im dritten Punkt zu finden, nennen wir die Tangente in A wieder AB_1, die in C aber CA_1 und die gesuchte in B, BC_1; dann bestimmen AB_1 und A_1B den Punkt C_2, AC_1 und A_1C den Punkt B_2, die Punkte C_2 und B_2 die Gerade p, die von CB_1 in demselben Punkte A_2 geschnitten wird, durch den die gesuchte Tangente gehen muß. In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Dreieck werden die Seiten von den Tangenten der Kurve in den bez. Gegenecken in Punkten einer Geraden geschnitten. Deshalb ist z. B. die Tangente in einem Punkte der Hyperbel parallel zu der Geraden, welche die Schnittpunkte der Asymptoten mit seinen Asymptotenparallelen verbindet; und die in ihr enthaltene Strecke zwischen den Asymptoten wird in dem Punkte halbiert.

Und aus einem Punkte 1 und den Asymptoten 2 3, 4 5 (als Punkten mit Tangenten) folgt auf jeder Geraden 1 der neue Punkt 6 der Hyperbel nach dem Satze: Die auf der Geraden gemessenen Strecken von 1 und 6 zu den Asymptoten sind gleichlang.

5) Man vollziehe die Konstruktion des Kegelschnittes unter denselben Voraussetzungen durch projektivische Büschel — indem man die Punkte mit bekannten Tangenten zu Scheiteln T, T' wählt und durch ihre Tangenten das perspektivische Zentrum T'' erhält. (Vergl. § 25.)

6) Man konstruiere den durch vier Punkte und die Tangente in einem derselben bestimmten Kegelschnitt nach denselben beiden Methoden des Pascalschen Sechsecks und der projektivischen Büschel.

Sind A, B, C, D die vier Punkte und ist a die Tangente in A, so begründet man nach beiden Methoden leicht die bequeme Konstruktionsregel: Man bestimme die Gegenseitenschnittpunkte AB, CD oder E, BC, DA oder F und CA, BD oder G von $ABCD$; dann schneiden sich die Diagonalen FG, EF, GE mit den Tangenten in B, C, D auf a. (Siehe die Figur zu § 28, 4.)

Wenn man zu fünf Punkten die Tangenten in einem derselben konstruiert, so liefern die vier Tripel aus den vier übrigen Punkten mit ihm vier Vierecke, deren Diagonalen zu drei in denselben vier Punkten der ersten Tangente konvergieren müssen, weil sie dort die Punkte der vier übrigen Tangenten bestimmen. Dasselbe, für alle Tangenten wiederholt gedacht, zeigt, daß die so erhaltenen Punkte fünfmal zu vier in geraden Linien liegen; etc.

7) Man konstruiere nach denselben beiden Methoden einen Kegelschnitt a) durch vier Punkte und die eine Asymptotenrichtung und bestimme dabei insbesondere die andere Asymptotenrichtung und die Asymptoten selbst — die erste nach 1^b, die letzten nach 3);

b) durch drei Punkte und beide Asymptotenrichtungen;
c) durch drei Punkte und die eine Asymptote (Spezialfall von 6);
d) durch einen Punkt und beide Asymptoten. (Vergl. bei 4).
In jedem Falle ist die zweckmäßigste Konstruktionsform zu suchen.

8) Man konstruiere eine Parabel durch drei Punkte und die Richtung ihres unendlich fernen Punktes — d. h. aus vier Punkten und der Tangente in einem derselben als der unendlich fernen Geraden (also Spezialfall von 6) — oder durch zwei Punkte, die Tangente des einen und jene Richtung.

Die Verzeichnung der Wurfparabel bildet einen speziellen Fall hiervon; man kennt durch Anfangspunkt, Wurfrichtung und Anfangsgeschwindigkeit drei Punkte und die Tangenten in zweien von ihnen: Anfangspunkt und Wurfrichtung 23 oder T_1 mit p_1, Fallrichtung und unendlich ferne Gerade 45 oder T_2 mit o_2, sodaß die Richtung des Wurfes das perspektivische Zentrum der Büschel ist, und ein Strahlenpaar a_1, a_2 durch die vierte Ecke des Parallelogramms aus der Strecke vt (Geschwindigkeit mal Zeit) in der Wurfrichtung und $\frac{1}{2}gt^2$ in der Fallrichtung als den nach t Sekunden erreichten Punkt. Man erhält auch leicht die Wurfweite und die Wurfhöhe graphisch gleich gut auf beiden Wegen.

9) Man beweise den Satz: Das Parallelogramm, welches die von einem Punkte der Hyperbel ausgehenden Parallelen zu den Asymptoten derselben mit diesen selbst bestimmen, hat konstante Fläche. (Vergl. § 16, 6.)

Denn die Hyperbel wird aus den projektivischen Parallelenbüscheln erzeugt, die die Richtungen der Asymptoten zu Scheiteln T, T' und ihren Schnittpunkt zum perspektivischen Zentrum T'' haben, sodaß den Asymptoten die unendlich ferne Gerade als der Scheitelstrahl entspricht. Schneidet man jedes dieser Büschel mit der andern Asymptote, so hat man in der Tat das erste Gesetz des § 15.

10) Die Konstruktion der Aufgabe 6) in § 11 für zwei beliebige projizierende Gerade CQ_1', CQ_2' zeigt deutlich zwei Perspektivachsen q_{1N}' und q_{2N}' zwischen den Büscheln entsprechender Ebenenspuren um Q_1' bez. Q_2' mit dem Büschel ihrer Normalen aus C_1 — also die Konstruktion projektivischer Büschel.

Mit dem Schnitt einer der obigen Normalebenen hat man die Theorie der Kegelschnitte als Kreisprojektion vor sich.

28. Haben wir einen durch zwei projektivische Reihen in den Geraden a und b bestimmten Kegelschnitt und sind c, a_1, b_1, c_1 vier weitere Tangenten desselben, so ist (nachstehende Figur) nach § 24

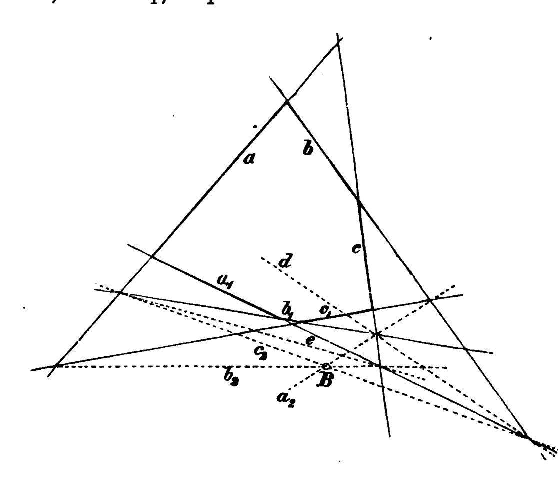
$$(a : a_1 b_1 c_1 c) = (b \,.\, a_1 b_1 c_1 c);$$

projizieren wir diese Reihen bez. aus den Punkten $a_1 c$, $b_1 c$ und nennen wir die Geraden $a_1 b$, $b_1 c$ und $a b_1$, $a_1 c$ bez.

d und e, dazu die Geraden ab_1, a_1b; bc_1, b_1c; ca_1, c_1a bez. c_2, a_2, b_2, so ist deshalb

$$(a_1eb_2c) = (db_1a_2c),$$

diese Büschel sind also perspektivisch mit der Achse a_1d, b_1e oder c_2, d. h. die beiden Strahlen b_2 und a_2 schneiden sich in einem Punkte B der Geraden c_2. Es ist die Konstruktion projektivischer Reihen in besonderer Form, c_2 ist die dritte Reihe, die zu den beiden ersten a und b perspektivisch ist, aus ca_1, cb_1 bez.



Die betrachteten sechs Geraden bilden in der Ordnung $ab_1ca_1bc_1$ ein der Kurve umgeschriebenes Sechsseit, für welches die Geraden a_2, b_2, c_2 als die Verbindungslinien der drei Paare gegenüberliegender Ecken bc_1, b_1c; ca_1, c_1a; ab_1, a_1b erscheinen; man hat also den Satz: Sechs Tangenten eines Kegelschnittes bilden in jeder Folge ein Sechsseit, für welches die drei Verbindungslinien der Gegeneckenpaare durch einen Punkt gehen. (Brianchons Satz und Sechsseit; Brianchonscher Punkt $a_2b_2c_2$ desselben.)

Unter den Anwendungen geben wir auch den Beweis der Identität der aus projektivischen Strahlbüscheln und der aus projektivischen Punktereihen erzeugten Kurven miteinander und dieser Kurven mit den Projektionen des Kreises, wobei sich natürlich die Ausnahmen von diesem Gesetze mit ergeben.

B. 1) Wenn von den projektivischen Reihen t, t', aus denen ein Kegelschnitt entsteht, t um PO in sich verschoben wird, um sie perspektivisch zu machen, so ist das entstehende Perspektivzentrum der Berührungspunkt des Kegelschnittes mit der zu t parallelen Tangente; und analog für die Verschiebung von t' um $O'P'$.

2) Man konstruiere den durch fünf Tangenten a, b_1, c, a_1, b bestimmten Kegelschnitt, d. h. man bestimme beliebig viele Lagen der sechsten Seite c_1 eines Brianchonschen Sechsseits.

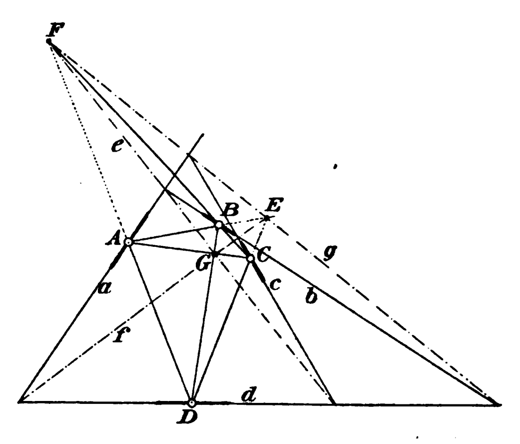
a) Die Punkte ab_1, a_1b (Figur auf S. 156) liegen in der Geraden c_2 des Brianchonschen Punktes B; jeder Lage desselben als eines in c_2 beweglichen Punktes entspricht eine sechste Tangente c_1 des Kegelschnittes; B gibt mit b_1c die Gerade a_2, mit ca_1 die Gerade b_2, und ba_2, ab_2 haben c_1 zur Verbindungslinie. Die Erzeugung des Kegelschnittes durch projektivische Reihen auf a und b ist darin deutlich erkennbar, der Satz von Brianchon ist nur ein anderer Ausdruck derselben. (Vergl. § 27; 1[a].)

b) Die gesuchte Tangente c_1 ist Nachbarin von a und b; wählen wir also in a einen beliebigen Punkt als ac_1, so liefert er mit a_1c die Verbindungslinie b_2, die mit ab_1, a_1b oder c_2 den Punkt B bestimmt; verbindet a_2 diesen mit b_1c, so liegt a_2b in c_1. So konstruiert man linear die zweite Tangente eines Kegelschnittes aus einem Punkte, der einer bekannten Tangente desselben angehört. (Vergl. § 27, 1.)

3) Man konstruiere den Berührungspunkt des durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnittes in einer derselben. (Für diese und die folgenden Aufgaben bis mit 8 vergleiche man die entsprechenden Nummern des § 27.)

Die Diagonalen, welche zwei Paare nicht benachbarter Ecken eines umschriebenen Fünfseits verbinden, schneiden sich auf der Geraden von der fünften Ecke nach dem Berührungspunkt der Gegenseite.

4) Man konstruiere für zwei der fünf einen Kegelschnitt bestimmenden Tangenten die Berührungspunkte. Die Reihen in ihnen haben die Sehne der Berührungspunkte zur perspektivischen Achse, d. h. **die Diagonalen eines umschriebenen Vierseits schneiden sich auf der Berührungssehne der Gegenseiten.**



Man konstruiert somit aus dem Berührungspunkt in einer Seite a die Berührungspunkte in den drei andern Seiten b, c, d eines umgeschriebenen Vierseits, indem man ihn mit den Diagonalpunkten fg, ef, eg desselben verbindet. Die Figur enthält dann zugleich die Konstruktion der Tangenten

eines Kegelschnittes in drei Punkten aus der Tangente in einem Punkte desselben (§ 27, 6). Wir sagen: Ein dem Kegelschnitt eingeschriebenes Viereck hat mit dem (von den Tangenten in seinen Ecken gebildeten) zugehörigen umgeschriebenen Vierseit dasselbe Diagonaldreieck. Die drei Diagonalpunkte sind die Zentra und die gegenüberliegenden Diagonalen die bez. Achsen von drei involutorischen Kollineationen, in denen der Kegelschnitt sich selbst entspricht. (Vergl. § 32.) Einen Spezialfall bildet die Bestimmung der Berührungspunkte von drei Tangenten einer Parabel, wenn ihre Achsenrichtung bekannt ist. Man ermittelt dann ebensoleicht die Scheiteltangente und den Scheitel.

5) Man konstruiere den durch drei Tangenten und die Berührungspunkte in zweien derselben bestimmten Kegelschnitt, insbesondere den Berührungspunkt der dritten Tangente.

In jedem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Dreiseit schneiden sich die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der Gegenseiten in einem Punkte.

Man sieht auch, daß die fünfzehn Diagonalpunkte der aus fünf Geraden gebildeten fünf vollständigen Vierseite zehnmal zu dreien in den Verbindungslinien der Berührungspunkte des durch jene als Tangenten bestimmten Kegelschnittes liegen müssen.

6) Man konstruiere den Kegelschnitt unter denselben Voraussetzungen, sowie aus vier Tangenten und dem Berührungspunkt in einer derselben, durch projektivische Reihen.

7) Man konstruiere eine Hyperbel durch drei Tangenten und eine Asymptote; oder durch eine Tangente und beide Asymptoten.

Zu zwei durch die Tafelnormale CC_1 der Zentralprojektion gehenden Ebenen konstruiere man die Gesamtheit derjenigen projizierenden Ebenen, welche mit denselben rechtwinklige Schnittlinien hervorbringen. Sind t_1, t_2 die Spuren der Ebenen (durch C_1), so erhält man für einen Punkt A_1 in t_1 als Fußpunkt eines Strahles den Fußpunkt A_2 des entsprechenden in t_2 als den Schnitt dieser Linie mit der Fluchtlinie der Normalebene für A_1 als Fluchtpunkt der Normalen. Die Gesamtheit der fraglichen Ebenen umhüllt also einen projizierenden Kegel, dessen Spur in der Tafel eine Hyperbel mit den Geraden t_1, t_2 als Asymptoten ist.

8) Man konstruiere eine Parabel durch vier Tangenten, oder durch zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte, oder den Berührungspunkt der einen von beiden und die Richtung der Achse.

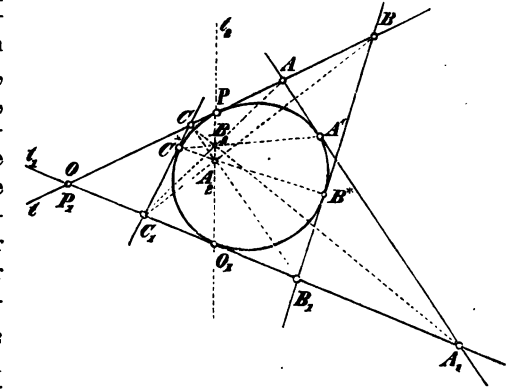
9) Man beweise die Sätze: Das Dreieck, welches eine Tangente der Hyperbel mit ihren Asymptoten bestimmt, hat konstante Fläche. (§ 16, 6.) Die Verbindungsstrahlen von zwei festen Punkten der Hyperbel mit einem veränderlichen Punkte derselben erzeugen in den Asymptoten zwei projektivisch gleiche Reihen.

Die Tangenten der Parabel bestimmen auf zwei festen unter ihnen projektivisch ähnliche Reihen.

Eine vielseitig interessante Anwendung des ersten Satzes bietet die Betrachtung *der Geraden, die ein gegebenes Dreieck hälften*; die drei Hyperbeln, welche sie umhüllen, sind paarweise in doppelter Berührung und die sechs Berührungspunkte sind die Ecken eines vollständigen Vierseits mit einer unendlich fernen Seite; etc. Man löst leicht die Aufgabe, die Geraden des Systems durch einen Punkt oder von gegebener Richtung zu bestimmen und unterscheidet nach Zahl und Art der Lösungen Regionen der Ebene.

10) Hier ergibt sich leicht auch die *Identität der Kurven zweiter Ordnung und der Kurven zweiter Klasse.* Wir zeigen, daß die aus zwei projektivischen Reihen erzeugte Kurve (zweiter Klasse) auch aus zwei projektivischen Strahlenbüscheln erzeugt wird, also zweiter Ordnung ist, und empfehlen dem Leser den entsprechenden Beweis des umgekehrten Satzes aus der nämlichen Figur als eine treffliche Übung in dem Gebrauch des Prinzips der Dualität. (Vergl. den Überblick; analog zu §§ 27, 28.)

Sind t und t_1 die Träger von zwei projektivischen Reihen und $A, B, C; A_1, B_1, C_1$ drei Paare entsprechender Punkte derselben (nebenstehende Figur), so sind t, t_1, AA_1, BB_1, CC_1 fünf Tangenten einer Kurve zweiter Klasse; die Schnittpunkte der Geraden BC_1, B_1C oder A_2 und AC_1, A_1C oder B_2 sind Punkte der perspektivischen Achse t_2 der Reihen, die in t, t_1 bez. die Berührungspunkte mit der Kurve P, O_1 oder die entsprechenden zum Schnittpunkt P_1, O von t mit t_1 bestimmt. Aus demselben Grunde oder nach dem Schlußsatze von 3) liegen die Berührungspunkte C^* und A^* der Kurve mit CC_1, AA_1 mit B_2, und die Berührungspunkte C^* und B^* mit CC_1, BB_1 mit A_2 in je einer Geraden; denn in den projektivischen Reihen auf CC_1, AA_1 sind C, A; C_1, A_1 entsprechende Paare, sodaß B_2 ein Punkt ihrer perspektivischen Achse oder der Berührungssehne ihrer Träger C^*A^* ist — ebenso für CC_1, BB_1 und A_2 die C^*B^*.



Denken wir nun CC_1 als bewegliche Tangente der Kurve und C, C', C'', C''', bez. C_1, C_1', C_1'', C_1''' als vier Lagen ihrer Punkte in den erzeugenden Reihen, und sei $(CC'C''C''') = (C_1C_1'C_1''C_1''') = d$;

verbinden wir die ersten mit A_1 oder B_1 und die letzten mit A oder B, so entstehen perspektivische Büschel, deren Achse t_2 aus ihnen die Reihen B_2, B_2', B_2'', B_2'''; A_2, A_2', A_2'', A_2''' herausschneidet, und man hat offenbar $(B_2 B_2' B_2'' B_2''') = (A_2 A_2' A_2'' A_2''') = d$. Bilden wir aber über diesen Reihen die Strahlenbüschel aus A^* und B^* bez., so schneiden sich die entsprechenden Strahlen derselben stets in dem zugehörigen Berührungspunkt C^*, $C^{*\prime}$, etc. der bewegten Tangente. Dieselbe Kurve, die zwei projektivische Reihen erzeugen, ist somit auch das Erzeugnis von zwei projektivischen Büscheln; die Verbindungslinien der Berührungspunkte A^*, B^* von zwei festen Tangenten mit den Lagen des Berührungspunktes C^* einer beweglichen Tangente bilden dieselben und das Doppelverhältnis von vier Tangenten ist dem Doppelverhältnis ihrer vier Berührungspunkte gleich. (§ 24.)

11) Für die perspektivische Lage der erzeugenden Reihen und analog für die der erzeugenden Strahlenbüschel wird der Beweis hinfällig, d. h. zwei perspektivische Reihen erzeugen eine Kurve zweiter Klasse, die nicht von der zweiten Ordnung ist — ein Punktepaar, nämlich den gemeinsamen Punkt und das Perspektivzentrum der Reihen; und zwei perspektivische Büschel erzeugen eine Kurve zweiter Ordnung, die nicht von der zweiten Klasse ist — ein Paar von Geraden, nämlich den gemeinsamen Strahl und die Perspektivachse der Büschel. Für ein Punktepaar gilt der Brianchonsche Satz, für ein Strahlenpaar der Pascalsche, für jenes hat der letzte, für dieses der erste keine Bedeutung mehr.

Man kann mit Hilfe dessen die Verbindungslinie eines Punktes A_2 mit dem unzugänglichen Schnittpunkt C_2 von zwei Geraden konstruieren, indem man diese als Gegenseiten eines Pascalschen Sechsecks in einem in zwei Gerade degenerierten Kegelschnitte und jene gesuchte Gerade als Pascalsche Linie desselben denkt. Man nimmt also die Punkte A, B_1 auf der einen und A_1, B auf der andern Geraden an, zieht $A_1 B_1$ bis zum Schnitt C_1 mit $A_2 B$, und ebenso AB bis zum Schnitt C mit $A_2 B_1$ und erhält im Schnittpunkt von AC_1 mit $A_1 C$ einen neuen Punkt B_2 der gesuchten Geraden $A_2 C_2$. Man wähle speziell A_1, B_1 als unendlich fern und bilde die Figur. Wie lautet die entsprechende Aufgabe, die der Satz von Brianchon löst?

12) Daß die Erzeugnisse von zwei projektivischen Büscheln oder Reihen Kreisprojektionen sind, ergibt sich auch leicht. Sind die Büschel T, T_1 durch a, b, p und a_1, b_1, p_1 oder ist die erzeugte Kurve durch vier Punkte T, T_1, A, B und die Tangente in T gegeben, so verzeichnen wir einen in T an p und folglich die Kurve berührenden Kreis und markieren seine Schnitte A', B', T' mit a, b, p_1; dann sind die Büschel $T_1 . TAB$ und $T_1' . TA'B'$ perspektivisch, weil beide den Scheitelstrahl ent-

sprechend gemein haben und zu dem Büschel $T \cdot pab$ projektivisch sind; ihre Perspektivachse s ist die Achse der Kollineation mit dem Zentrum T, in welcher der Kreis dem Kegelschnitt aus den Büscheln T und T_1 entspricht; man bestimmt leicht ihre Gegenachsen, aber Zentrum und Achse und das Paar T_1, T_1' bestimmen sie.

Für die Reihen A, B, P in s und A_1, B_1, P_1 in s_1 (der letzte Punkt als Schnittpunkt von s mit s_1) als erzeugende legen wir einen die erste in P berührenden Kreis und ziehen von A, B, P_1 an ihn die Tangenten. Dieselben bestimmen auf s_1', der zweiten Tangente von P_1 an den Kreis eine zu s und folglich auch zu s_1 projektivische, wegen P_1 als sich selbst entsprechend aber mit ihr perspektivische Reihe; das zugehörige Perspektivzentrum $\mathfrak{C}$ ist das Zentrum der Kollineation mit der Achse s, in welchem der Kreis der Enveloppe der Verbindungslinien entsprechender Paare der projektivischen Reihen entspricht, indem sie durch s_1, s_1' als ein Paar bestimmt ist.

In diesen Kollineationen erscheint die gegebene Kurve zweiter Ordnung oder Klasse als dem Kreise entsprechend, d. h. als Kegelschnitt. Man konstruiere die Figuren und vergleiche sie mit den Figuren auf S. 138 und S. 139. Man sieht, wenn Kreis und Kegelschnitt in einem Punkte einander berühren, so liegen sie, wenn nicht in einer Ebene, in demselben projizierenden Kegel und wenn in einer Ebene, zentrisch kollinear für die gemeinsame Tangente als Achse oder den Berührungspunkt als Zentrum. (Vergl. § 35.)

29. Die vorhergehenden Untersuchungen zeigen, daß jeder Kegelschnitt durch projektivische Konstruktionen mit dem Lineal bestimmt ist, sobald man fünf Punkte oder Tangenten desselben kennt oder was dem äquivalent ist. (Vergl. § 27 und 28, 4—8.)

Sind also fünf Punkte oder Tangenten des zu betrachtenden Kegelschnittes in Projektion gefunden, so erhält man aus ihnen durch dieselben Konstruktionen sein vollständiges Bild, und aus ebenso vielen Punkten oder Tangenten in wahrer gegenseitiger Lage ebenso die wahre Gestalt des Ganzen.

Der Wert der entwickelten und benutzten Eigenschaften wird aber dadurch erhöht, daß sie auch erlauben,

a) die Schnittpunkte einer Geraden mit dem Kegelschnitt, und

b) die Tangenten aus einem Punkte an denselben

aus seinen Bestimmungsstücken allein durch projektivische Konstruktionen zu finden, ohne die Kurve selbst verzeichnen zu müssen.

Wir denken fünf Punkte eines Kegelschnittes gegeben und fordern, die Schnittpunkte desselben mit einer gegebenen Geraden t zu bestimmen. Die ihn erzeugenden projektivischen Strahlenbüschel, welche aus zweien T, T' (Fig. S. 165) jener fünf Punkte durch Strahlen nach den drei übrigen 1, 2, 3 bestimmt sind, schneiden die Geraden t in zwei projektivischen Reihen, von denen damit drei Paare entsprechender Punkte A, A'; B, B'; C, C' erhältlich sind; es handelt sich darum, die sich selbst entsprechenden oder Doppelpunkte dieser Reihen zu konstruieren.

Wir denken fünf Tangenten eines Kegelschnittes gegeben und fordern, die Tangenten desselben aus einem gegebenen Punkte T zu bestimmen. Die ihn erzeugenden projektivischen Punktreihen, welche auf zweien t, t' (Fig. S. 163) jener fünf Tangenten durch ihre Schnittpunkte mit den drei übrigen a, b, c bestimmt sind, liefern durch Verbindung mit dem Punkte T zwei projektivische Büschel, von denen drei Paare entsprechender Strahlen a, a'; b, b'; c, c' bestimmt sind; es handelt sich darum, die sich selbst entsprechenden oder Doppelstrahlen dieser Büschel zu konstruieren.

Das zur Lösung dieser Aufgaben führende Prinzip ist das der Übertragung auf einen Kegelschnitt. Wir wissen aus § 24, daß vier Punkte A, B, C, X einer Geraden t durch die von ihnen ausgehenden zweiten Tangenten $\alpha, \beta, \gamma, \xi$ an einen t berührenden Kegelschnitt ihr Doppelverhältnis auf diesen übertragen; und daß ebenso das Doppelverhältnis von vier Strahlen eines Büschels aus dem Punkte T mit dem ihrer Schnittpunkte mit einem durch T gehenden Kegelschnitt übereinstimmt — ganz unabhängig von der Art des Kegelschnitts. Somit entstehen aus zwei vereinigten projektivischen Reihen auf einem ihren Träger berührenden Kegelschnitt immer zwei projektivische Tangentensysteme, und aus zwei vereinigten projektivischen Büscheln auf einem Kegelschnitt durch seinen Scheitel zwei projektivische Punktreihen in diesem.

Wir bemerken auch sofort, daß die besondere Lage solcher vereinigter Reihen und Büschel, die man Involution nennt (§§ 20 f.), daran nichts ändern kann, daß also im folgenden zugleich eine Behandlung der Involution mit enthalten ist. (Vergl. jedoch § 30.) Insofern diese Übertragung auf den

Kegelschnitt zur Lösung der vorliegenden (und wie z. B. in § 21 anderer) Probleme dient, nennt man ihn einen **Hilfskegelschnitt**, und zur Erhöhung der Genauigkeit und Kürze der Konstruktion wählt man ihn als Kreis und spricht zumeist vom **Hilfskreis**. Also:

Berührt ein Kreis K die Gerade t (Fig. S. 165), so geht von jedem Punkte A derselben eine Tangente α an den Kreis und also von A, A'; B, B'; C, C' die Tangenten α, α'; β, β'; γ, γ'. Nun folgt aus der Relation

$$(ABC\ldots) = (A'B'C'\ldots)$$

nach den Grundeigenschaften der Kegelschnitte

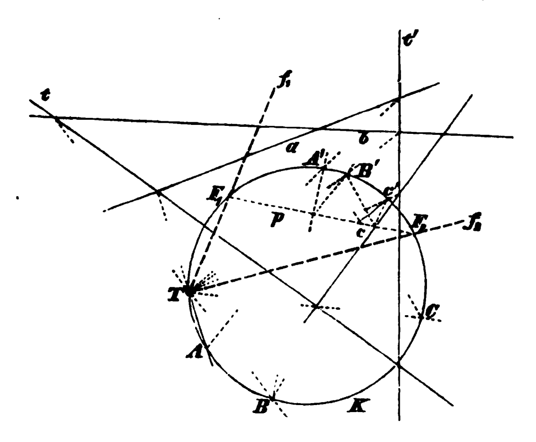
$$(\alpha\beta\gamma\ldots) = (\alpha'\beta'\gamma'\ldots),$$

d. i. jene sechs Tangenten bestimmen zwei projektivische Systeme von Tangenten (S. 139) des Kreises. Dann ist auch

$$(\alpha'.\alpha\beta\gamma\ldots) = (\alpha.\alpha'\beta'\gamma'\ldots),$$

und diese Reihen sind perspektivisch und haben somit in dem Punkte $\alpha'\beta$, $\alpha\beta'$; $\alpha'\gamma$, $\alpha\gamma'$ ihr Perspektivzentrum. Ebenso

Geht ein Kreis K durch den Punkt T (folgende Fig.), so liegt in jedem Strahle a desselben ein Punkt A des Kreises und also in a, a'; b, b'; c, c' die Punkte



A, A'; B, B'; C, C'. Nun folgt aus der Relation

$$(abc\ldots) = (a'b'c'\ldots)$$

nach den Grundeigenschaften der Kegelschnitte

$$(ABC\ldots) = (A'B'C'\ldots),$$

d. h. jene sechs Punkte bestimmen zwei projektivische Systeme von Punkten (S. 139) des Kreises. Dann ist auch

$$(A'.ABC\ldots) = (A.A'B'C'\ldots),$$

und diese Büschel sind perspektivisch und haben somit in der Geraden $A'B$, AB'; $A'C$, AC' ihre Perspektivachse. Eben-

entspricht den Reihen in β, β' das Zentrum $\beta\alpha'$, $\beta'\alpha$; $\beta\gamma'$, $\beta'\gamma$ und den Reihen in γ, γ' das Zentrum $\gamma\beta'$, $\gamma'\beta$; $\gamma\alpha'$, $\gamma'\alpha$. Weil aber $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$ ein Brianchonsches Sechsseit ist, so fallen diese drei Zentra in einen Punkt B zusammen.

Mit Hilfe des Punktes B konstruiert man zum Punkte D der Reihe den entsprechenden Punkt D' derselben; denn jener gibt die Tangente δ des Kreises und da die Gerade $\alpha'\delta$, $\alpha\delta'$ durch B gehen muß, so erfährt man $\alpha\delta'$, somit δ' und D'.

Die Tangenten von B an den Kreis K (Fig. S. 165) sind zwei Strahlen φ_1, φ_2, die sich in den projektivischen Tangentensystemen selbst entsprechen, und ihre Schnittpunkte mit t sind die Doppelpunkte F_1, F_2 der projektivischen Reihen $A, B, C \ldots$, $A', B', C', \ldots$, d. h. die Schnittpunkte der Geraden t mit dem Kegelschnitt.

so entspricht den Büscheln aus B, B' die Achse BA', $B'A$; BC', $B'C$ und den Büscheln aus C, C' die Achse CB', $C'B$; CA', $C'A$. Weil $AB'CA'BC'$ ein Pascalsches Sechseck ist, so fallen die drei Achsen in eine Gerade p zusammen.

Mit Hilfe der Geraden p konstruiert man zum Strahle d des Büschels den entsprechenden Strahl d' desselben; denn jener gibt den Punkt D des Kreises und da der Punkt $A'D$, AD' in p liegen muß, so erfährt man AD' und somit D' und d'.

Die Punkte in p auf dem Kreise K (Fig. S. 163) sind zwei Punkte F_1, F_2, die sich in seinen projektivischen Punktesystemen selbst entsprechen, und ihre Verbindungslinien mit T sind die Doppelstrahlen f_1, f_2 der projektivischen Büschel $a, b, c \ldots$, $a', b', c' \ldots$, d. h. die Tangenten vom Punkte T an den Kegelschnitt.

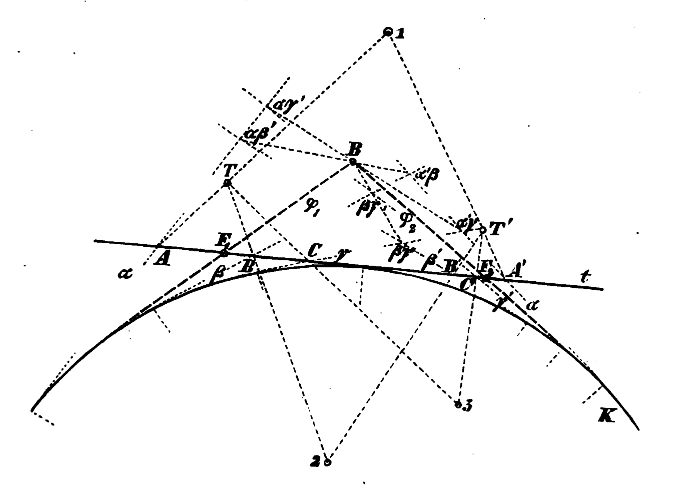
Offenbar würde jeder andere vollständig verzeichnete Kegelschnitt dieselbe Verwendung erlauben, wie der Kreis K; ein solcher löst aber die Probleme am bequemsten und schärfsten; man benutzt die Eigenschaften des Kreises von der gleichen Länge der Tangenten von einem Punkte bis zum Berührungspunkte und von der Halbierung der Sehne durch den zu ihr normalen Radius zur Erhöhung der Genauigkeit der Konstruktionen. (Vergl. die andere Verwendung des Kreises für die Bestimmung der Doppelpunkte vereinigter projektivischer Reihen in § 21; dazu unten B. 7.)

Vereinigte projektivische Büschel oder Reihen sind offen-

bar durch ein Paar und die Pascal-Linie bez. den Brianchon-Punkt im Hilfskegelschnitt bestimmt. Berührt jene den Kegelschnitt, bez. liegt dieser auf ihm, so haben sie vereinigte Doppelelemente (§ 19, 8, und § 21), und wenn noch ein Element des bestimmenden Paares mit diesen zusammenfällt, so sind sie von singulärer Projektivität. (§ 22, f u. g.)

Dieselben Betrachtungen führen auch noch:

c) zur Bestimmung der übrigen Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten K, K^*, wenn zwei derselben bekannt sind. Denken wir P_1, P_2 als diese gemeinsamen Punkte, und ist der erste Kegelschnitt durch die ferneren Punkte



P_3, P_4, P_5, der zweite durch P_3^*, P_4^*, P_5^* bestimmt, so sind die Strahlenbüschel $(P_1 . P_3^* P_4^* P_5^* \ldots)$ und $(P_2 . P_3^* P_4^* P_5^* \ldots)$ projektivisch und bestimmen auf dem ersten Kegelschnitt K zwei projektivische Reihen, deren Doppelpunkte offenbar die weiteren Schnittpunkte sind. Damit ist die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

Man folgert daraus leicht, wie:

d) zu drei gemeinsamen Schnittpunkten von zwei Kegelschnitten der vierte gefunden werden kann, natürlich durch lineare Konstruktion. Sind P_1, P_2, P_3 die gemeinsamen, P_4, P_5 und P_4^*, P_5^* die andern bestimmenden Punkte, so mache man $(P_5 . P_1 P_2 P_3 P_4^{**}) = (P_5^* . P_1 P_2 P_3 P_4^*)$ und bestimme den zweiten Schnitt von $P_4^* P_4^{**}$ mit den Kegel-

schnitten; es ist P, der vierte Schnittpunkt derselben, weil man hat

$$(P \,.\, P_1 P_2 P_3 P_4^{**}) = (P \,.\, P_1 P_2 P_3 P_4^{*})$$
$$= (P_5 \,.\, P_1 P_2 P_3 P_4^{**}) = (P_5^{*} \,.\, P_1 P_2 P_3 P_4^{*}).$$

B. 1) Zwei in demselben Träger vereinigte projektivische Punktreihen oder Strahlenbüschel besitzen im allgemeinen zwei Doppelelemente, welche reell und verschieden, zusammenfallend, oder nicht reell (imaginär) sein können. (§ 21.) Sind sie reell, so ist für F_1, F_2 als die Doppelelemente der Reihen und f_1, f_2 als die der Büschel $(F_1 F_2 A B) = (F_1 F_2 A' B')$ oder $(F_1 F_2 A A') =$ konst., bez. ebenso $(f_1 f_2 a a') =$ konst. (Vergl. § 21.)

Im Hinblick auf die Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung und Klasse können wir sagen, daß zwei ineinanderliegende projektivische Gebilde erster Stufe ein Elementenpaar erzeugen, welches reell, vereinigt oder imaginär ist.

2) Man konstruiere einen Kegelschnitt durch vier Punkte 1, 2, 3, 4, der eine gegebene Gerade t berührt. (Figur S. 167.)

Man betrachtet den Berührungspunkt in der Geraden als die Vereinigung der beiden Schnittpunkte mit derselben und erkennt, daß die projektivischen Reihen in der Geraden, welche der Kegelschnitt bestimmt, vereinigte Doppelpunkte F_1, F_2 besitzen müssen; da man zwei Paare A, A'; B, B' derselben erhält, indem man aus zweien der vier Punkte 1, 2 als Scheitel die Büschel nach den beiden andern 3, 4 bildet, so sind die Reihen und die Lagen der vereinigten Doppelpunkte bestimmt: Die Gerade $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$ ist die eine Diagonale des Brianchonschen Sechsseits und ihre Schnitte mit dem Hilfskreis sind die möglichen Lagen des Brianchon-Punktes, deren Tangenten jene liefern. Man erhält zwei Lösungen, nämlich einen Kegelschnitt 1, 2, 3, 4, der t im Punkte 5 6 und einen, der es im Punkte 5 6* berührt. (Man zeige die Identität der Konstruktion mit § 31, 3.)

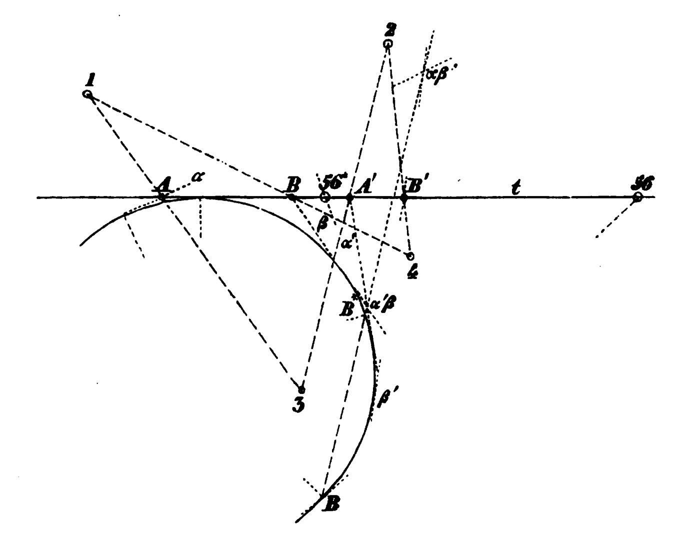
3) Man lege durch vier Punkte eine Hyperbel von vorgeschriebenem Asymptotenwinkel φ. Man kann zwei der Punkte als Scheitel der erzeugenden Büschel betrachten, die man durch Parallelverschiebung vereinigt; dann bestimmen sie einen Punkt der Pascal-Linie in einem Hilfskreis durch den Scheitel und damit zwei Lagen derselben als seine Tangenten an den konzentrischen Kreis, der dem Winkel φ entspricht; die nach ihren Endpunkten im Hilfskreis gehenden Strahlenpaare liefern zwei Paare von Asymptotenrichtungen, die der Aufgabe entsprechen. Spezialfälle sind die gleichseitige Hyperbel und die beiden Parabeln durch die vier Punkte (siehe 4).

4) Man konstruiere die beiden Parabeln durch vier gegebene Punkte 1, 2, 3, 4, d. i. in einem Kegelschnittbüschel. Weil die Reihen in 2) hier auf der unendlich fernen Geraden entstehen, so ersetzt man sie durch die über ihnen stehenden Büschel aus 1, von denen man zwei Strahlenpaare 1 3, 1 4 im einen und die Parallelen aus 1 zu

23, 24 als die entsprechenden im andern hat. Man erhält einen Punkt der Pascal-Linie im Hilfskreis, die Lagen der Pascal-Linien als die Tangenten aus ihm und damit die unendlich fernen Punkte der beiden Parabeln.

5) Man bestimme die Kegelschnitte zu vier Tangenten durch einen gegebenen Punkt nach demselben Prinzip.

6) Man konstruiere die Tangenten einer durch zwei Tangenten a, b und ihre Berührungspunkte A, B bestimmten Parabel vom Punkte T aus — als Doppelstrahlen der projektivischen Büschel aus T über den erzeugenden ähnlichen Reihen in den beiden Tangenten. (Die den Tangenten parallelen Strahlen entsprechen einander



und die nach ihren Berührungspunkten entsprechen dem Strahl nach ihrem Schnittpunkte.)

7) Man bestimme die Schnittpunkte einer Geraden t mit der durch ihre Asymptoten und einen Punkt bestimmten Hyperbel als Doppelpunkte der projektivischen Reihen auf t in den erzeugenden Parallelenbüscheln. (Die Schnittpunkte mit den Asymptoten sind die Gegenpunkte Q', R, die mit den Parallelstrahlen aus dem Punkte zu den Asymptoten geben ein Paar; man lege den Hilfskreis in der Mitte von $Q'R$ berührend an t.) Weil man die Gegenpunkte kennt, ist auch die Konstruktion der Doppelpunkte nach § 21 praktisch. Auch kann man die Q', R stets erhalten, indem man zu den zu t parallellen Strahlen der erzeugenden Büschel die entsprechenden konstruiert.

8) Man ermittele die Gattung eines durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnittes, eventuell die Asymptotenrichtungen desselben. Die Gerade t ist unendlich fern, man bildet von zweien

der fünf Punkte die projektivischen Büschel über den drei andern, verlegt durch Parallelverschiebung das eine an den Scheitel des andern und bestimmt die Doppelstrahlen der so gebildeten konzentrischen projektivischen Büschel. Man sieht daraus, daß zwei projektivische Büschel von ungleichem Bewegungssinn stets eine Hyperbel erzeugen.

Wählt man unter den fünf gegebenen Punkten vier solche, die ein konvexes Viereck bilden, so gehen durch dieselben zwei Parabeln, die nach 3) bestimmt werden; der Kegelschnitt der fünf Punkte ist nur dann eine Parabel, wenn der fünfte Punkt auf einer dieser Parabeln liegt; er ist Hyperbel, wenn der fünfte Punkt im Innern oder außerhalb beider Parabeln liegt, und also Ellipse, wenn innerhalb der einen und außerhalb der andern; die drei Paare von geraden Linien durch die vier Punkte gehören zu den Hyperbeln, ausgenommen wenn zwei Parallelen unter ihnen sind, die dann die eine Parabel repräsentieren, und also auch, wenn die vier Punkte die Ecken eines Parallelogramms bilden, dessen parallele Seitenpaare beide Parabeln repräsentieren.

9) Zwei gleiche Strahlenbüschel von gleichem Drehungssinn in derselben Ebene erzeugen einen Kreis, zwei gleiche Strahlenbüschel von entgegengesetztem Drehungssinn eine gleichseitige Hyperbel (vergl. die Beispiele des § 24), die den gemeinsamen Strahl zum Durchmesser hat, insofern sie nicht perspektivisch sind in diesem Falle erzeugen sie dagegen die unendlich ferne Gerade und den Scheitelstrahl, bez. diesen und die ihn senkrecht halbierende Perspektivachse. Die durch Parallelverschiebung an demselben Zentrum vereinigten gleichen Büschel bestimmen mit einem Hilfskreis die unendlich ferne Gerade (vergl. § 31, 10) bez. einen seiner Durchmesser als Pascal-Linie; die Asymptoten der erzeugten Hyperbel sind rechtwinklig zueinander. Der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks liegt auf jeder gleichseitigen Hyperbel, die seine Ecken enthält. Durch vier Punkte 1, 2, 3, 4 geht im allgemeinen e*i*ne gleichseitige Hyperbel — natürlich durch die vier Höhenschnittpunkte der Dreiecke 234, 134, 124, 123; zieht man 13, 14 und die Parallelen von 1 zu 23, 24, so hat man zwei Strahlenpaare vereinigter projektivischer Büschel, und durch die geforderte Rechtwinkligkeit der Doppelstrahlen sind dieselben mittelst des Hilfskreises bestimmt.

Ist aber der vierte Punkt der Höhenschnitt im Dreieck der drei ersten Punkte, so fällt der bekannte Punkt der Pascalschen Linie in den Mittelpunkt des Hilfskreises, sein Durchmesser ist unbestimmt und man erkennt, daß alle gleichseitigen Hyperbeln durch drei Punkte einen vierten Punkt enthalten, nämlich den Höhenschnitt ihres Dreiecks.

10) Zwei vereinigte projektivische Reihen in einer Geraden t bestimmen mit zwei zugehörigen Scheitelpunkten T_1, T_2 erzeugender

Büschel einen Kegelschnitt; zwei vereinigte projektivische Büschel um T und zwei Tangenten t_1, t_2 als Träger erzeugender aus jenen geschnittenen Reihen ebenso. Also wird ein Kegelschnitt durch drei Punkte T_1, T_2, A aus einem Kreise mit fester Tangente t und einem Punkte B als Brianchon-Punkt einer Projektivität auf ihm konstruiert werden können. Man überträgt T_1A, T_2A oder a_1, a_2 durch ihre Schnitte mit t auf den Kreis (durch die zweiten Tangenten aus diesen) als $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ und bestimmt mittelst B neue Paare $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ der Projektivität am Kreis, deren Schnitte mit t neue Paare x_1, x_2 der erzeugenden Büschel liefern. Ebenso dualistisch aus einem Kreise und einem festen Punkt T in ihm nebst einer Geraden p als Pascal-Linie einer Projektivität auf dem Kreis zu drei Tangenten t_1, t_2, a.

11) Man erörtere die Bestimmung der übrigen gemeinsamen Tangenten zu zwei Kegelschnitten, wenn zwei oder drei derselben gegeben sind — d. i. die zu c), d) im Texte dualistisch entsprechenden Konstruktionen; speziell im Falle von Parabeln mit einer oder zwei gemeinsamen Tangenten im Endlichen.

30. Die vorigen Konstruktionen ermöglichen zwar auch die konstruktive Behandlung involutorischer Reihen und Büschel, weil diese nur eine durch Besonderheit der Lage ausgezeichnete Art vereinigter projektivischer Reihen und Büschel sind; sie zeigen auch von neuem, daß eine Involution im allgemeinen zwei Doppelelemente besitzen muß, die insbesondere zusammenfallen oder auch nicht reell werden können (§ 20, 8, 13). An der letzterwähnten Stelle werden wir auch den Zusammenhang der Involution mit der projektivischen Erzeugung der Kegelschnitte erkennen. (§ 32.)

Aber die Übertragung auf den Kegelschnitt (Kreis) liefert sofort noch neue Hilfsmittel für die konstruierende Behandlung der Involution.

Aus den Bedingungen der Involution von drei Paaren am Kegelschnitt

$$(CC'A'B) = (C'CAB') = (CC'B'A)$$

erhalten wir durch Verbindung der projektivischen Gruppen $CC'A'B$ und $CC'B'A$ mit A bez. B perspektivische Büschel, deren Strahlenpaare AC, BC; AC', BC'; AA', BB' sich in der Geraden CC' schneiden, oder AA', BB', CC' gehen durch einen Punkt, den Pol der Involution. Man erkennt ebenso für die Involution der Tangenten aa', bb', cc', daß ihre Paare sich in einer Geraden, ihrer Polare schneiden. Jener ist zu-

gleich der Brianchon-Punkt der Involution der zugehörigen Tangentenpaare; diese die Pascallinie der Involution der Punktepaare. Beide gehören zusammen und werden in dieser Verbindung auch durch die folgende Betrachtung erhalten.

Am einfachsten gelangen wir zur besten Form der die Involution betreffenden Konstruktionen und zugleich zur Quelle zahlreicher wichtiger Eigenschaften der Kegelschnitte durch die Verbindung der Lehre von der involutorischen Zentralkollineation mit den vorigen Betrachtungen.

In einer involutorischen Zentralkollineation bilden zwei Paare entsprechende Punkte A, A', B, B' auf verschiedenen Strahlen aus dem Zentrum 𝔖 immer ein vollständiges Viereck, von dessen Diagonalpunkten zwei, nämlich $AB', A'B$; $AB, A'B'$ in der Achse der Kollineation s gelegen sind, der dritte AA', BB' im Zentrum 𝔖. Ebenso bilden zwei Paare entsprechende Gerade a, a'; b, b' in ihr aus verschiedenen Punkten der Achse ein vollständiges Vierseit, von dessen Diagonalen zwei, nämlich $ab', a'b$; $ab, a'b'$ durch das Zentrum der Kollineation 𝔖 hindurchgehen, während die dritte in der Achse liegt. Diese Vierecke und Vierseite entsprechen sich selbst in der involutorischen Zentralkollineation. Man findet solche Vierecke und Vierseite in den Figuren auf S. 171.

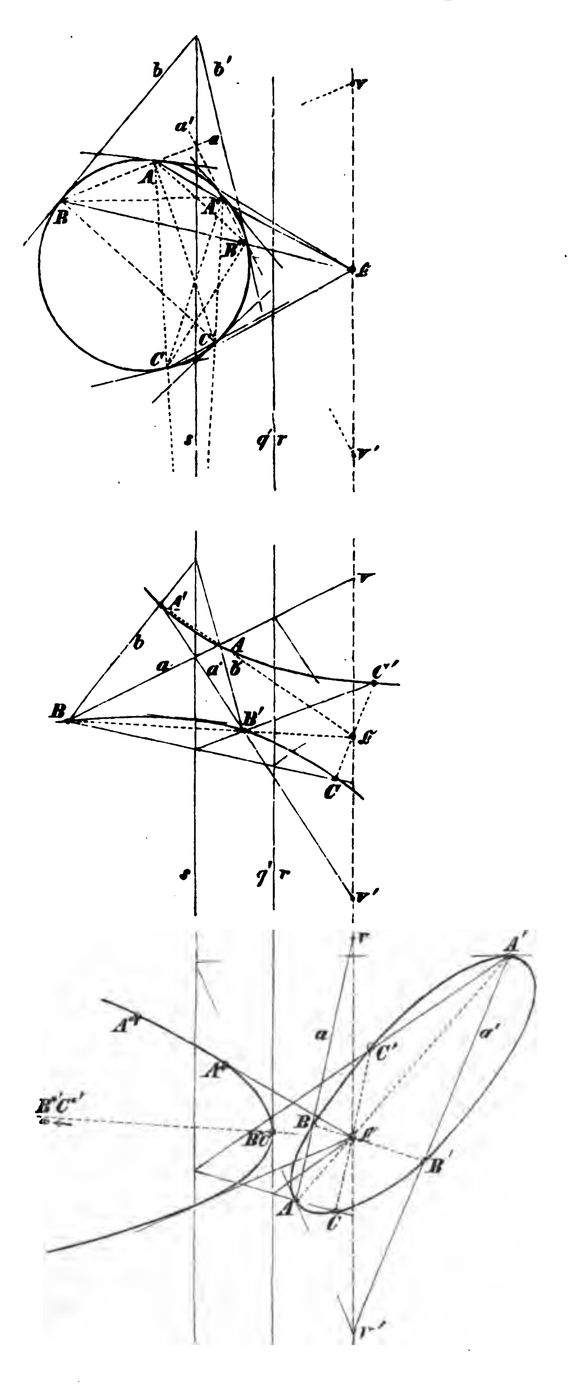
Geht man zu drei Paaren entsprechender Elemente A, A'; B, B'; C, C' bez. a, a'; b, b'; c, c' weiter, so erkennt man, daß dieselben stets ein Pascalsches Sechseck mit der Kollineationsachse s als einer Pascalschen Linie, bez. ein Brianchonsches Sechsseit mit 𝔖 als seinem Brianchonschen Punkt bilden. Drei solche Elementenpaare bestimmen also einen Kegelschnitt, der in der involutorischen Zentralkollineation sich selbst entspricht. (Figuren auf S. 171.)

Eine Gerade durch das Zentrum 𝔖 schneidet den Kegelschnitt in zwei Punkten, die durch das Zentrum und die Achse s harmonisch getrennt sind.

Wenn unter diesen Geraden zwei Tangenten des Kegelschnittes sind, so berühren die-

Durch einen Punkt auf der Achse s gehen zwei Tangenten an den Kegelschnitt, die durch den nach dem Zentrum gehenden Strahl und die Achse harmonisch getrennt sind.

Wenn unter diesen Punkten zwei Punkte des Kegelschnittes sind, so gehen die zugehörigen


b
b'
a'
a
A
A'
B
B'
C
C'
s
q'
r
v
v'
b
a
a'
b'
A
A'
B
B'
C
C''
s
q'
r
v
v'
r
A'
a
a'
C'
B
B'
A
C
BC
B'C''

selben ihn in den Punkten, die er mit der Achse s gemein hat.

Jeder Kegelschnitt ist für jeden Punkt seiner Ebene als Zentrum mit sich selbst in involutorischer Zentralkollineation.

Tangenten desselben nach dem Zentrum $\mathfrak{C}$.

Jeder Kegelschnitt ist für jede Gerade seiner Ebene als Achse mit sich selbst in involutorischer Zentralkollineation.

Wir nennen das Zentrum der involutorischen Kollineation und die Achse derselben bez. Pol und Polare in Bezug auf den Kegelschnitt. Man hat also die Sätze:

Nach § 26 ist der Kegelschnitt Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die Mittellinie zwischen Pol und Polare — die Vereinigung der Gegenachsen der involutorischen Kollineation — ihn nicht trifft, berührt oder schneidet.

(Vergl. § 26 über die zentrische Kollineation zweier beliebigen Kegelschnitte der Ebene und das Beispiel über die Symmetrie in § 22.)

Die involutorischen Punkt- und Tangentensysteme für dieselben sind elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem der Pol im Innern, auf oder außerhalb des Kegelschnittes gelegen ist.

Die zugehörige Kollineationsachse geht durch alle nachfolgend bezeichneten Punkte oder ist der Ort derselben (Figuren S. 171); nämlich der Ort der vierten harmonischen dem Zentrum konjugierten Punkte zu den Punkten A, A'; B, B'; etc. des Kegelschnittes auf jedem durch das Zentrum gehenden Strahl; der Ort der Schnittpunkte der Geraden, welche jene Paare von Punkten kreuzweis verbinden, wie $AB', A'B$; etc.; ferner der Ort der Schnittpunkte von AB, $A'B'$ etc.; und der Ort der Schnittpunkte der

Das zugehörige Kollineationszentrum liegt auf allen nachfolgend bezeichneten Geraden oder ist die Enveloppe derselben (Figuren S. 171); nämlich die Enveloppe der vierten harmonischen der Achse konjugierten Strahlen zu den Tangenten a, a'; b, b' etc. des Kegelschnittes aus jedem auf der Achse liegenden Punkte; die Enveloppe der Verbindungslinien der Punkte, in welchen jene Paare von Tangenten kreuzweis sich schneiden, wie $ab', a'b$; etc.; ferner die Enveloppe der Verbindungslinien von ab, $a'b'$

Paare von Tangenten a, a', etc. des Kegelschnittes in den entsprechenden Punkten wie A, A', etc.

etc. und die der Verbindungslinien der Paare von Berührungspunkten A, A', etc. in entsprechenden Tangenten a, a', etc.

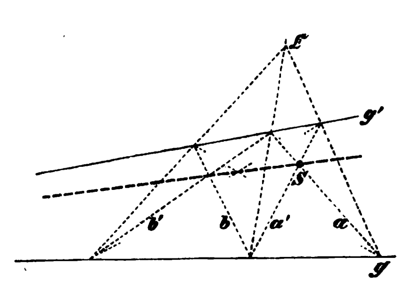
Darin liegen die konstruktiven Hilfsmittel für den Übergang vom Zentrum der Involution zur Achse derselben, d. i. vom Pol zur Polare, sowie für den umgekehrten von der Polare zum Pol. Die Gerade durch die Halbierungspunkte aller der Strecken zwischen Pol und Polare auf den verschiedenen durch den Pol gehenden Strahlen ist — als Vereinigung der Gegenachsen der involutorischen Systeme — der Ort der freien Ecken aller der Parallelogramme, welche die vom Pol ausgehenden Parallelen entsprechender Geradenpaare — speziell entsprechender Tangentenpaare des Kegelschnittes — mit diesen selbst bilden. (§ 20.) Diese Paare der entsprechenden Geraden erzeugen auf der durch den Pol gezogenen Parallelen zur Polare symmetrisch gleiche projektivische Reihen V, V' (Figuren S. 171), die den Pol zum einen und den unendlich fernen Punkt zum andern Doppelpunkt haben. (§ 20, 3. Vergl. § 19, 3, sowie § 40.)

Sonach besitzt eine Involution von Punkten A, A'; B, B'; ... auf einem Kegelschnitt nicht nur eine Achse oder Polare, in welcher sich die Paare der Geraden $AB', A'B$; $AC', A'C$; $AB, A'B'$ etc. schneiden (§ 29.), sondern auch ein Zentrum oder einen Pol, in welchem alle Geraden AA', BB', CC', ... konvergieren. Und eine Involution von Tangenten a, a'; b, b'; ... an einem Kegelschnitt besitzt außer einem Zentrum oder Pol, in welchem die Verbindungslinien der Punktepaare $ab', a'b$; $ac', a'c$; $ab, a'b'$; etc. konvergieren (§ 29.), auch eine Achse oder Polare, in welcher alle die Punkte aa', bb', ... liegen.

Wenn die Tangenteninvolution aa', bb' aus den Tangenten in den gleichnamigen Punkten A, A', B, B' bez. des Kegelschnittes besteht, so ist der Punkt AA', BB' (der Pol der involutorischen Reihe im Kegelschnitt) zugleich der Pol der Geraden aa', bb' (der Polare des involutorischen Tangentensystems am Kegelschnitt). Alle gleichbezeichneten Punkte und Geraden, wie $AB', A'B$ und $ab', a'b$ oder aa' und AA' etc. bilden Paare von Pol und Polare in Bezug auf den Kegelschnitt; ihre Gesamtheit ist das vom Kegelschnitt bestimmte Polarsystem.

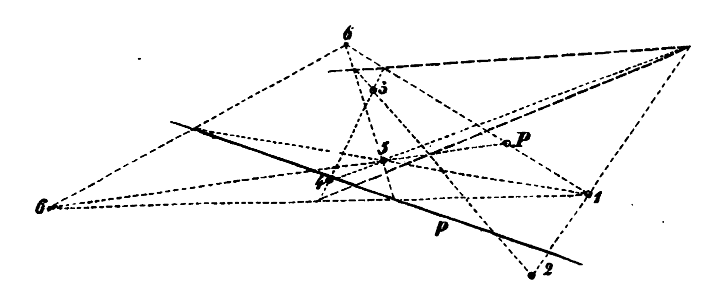
Zwei Paare von Elementen auf und am Kegelschnitt bestimmen, wenn ihre Zuordnung nicht bestimmt ist, drei Involutionen von Punkten und Tangenten; zu der vorbetrachteten ersten die zweite mit den Paaren ab, $a'b'$ bez. AB, $A'B'$ und die dritte mit den Paaren ab', $a'b$ bez. AB', $A'B$; ihre Polaren und bez. Pole sind die Seiten und Gegenecken des Diagonaldreiecks des umgeschriebenen Vierseits $aba'b'$ und zugleich des zugehörigen eingeschriebenen Vierecks $ABA'B'$ (§ 27. 6 und 28, 3). Zwei dieser Involutionen sind hyperbolisch, eine ist elliptisch.

B. 1) Man bestimme die gerade Linie von einem Punkte S nach dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden g und g' durch Punkte ohne Hilfe des Zirkels (nebenstehende Figur). Man zieht durch S zwei Gerade a, a' und betrachtet g, g'; a, a' als entsprechende Paare einer involutorischen Perspektive; sie geben 𝔈 als Zentrum derselben, damit weitere Paare wie b, b' und damit neue Punkte ihrer Achse, welche durch S und g, g' gehen muß. (Vergl. § 28, 11; § 57, 1.)



Nach demselben Prinzip, jedoch nicht mit einer involutorischen Kollineation, kann man auch die Verbindungslinie der unzugänglichen Schnittpunkte von zwei Paaren gerader Linien innerhalb des Blattes bestimmen.

2) Man bestimme die Polare p eines Punktes P in Bezug auf denjenigen Kegelschnitt, welcher durch fünf andere Punkte 1, 2, 3, 4, 5 der Ebene bestimmt ist — indem man (nachstehende Figur) die Verbindungslinien von P mit zweien jener Punkte (1, 5) und



ihre ferneren Schnittpunkte (6) mit dem Kegelschnitt benutzt. Die beiden stärker punktierten vom Punkte (1, 2; 4, 5) ausgehenden Geraden sind die bezüglichen benutzten Pascalschen Linien. Durch

die beiden von P verschiedenen Diagonalpunkte des Vierecks 1665 geht die Polare.

Speziell, wenn der Punkt P der unendlich ferne Punkt einer gegebenen Geraden ist, wird p (§ 34, 1) ein Durchmesser des Kegelschnittes.

3) Man konstruiere den Pol P einer Geraden p in Bezug auf die durch ihre Asymptoten und eine andere Tangente bestimmte Hyperbel; insbesondere den Pol der unendlich entfernten Geraden für den durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnitt. Die Konstruktion der letzten Aufgabe in untenstehender Figur ist dahin zu erklären, daß die Tangenten 6, 6 aus den beiden unendlich fernen Punkten der Tangenten 1 und 5 mittelst der beiden in der Geraden (1, 2) (4, 5) gelegenen Brianchonschen Punkte konstruiert sind. Der im Endlichen liegende Diagonalpunkt des Parallelogramms 1665 ist der Pol der unendlich fernen Geraden oder (§ 34, 2) der Mittelpunkt des Kegelschnittes.

4) Die Projektionen P' und p' des Pols P und der Polare p für einen Kegelschnitt K sind Pol und Polare für die Projektion des Kegelschnittes K'.

5) Man soll einen Kegelschnitt aus einem Pol $\mathfrak{C}$ und seiner Polare s durch drei seiner Punkte A, B, C bez. drei seiner Tangenten a, b, c bestimmen; ferner ebenso durch zwei Punkte A, B und die Tangente a des einen von ihnen bez. durch zwei Tangenten a, b und den Berührungspunkt A der einen.

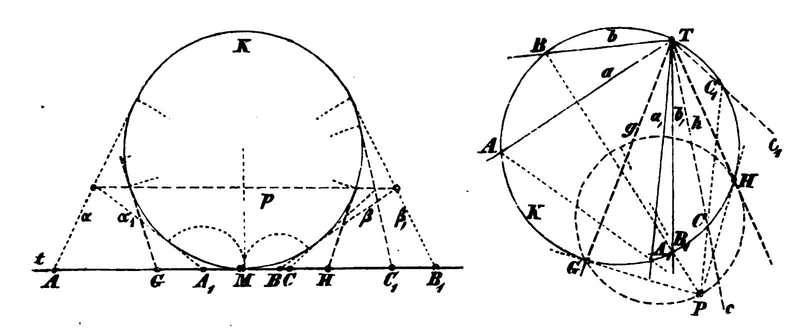
Man konstruiert die durch C und s harmonisch von A, B, C bez. a, b, c getrennten Elemente A', B', C' bez. a', b', c' und hat damit sechs Elemente des Kegelschnittes; und man konstruiert die durch $\mathfrak{C}$ und s harmonisch getrennten zu den Elementen A, B, a und bez. zu a, b, A, also A', B', a' und a', b', A' bez., was wieder je sechs Elemente repräsentiert. Natürlich kann man sich dazu der Mittellinie $q'r$ zwischen $\mathfrak{C}$ und s und der Konstruktionsweise der zentrischen Kollineation bedienen.

6) Ein Kegelschnitt ist aus zwei Polen P_1 und P_2 und ihren Polaren p_1 und p_2 durch einen Punkt A, bez. zu einer Tangente a zu zeichnen.

Wenn wir den Schnittpunkt von p_1 und p_2 mit P_3 benennen, so ist die Verbindungslinie von P_1 mit P_2 seine Polare p_3; ebenso ist die Gerade P_1P_3 die Polare p_4 des Punktes p_1p_3 oder P_4, und

die Gerade $P_2 P_3$ oder p_5 die Polare des Punktes $p_2 p_3$ oder P_5. Betrachten wir dann jeden dieser Pole als Zentrum und die entsprechende Polare als Achse einer involutorischen Zentralkollineation, in der der gesuchte Kegelschnitt sich selbst entspricht, so erhalten wir die entsprechenden Elemente zu A bez. a in diesen fünf Kollineationen als fünf neue Punkte bez. Tangenten des Kegelschnittes. (Vergl. § 32, 11.)

31. Durch das Vorige sind die Mittel zur Behandlung der Probleme über die involutorischen Büschel und Reihen gewonnen, welche denen des § 29 analog sind. Wir entwickeln unter den Beispielen besonders die wichtigen Anwendungen der Involution rechter Winkel und die Bestimmung des gemeinsamen Paares von zwei vereinigten Involutionen.



B. 1) Zwei Paare von Punkten einer Geraden t oder zwei Paare von Strahlen eines Punktes T, welche sich entsprechen, A, A_1; B, B_1 oder a, a_1; b, b_1 bestimmen eine Involution von Punkten oder Strahlen. Man konstruiert (Figur links, bez. rechts).

a) für einen Kreis K, welcher t berührt — bez. durch T geht — das System involutorischer Tangenten aus A, A_1; B, B_1, nämlich α, α_1; β, β_1 — bez. das System involutorischer Punkte auf a, a_1, b, b_1, nämlich A, A_1, B, B_1 — und zu diesem die Polare p — bez. den Pol P;

b) ein Viereck (Vierseit) von dessen Gegenseiten(ecken)paaren das eine durch A, A_1 (in a, a_1) das andere durch B, B_1 (in b, b_1) geht (liegt). (§ 25, 5.)

Man bestimme zum Punkte C, bez. Strahl c, den entsprechenden Punkt C_1 — Strahl c_1 — der Involution; sowohl nach a) als nach b), d. h. a) nach der Bemerkung daß $\gamma\gamma_1$ auf der Polare p liegt, bez. CC_1 durch den Pol P geht; und b) nach der andern, daß C, C_1 im dritten Gegenseitenpaar liegen, c, c_1 durch das dritte Gegeneckenpaar gehen.

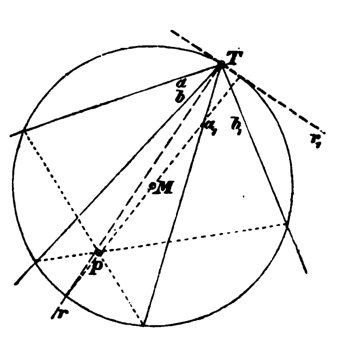
2) Man ermittele die Doppelpunkte G, H einer involutorischen Reihe in t und die Doppelstrahlen g, h eines involutorischen Büschels aus T — mittelst des Pols bez. der Polare der Involution in 1, a). (Figur auf S. 190.)

3) Man bestimme die durch vier feste Punkte gehenden — oder vier feste Gerade berührenden — Kegelschnitte mit einer gegebenen Geraden als Tangente — bez. durch einen gegebenen Punkt (§ 25, 2); speziell die Parabeln durch vier Punkte.

Für die Identität der Konstruktion hier und in § 29, 2 bemerke man: Die Pascalsche Linie am Hilfskreis dort ist die Polare der Involution im selben Hilfskreis hier; und dual im Falle der Kegelschnitte zu vier Tangenten durch einen Punkt.

4) Wie bestimmt man den Zentralpunkt der Involution von Punkten A, A_1, B, B_1 in der Geraden t mittelst des Kreises?

5) Man konstruiere das Paar r, r_1 entsprechender rechtwinkliger Strahlen des involutorischen Strahlenbüschels a, a_1, b, b_1 (§ 20, 9) nebenstehender Figur und zeige, daß sie im Fall reeller Doppelstrahlen die von diesen gebildeten Winkel halbieren.



Wenn die Involution elliptisch ist — wie in der Figur — so gibt es ein symmetrisches Paar, das die Rechtwinkelstrahlen zu den Halbierungslinien seiner Winkel hat; seine Sehne ist die Senkrechte durch P zum Radius MP. (Vergl. § 20, 9.) Der Scheitel und der Pol in einem gegebenen Hilfskreis bestimmen das involutorische Büschel, ebenso der Träger t und die Polare p im Hilfskreis K die involutorische Reihe. (Vergl. § 29.)

6) Jede Involution von Strahlen, in welcher zwei Paare entsprechender Strahlen rechte Winkel einschließen, ist eine Involution rechter Winkel, d. h. sie besteht aus lauter rechtwinkligen Paaren; weil ihr Pol in einem Hilfskreis durch den Scheitel im Mittelpunkt derselben liegt. (Man kann das auch aus der Linealkonstruktion der Involution in § 20, 17b erfahren, indem man zwei der Dreiecksecken als Richtungen der Strahlen x, y etwa wählt.) Die Polare derselben ist die unendlich ferne Gerade der Ebene, weil die Tangentenpaare des Kreises in den Endpunkten seiner Durchmesser parallel und die Verbindungsgeraden dieser Endpunkte außer den Durchmessern Paare von Parallelen sind.

7) Die über den drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits als Durchmesser beschriebenen Kreise gehen durch dieselben zwei Punkte. Denn die Involution von drei Strahlenpaaren aus einem Schnittpunkt von zweien dieser Kreise

nach den Gegeneckenpaaren enthält zwei, also lauter Rechtwinkelpaare. Ihre Mittelpunkte liegen somit in einer Geraden.

Alles dies überträgt sich auf eine Kegelschnittschaar: Die Kreise der Punkte rechtwinkliger Tangentenpaare für die Kegelschnitte einer Schaar bilden ein Büschel. Man konstruiert sofort den besagten Kreis für den durch fünf Tangenten etc. gegebenen Kegelschnitt durch Punktepaare. Die Tangenten 2345 geben ein Paar I, I^* und die Mittelpunktslinie *1*, die Tangenten 1345 ein Paar II, II^* und die Mittelpunktslinie *2*; der Schnitt dieser Geraden *1* und *2* ist der Mittelpunkt des Orthogonalkreises und natürlich des Kegelschnittes. Auch wenn eines der Punktepaare nicht reell ist, wird der Kreis bestimmt.

Zugleich hat man den Satz: Für die fünf Vierseite aus fünf Geraden gehen die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Diagonalen durch einen Punkt etc. Für vier Gerade 1234 mit der unendlich fernen als der fünften erhält man die Parabel und den Satz: Die Höhenschnittpunkte der vier aus vier Geraden entstehenden Dreiseite liegen in der Direktrix der von ihnen berührten Parabel. Wie für drei Gerade und die zugehörige Parabelschaar?

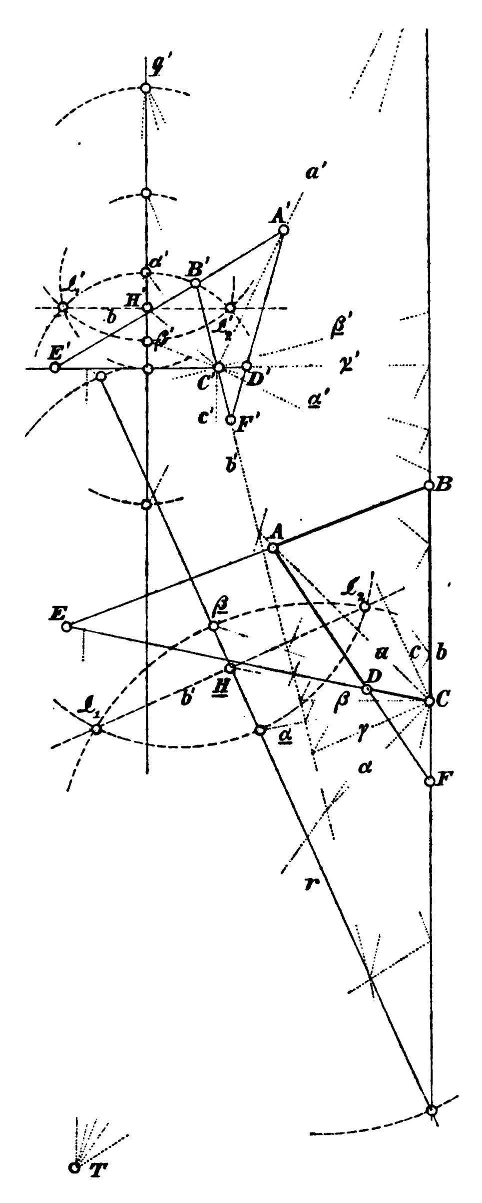
8) Alle Rechtwinkelinvolutionen sind einander gleich; wir legen daher, sofern sie derselben Ebene oder parallelen Ebenen angehören, ihren nicht reellen Doppelstrahlen, die nach den Schnittpunkten des Hilfskreises mit ihrer unendlich fernen Geraden als der Polare der Involution (6) gehen, einerlei feste Richtungen bei; d. h. alle Kreise derselben Ebene gehen durch zwei feste nicht reelle Punkte J_1, J_2 in der unendlich fernen Geraden. Wir nennen sie die Kreispunkte der Ebene — auch ihre absoluten Punkte.

Wir sagen auch, daß alle rechten Winkel in derselben Ebene auf der unendlich fernen Geraden die (elliptische) Involution der rechtwinkligen Richtungspaare bilden, und daß die absoluten Punkte ihre Doppelpunkte sind — ein Paar, das mit jedem ihrer Paare harmonisch ist. (Projektivische Definition des rechten Winkels.)

Weil die absoluten Punkte durch den Begriff Kreis als ihm angehörig bestimmt sind, so läßt sich durch drei Punkte nur ein Kreis legen; er ist so ein durch fünf Punkte definierter Kegelschnitt.

9) An die vorigen Ergebnisse schließt sich eine Anwendung auf die Konstruktion der Zentra in zwei kollinearen Systemen (§ 23), die zu wichtigen Folgerungen führt (§ 33, 12 und § 36, 12). Wir kennen die Konstruktion der Gegenachsen q', r aus den vier Paaren entsprechender Elemente der Kollineation; als Entsprechende der unendlich fernen Geraden q bez. r' der andern Systeme enthalten sie zu den Involutionen der rechtwinkligen Richtungen in diesen Geraden q, r' die entsprechenden elliptischen Involutionen; zu jeder von diesen gibt es zwei Punkte, welche Scheitel sind von Rechtwinkelinvolutionen, die über ihren Paaren stehen — nämlich

die Grundpunkte des Büschels von Kreisen über den Strecken der Paare als Durchmessern (§ 15, obere Zusammenlegung in der Figur).



Sie sind die Punkte der beiden Ebenen — $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ in der ungestrichenen zur Involution in r und $\mathfrak{E}_1', \mathfrak{E}_2'$ in der gestrichenen zur Involution in q' — aus deren Zusammenlegung bei parallelen Gegenachsen q' und r die zentrische Lage der kollinearen Systeme entspringt, weil an ihnen gleiche entsprechende Büschel in Deckung entstehen. Die Sehnen $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_1'\mathfrak{E}_2'$ schneiden die Hauptfluchtpunkte H bez. H' aus r bez. q', der Kreis über $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2$ als Durchmesser die Distanzpunkte in r und der über $\mathfrak{E}_1'\mathfrak{E}_2'$ die Distanzpunkte in q' aus; die Mittelpunkte und bez. die symmetrischen Paare der Involutionen.

Wir denken r, q' gefunden und brauchen zur Bestimmung der Kollineation also nur noch zwei Paare, sagen wir Gerade a, a' und b, b'; ziehen wir durch ab die Parallele p zu r und durch $a'b'$ die Parallele p' zu q', so sind diese ein drittes Paar entsprechender Strahlen der Büschel; und in der Zeichnungsebene, in der wir die Systeme liegend denken, kann mittelst ihres perspektivischen Zentrums zu jedem Strahl des einen der entsprechende des andern bestimmt werden. Aus der Normale von p in ab erhalten wir den Strahl im gestrichenen System, der aus q' den Mittelpunkt H'

schneidet, und der Normale zu p' in $a'b'$ entspricht der Strahl im ungestrichenen System, der r im Mittelpunkt H trifft Einem der Strahlen a von ab und seiner Normale in ab entsprechen a' und der Strahl in $a'b'$, welcher mit a' ein Paar der Involution in q' ausschneidet; ebenso einem Strahl a' und seiner Normale in $a'b'$ der Strahl a mit dem Strahl in ab, der mit ihm ein Paar der Involution in r liefert. Aus dem Mittelpunkt und einem Paar folgt aber wie in § 15 das Kreisbüschel, bez. das symmetrische Paar und die Lagen der Zentra in jeder der beiden Ebenen.

10) Die Zentralprojektion der Involution rechter Winkel mit ihrem Hilfskreis ist eine allgemeine Involution ohne reelle Doppelstrahlen, also mit einem symmetrischen Paar (5), mit ihrem Pol und ihrer Polare in einem Hilfskegelschnitt.

11) Die Doppelstrahlen gleichwinkliger Büschel von einerlei Scheitel und von gleichem Sinn gehen nach den Kreispunkten der Ebene. (Vergl. 8 und die Konstruktion in § 29, 9.) Man konstruiere gleichwinklige Büschel von einerlei Sinn aus den Scheiteln und Anfangsstrahlen mit Hilfe eines Kreises durch den Scheitel des einen.

Winkel von einerlei Halbierungslinien oder entsprechende Strahlen konzentrischer gleichwinkliger Büschel von entgegengesetztem Sinn bilden eine symmetrische Involution (§ 22, b.), welche jene zu ihren Doppelstrahlen hat; der Pol derselben im Hilfskreis ist unendlich fern, die Polare ein Durchmesser. Ihre Zentralprojektion ist eine allgemeine Involution mit reellen Doppelstrahlen. Man konstruiert daher gleichwinklige Büschel von entgegengesetztem Sinn aus den Scheiteln und Anfangsstrahlen mittelst eines Hilfskreises durch einen der Scheitel.

12) Nach dem Vorigen ist in der Punktreihe die symmetrische Involution (wo der eine Doppelpunkt unendlich fern und der andere die Mitte aller ihrer Paare ist), und in dem Strahlen- und Ebenenbüschel die symmetrische Involution (mit rechtwinkligen Doppelstrahlen resp. Doppelebenen) und die Rechtwinkelinvolution ausgezeichnet; und man darf erwarten, daß durch Schnitt- oder Scheinbildung jede gegebene elliptische Involution in eine rechtwinklige und jede hyperbolische in eine symmetrische übergeführt werden könne. Von den beiden in dieser Bezeichnung hervortretenden Hauptaufgaben ist die erste bestimmt, während die zweite einfach unendlich viele Auflösungen gestattet, wie sich dies durch folgende Betrachtung ergibt. Sind g, h die Doppelstrahlen der gegebenen hyperbolischen Strahleninvolution, so ist die Schnittlinie s von zwei zueinander normalen Ebenen, deren eine durch g und die andere durch h geht, immer die Scheitelkante einer symmetrischen Ebeneninvolution, die durch die gegebene hindurch geht; die Gesamtheit solcher Scheitelkanten bildet also nach § 11, 5 die Mantellinien eines Kegels K_2, der von

jeder zu g oder h normalen Ebene in einem Kreise über den Schnitten derselben mit g und h als Endpunkten eines Durchmessers geschnitten wird. Und wenn die hyperbolische Ebeneninvolution durch ihre Doppelebenen **G, H** gegeben ist, so schneidet jede Ebene, die mit diesen ein rechtwinkliges Strahlenpaar bestimmt, aus ihr ein symmetrisch-involutorisches Büschel; d. h. die Gesamtheit aller durch einen Punkt von **G, H** gehenden Ebenen dieser Art bildet die Tangentialebenen eines Kegels (§ 28, 7) K^2, der die Ebenen **G, H** in den Schenkeln des von ihnen gebildeten Linienwinkels berührt. Man kann somit im ersten Falle noch die Orthogonalprojektion der Scheitelkante innerhalb des spitzen Winkels gh willkürlich wählen und dann den Neigungswinkel β derselben gegen die Ebene gh finden; ebenso im zweiten Falle die Spur der Schnittebene im Normalschnitt des Ebenenbüschels, sodaß sie mit den Spuren von **G, H** ein stumpfwinkliges Dreieck bildet, mit nachheriger Bestimmung ihres Neigungswinkels α gegen jenen. Man erhält z. B. den letzteren aus der Spur r im Normalschnitt g, h für G als s, g und H als s, h, sowie T als g, h, indem man vom Endpunkt (T) der Senkrechten TT' durch T zu s im Kreis über GH als Durchmesser die Tangente $(T)A$ an den mit dieser Senkrechten um T' beschriebenen Kreis zieht; $\angle TT'A$ ist gleich α.

Die Aufgabe, außer einer hyperbolischen Strahlen- oder Ebeneninvolution eine symmetrische Reihe zu schneiden, ist gleichfalls unbestimmt; alle Transversalen in der Ebene des Strahlenbüschels, welche entweder zu g oder zu h parallel sind, lösen die erste; alle Geraden im Raum, welche zu **G** oder zu **H** parallel sind, liefern Lösungen der zweiten. Man kann die verlangte symmetrische Reihe durch weitere Bedingungen bestimmen.

Endlich gehören zu einer gegebenen hyperbolischen Punktinvolution, die wir durch ihre Doppelpunkte G, H geben, die Punkte der über GH als Durchmesser gebildeten Kugelfläche als Scheitel symmetrisch involutorischer Büschel und die in Normalebenen zu GH gelegenen Tangenten dieser Kugel als Scheitelkanten symmetrisch involutorischer Ebenenbüschel.

Die Auflösung der bestimmten Probleme von den elliptischen und Rechtwinkelinvolutionen knüpft sich hieran.

13) Eine elliptische Involution kann durch ihr symmetrisches Paar und ihren Zentralpunkt bestimmt werden (5 oben), wenn sie eine Reihe ist, durch ihr symmetrisches Paar und ihr Rechtwinkelpaar, wenn ein Büschel; oder in allgemeiner Form durch zwei sich trennende Paare.

Denken wir zunächst die Reihe mit dem Zentralpunkt M und dem symmetrischen Paar $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$, so ergeben sich nach dem Schluß von 12) die Scheitel rechtwinklig involutorischer Strahlenbüschel und die Scheitelkanten rechtwinklig involutorischer Ebenenbüschel über dieser Punktinvolution als die Punkte und Tangenten des

Kreises, in welchem die Normalebene durch M zu $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ die Kugel mit $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1$ als Enden eines Durchmessers durchschneidet; denn sie müssen mit M und der Richtung von $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ ebenso wie mit $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ je ein Paar rechtwinkliger Strahlen bez. Ebenen bestimmen. (Vergl. § (35b).)

14) Wie in 12) mit zwei Kugeln, oder Ebene und Kugel, so haben wir es mit zwei Kegeln K_2, bez. K^2 (11) etc. zu tun, wenn es sich um die Rechtwinkelinvolutionen von Ebenen durch ein elliptisch-involutorisches Strahlenbüschel vom Scheitel T und um die rechtwinkligen Strahlenbüschel aus einer elliptischen Ebeneninvolution von der Scheitelkante t handelt. Im ersten Falle entspringen aus zwei beliebigen Paaren x, x_1; y, y_1 zwei Kegel (§ 11, 5.) K_2^x, K_2^y, deren gemeinsame Mantellinien das Problem lösen; für das Rechtwinkelpaar r, r_1 als y, y_1 erhält man statt des Kegels K_2^r das Paar der Normalebenen zu rr_1 durch r, bez. r_1; die durch x, x_1 gehenden und zueinander normalen Ebenen, die sich in einer dieser beiden Ebenen schneiden, liefern die fraglichen Scheitelkanten. Ist r die Halbierungslinie des spitzen Winkels vom symmetrischen Paar σ, σ_1, so dient ein Kreisschnitt des Kegels K_2^σ zur Bestimmung; man zieht die Normale $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ zu σ zwischen σ und σ_1, zeichnet die Ordinate ihres Schnittes T' mit r im Kreis über $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ als Durchmesser und bildet aus ihr und TT' als Katheten das rechtwinklige Dreieck, um in seinem Winkel bei T den Neigungswinkel β der gesuchten Scheitelkante zu erhalten. Welche Beziehung besteht zwischen dem Winkel β und dem Winkel $r\sigma$?

Im zweiten Falle bilden wir für das rechtwinklige Paar der elliptischen Ebeneninvolution an einem beliebigen Punkte der Scheitelkante t den Kegel K_r^2, die Schnittlinien des Paares mit der Normalebene zu t und legen durch sie die Tangentialebenen an den Kegel K^2, der aus dem symmetrischen Ebenenpaar entspringt; oder nach der offenbaren Symmetrie derselben gegen die Normalschnittebene durch ihre Schnittlinie: Wir ziehen im Normalschnitt die zu einem Rechtwinkelstrahl parallele Gerade zwischen den Schenkeln des vom symmetrischen Paar gebildeten stumpfen Winkels und beschreiben über ihr als Durchmesser den Kreis: seine zu jenem parallele Halbsehne durch den Scheitel des Normalschnittbüschels gibt die Höhe, in welcher der Scheitel des rechtwinklig involutorischen Schnittes über oder unter dem betrachteten Normalschnitt liegt. Für α als den Winkel zwischen beiden Ebenen und σ als den halben stumpfen Winkel des symmetrischen Paares hat man $\cos \alpha = \operatorname{cotan} \sigma$. Man vergleiche die Konstruktionen beider Probleme für das nämliche σ miteinander und mit dieser Relation die von § (7).

15) Man konstruiere eine Involution von Strahlen aus den Doppelelementen; speziell eine involutorische Reihe aus einem Paare und dem Zentralpunkt; etc.

16) Zwei Involutionen in derselben Geraden oder um

denselben Punkt haben im allgemeinen ein gemeinschaftliches Paar von Elementen. Dasselbe ist nur dann nicht reell, wenn beide Involutionen Doppelelemente haben und diese sich trennen, nämlich wenn die Verbindungsgerade der Pole in einem Hilfskreis denselben nicht trifft. Man bestimme es, wenn die Doppelelemente der Involutionen gegeben sind; z. B. das gemeinsame Paar entsprechender Punkte (auf $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2$) und entsprechender Geraden (aus $s_1 s_2$) in zwei involutorischen Kollineationen $\mathfrak{C}_1, s_1$ und $\mathfrak{C}_2, s_2$. Wenn ein Doppelelement der ersten Involution mit einem der zweiten zusammenfällt, so ist in diesem auch das gemeinsame Paar vereinigt.

Man bestimme den Kegelschnitt, der durch vier gegebene Punkte geht und ein gegebenes Segment GH harmonisch teilt. Das Viereck der gegebenen Punkte bestimmt in GH die eine Involution, G und H sind die Doppelpunkte der andern; ihr gemeinsames Paar gehört dem Kegelschnitt an.

Man bestimme ein Elementenpaar, das zu zwei gegebenen Elementen desselben Trägers harmonisch konjugiert und zu einem dritten symmetrisch gelegen ist. Es gibt also insbesondere in einer Involution im allgemeinen ein Paar, welches mit zwei Elementen desselben Trägers (gleichviel ob Paar oder nicht) eine harmonische Gruppe bildet. Man findet sie im Falle des Büschels, wenn man dasselbe so wie jene Elemente auf einen Hilfskreis überträgt, mittelst der Sehne durch den Pol der Involution, die den Schnittpunkt der Tangenten des Hilfskreises für diese Elemente enthält. Sie sind also stets reell, wenn die Involution elliptisch ist, und für das Elementenpaar als Paar der Involution selbst nie reell, wenn sie hyperbolisch ist; sie sind dagegen für das Elementenpaar als nicht zur Involution gehörig reell, so lange es durch das Paar der Doppelelemente nicht getrennt wird.

Mit Hilfe dieses zu zwei Elementen desselben Trägers harmonischen Paares einer Involution löst man die Aufgabe, zwei involutorische Büschel durch eine Gerade so zu schneiden, bez. zwei involutorische Reihen aus einem Punkt so zu projizieren, daß die entsprechenden Involutionen identisch sind. Denn für zwei Büschel T, T' ist zunächst der Schnittpunkt der Strahlen x_1, y_1', die dem gemeinsamen Strahl xy' entsprechen, ein Punkt der zu suchenden Transversale; einen zweiten erhält man im Schnittpunkt zweier Strahlen von T, T', welche den zu xx_1, $y'y_1'$ bez. harmonischen Paaren von T, T' angehören; diese zwei Strahlenpaare bilden ein vollständiges Vierseit, dessen von TT' verschiedene Diagonalen die beiden Lagen der Transversalen liefern, welche sich in jenem Punkte $x_1 y'_1$ durchschneiden. Es ist eine Kombination der Linealkonstruktion mit der Benutzung des Hilfskreises.

Die Lösungen sind nur für elliptische Involutionen reell. Man führe sie für zwei gegebene involutorische Reihen aus.

17) Man konstruiere diejenigen Kegelschnitte von zwei Büscheln (§ 25; 2.) $ABCD$, $A^*B^*C^*D^*$, welche sich in der Geraden t ihrer Ebene durchschneiden; ebenso diejenigen Kegelschnitte zweier Schaaren (ibid.) $abcd$, $a^*b^*c^*d^*$, welche die nämlichen Tangenten aus einem Punkte T ihrer Ebene haben. Speziell im ersten Fall die Hyperbeln mit parallelen Asymptoten, etc.

18) Man konstruiere die Schnittpunkte einer Geraden g mit dem durch fünf Punkte $ABCDE$ bestimmten Kegelschnitt als gemeinsames Paar der durch die Vierecke $ABCD$ und $ABCE$ auf g bestimmten Involutionen. Der Schnittpunkt der Polaren beider Involutionen im berührenden Hilfskreis ist der Brianchonpunkt der projektivischen Tangentensysteme an demselben nach § 29, Figur auf S. 165; die Konstruktionen sind also identisch.

Man bestimme die Involution, deren Doppelelemente das gemeinsame Paar von zwei gegebenen vereinigten Involutionen bilden. Sie enthält die Doppelelementenpaare der gegebenen als Paare, ihr Pol im Hilfskegelschnitt ist der Pol der Verbindungsgeraden der Pole der gegebenen Involutionen, etc.

19) Alle Hyperbeln mit denselben Asymptoten bestimmen in einer beliebigen Geraden Punktepaare einer symmetrischen Involution, in welcher die Schnittpunkte mit den Asymptoten ein Paar bilden. Die Zentralprojektion der Figur liefert einen allgemeinen Satz, der auch direkt evident ist als Folge des Satzes über ein Büschel von Kegelschnitten, das eingeschriebene Viereck und eine Transversale in § 25, 2, 4., vergl. § 29, 7 und § 21.

Man erhält aus dem vorigen speziellen Satze die Konstruktion der Hyperbel aus den Asymptoten und einem ihrer Punkte in § 27, 4 Schluß wieder.

20) Man konstruiere zu zwei vereinigten projektivischen Gebilden erster Stufe, z. B. zu zwei Strahlenbüscheln, die Involution, welche dieselben Doppelelemente mit ihnen hat. Denken wir die Projektivität nach § 29 durch ein Paar x, x' und die Pascal-Linie p im Hilfskreis K gegeben, so ist offenbar diese zugleich die Polare der gesuchten Involution. Um aber zwei Paare dieser Involution zu ermitteln, betrachte man x' als y und konstruiere mittelst der Pascal-Linie p den Strahl y', also in analoger Bezeichnung zur Figur auf S. 163 mittelst der Geraden XY' und der Tangente $X'Y$ von K, die jene auf p in Z'' schneidet; man konstruiert zu $x'y$ den harmonisch konjugierten z in Bezug auf x und y', indem man von Z'' die zweite Tangente zu K zieht und ihren Berührungspunkt mit dem Scheitel T verbindet; endlich durch ZY' und $Z'Y$, die sich in p schneiden, den entsprechenden Strahl z'. Dann sind y, z' und y', z die gewünschten Paare der Involution, weil YZ', $Y'Z$ und YY, ZZ zwei Punkte ihrer Polare p sind. Man führe die Konstruktion für vereinigte projektivische Reihen durch, die durch die Gegenpunkte Q', R und

ein Paar A, A' gegeben sind. Man spezialisiere sie für X als R und Y' als Q', etc. Dies sind die wichtigsten speziellen Formen der Konstruktion. Die Konstruktion ist im allgemeinen unbestimmt, die Pascalsche Linie als Polare der Involution liefert durch ihren Pol im Hilfskreis den Pol der Involution, mit Hilfe dessen man sofort beliebige Paare und auch ihre symmetrisch harmonische Darstellung findet (§ 31, 5), etc.

32. Die Konstruktionen des § 30 für den Übergang vom Pol zur Polare und umgekehrt enthalten eine Reihe wichtiger Sätze für die *ebenen involutorisch kollinearen Systeme*. Wir erinnern zuerst

a) In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Viereck ist die gerade Verbindungslinie von zwei Diagonalpunkten (§ 16, 14) die Polare des dritten Diagonalpunktes in Bezug auf den Kegelschnitt.

In jedem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Vierseit ist der Durchschnittspunkt von zweien seiner Diagonalen (§ 16, 14.) der Pol der dritten Diagonale in Bezug auf den Kegelschnitt.

Man nennt die Diagonalpunkte ein *Tripel harmonischer Pole* in Bezug auf den Kegelschnitt.

Man nennt die Diagonalen ein *Tripel harmonischer Polaren* in Bezug auf den Kegelschnitt.

Die von solchen Tripeln gebildeten *Dreiecke* und *Dreiseite* heißen auch *sich selbst konjugiert in Bezug auf den Kegelschnitt*. Zwei Kegelschnitte mit vier reellen gemeinsamen Punkten oder Tangenten haben ein *gemeinsames Tripel* harmonischer Pole und Polaren.

b) Die Polaren aller Punkte einer Geraden p in Bezug auf einen Kegelschnitt gehen durch den Pol p dieser Geraden.

Die Pole aller Geraden aus einem Punkte P in Bezug auf einen Kegelschnitt liegen in der Polare p dieses Punktes.

Die Reihe der Pole in der Polare und das Büschel der entsprechenden Polaren aus dem Pol sind projektivisch; jene bestimmen mit dem Pol ein Büschel, dessen Strahlen denen des Büschels der Polaren projektivisch und involutorisch d. i. vertauschungsfähig entsprechen; diese bestimmen mit der Polare eine Reihe, deren Punkte den Polen projektivisch und involutorisch entsprechen d. h.:

c) Alle Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels ordnen sich

Alle Punkte einer geradlinigen Reihe ordnen sich in Be-

in Bezug auf einen festen Kegelschnitt seiner Ebene so in Paare, daß die eine Gerade jedes Paares den Pol der andern in Bezug auf denselben enthält.

Diese Paare bilden eine Involution, die Involution harmonischer Polaren um den betrachteten Punkt.

Sind a, a' zwei Tangenten mit entsprechenden Berührungspunkten, also aus einem Punkt von s, so gibt jedes andere Paar x, x' in den Verbindungslinien von ax, $a'x'$ und ax', $a'x$ zwei verkehrt aufeinander fallende Strahlen aus $\mathfrak{C}$, d. h. ein Paar der Involution.

Die Doppelstrahlen derselben sind die Tangenten des Kegelschnittes aus dem Punkte $\mathfrak{C}$.

zug auf einen festen Kegelschnitt ihrer Ebene so in Paare, daß der eine Punkt jedes Paares in der Polare des andern in Bezug auf denselben liegt.

Diese Paare bilden eine Involution, die Involution harmonischer Pole in der betrachteten Geraden.

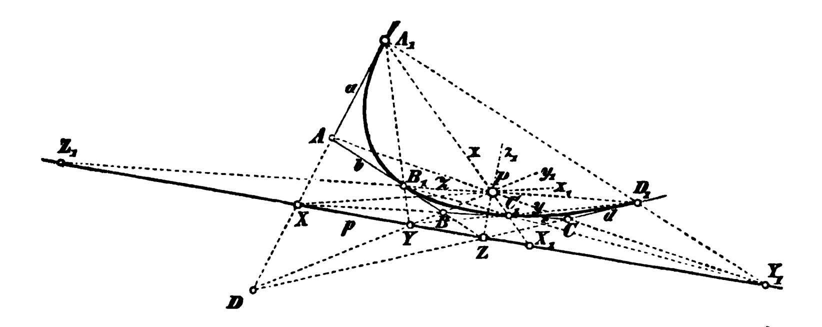
Sind A, A' zwei Punkte mit entsprechenden Tangenten, also auf einem Strahl aus $\mathfrak{C}$, so gibt jedes andere Paar X, X' in den Schnittpunkten von AX, $A'X'$ und AX', $A'X$ zwei verkehrt aufeinander fallende Punkte in s, d. h. ein Paar der Involution.

Die Doppelpunkte derselben sind die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der Geraden s.

Die Involution harmonischer Polaren um einen Punkt und die Involution harmonischer Pole auf der Polare dieses Punktes sind perspektivisch, d. h. die Strahlen eines Paares aus dem Pol enthalten die (nicht entsprechenden) Punkte des zugehörigen Paares in der Polare.

Diese wichtigen Sätze lassen sich auch direkt aus der Erzeugung der Kegelschnitte durch projektivische Gebilde erster Stufe ableiten. Denn nach § 20, 13 f. bestimmt jeder Punkt mit zwei projektivischen Reihen, deren perspektivische Achse ihn enthält, projektivische Büschel in Involution, und jede Gerade schneidet aus zwei projektivischen Büscheln, deren perspektivisches Zentrum auf ihr liegt, zwei projektivische Reihen in Involution. Wir verbinden hier nur diese Bemerkung mit der Betrachtung des aus den projektivischen Reihen bez. Büscheln erzeugten Kegelschnittes. Wenn man also durch den Punkt P eine Gerade zieht, die den Kegelschnitt zweimal schneidet (Figur S. 187) und aus demselben Punkte die ihn erzeugenden projektivischen Reihen in den Tan-

genten der Schnittpunkte projiziert, so entsteht hierdurch ein involutorisches Büschel; und wenn P außerhalb des Kegelschnittes liegt, so ist die Unabhängigkeit dieser Involution von der Wahl der Transversale aus P schon durch die harmonische Relation ihrer Paare zu den Tangenten aus P evident. Ebenso für die Involution in der Geraden p, falls diese den Kegelschnitt schneidet; man wählt auf ihr einen Punkt von welchem aus zwei Tangenten an den Kegelschnitt gehen und denkt den Kegelschnitt durch die Strahlenbüschel erzeugt, die die Berührungspunkte derselben zu Scheiteln haben; jedes Paar entsprechender Strahlen derselben bestimmt in p ein Paar der Involution und nach der harmonischen Trennung jedes Paares durch die Schnittpunkte von p mit dem Kegelschnitt ist die Involution von der



Wahl des Anfangspunktes der Konstruktion in p unabhängig. Demnach sind dies die Involutionen harmonischer Polaren aus P und harmonischer Pole auf p.

Diese Unabhängigkeit beweist man aber auch im andern Falle, dem Falle nicht reeller Doppelelemente, sehr einfach; z. B. für den innerhalb des Kegelschnittes liegenden Pol P wie folgt. Zieht man (obenstehende Figur) durch P zwei Gerade, die den Kegelschnitt in A_1, C_1 und in B_1, D_1 bez. schneiden, und bezeichnet man die Schnittpunkte von A_1B_1, C_1D_1 mit Y, von A_1D_1, B_1C_1 mit Y_1, die Schnittpunkte der entsprechenden Tangentenpaare a, c und b, d bez. durch X und Z, so liegen diese vier Punkte X, Z, Y, Y_1 in einer Geraden p. (§ 27, 2.) Bezeichnet man die Ecken des Vierseits der Tangenten $abcd$ aber durch A, B, C, D, so ist unter Benutzung der Transversale A_1C_1 die Involution durch die Paare PA_1C_1, PX oder

x, x_1 und PAC, PBD oder y, y_1 bestimmt; für B_1D_1 aber durch PB_1D_1 und PZ oder z, z_1 und y, y_1.

Aber diese Paare gehören zur nämlichen Involution. Denn im eingeschriebenen Viereck $A_1B_1C_1D_1$ ist PYY_1 das Dreieck der Diagonalpunkte und am Scheitel P folglich $(xzyy_1) = -1$. Zugleich ist im umgeschriebenen Vierseit $abcd$ das Diagonaldreiseit pyy_1 und man erhält somit wegen

$$(XZYY_1) = -1 \quad \text{auch} \quad (x_1z_1y_1y) = -1 = (xzyy_1),$$

d. h. die drei Paare x, x_1; y, y_1; z, z_1 gehören zur nämlichen Involution. Geht man aber in derselben Figur von den Punkten X und Z in p aus, so werden für X_1 und Z_1 als Schnitte von p mit A_1C_1 und B_1D_1 X, X_1 und Y, Y_1 Paare der ersten und Z, Z_1; Y, Y_1 solche der zweiten Involution, d. h. die Involution harmonischer Pole in p ist perspektivisch zur Involution harmonischer Polaren um P. Auch sind P und p in allen Strahlen aus P durch die Punkte und an allen Punkten von p durch die Tangenten des Kegelschnittes harmonisch getrennt; kurz, P ist der Pol der Involution von Punkten und p die Polare der zugehörigen Involution von Tangenten im Kegelschnitt. Die Geraden vom Paare Y_1, Y nach einem Punkte D_1 des Kegelschnittes schneiden ihn noch in Punkten A_1, C_1 einer durch P gehenden Sehne. Die Punkte im Paare y, y_1 auf einer Tangente d des Kegelschnittes liegen noch in Tangenten a, c desselben aus einem Punkte in p. Oder mit einem Tripel harmonischer Pole bestimmt jeder Punkt des Kegelschnittes drei ihm eingeschriebene Dreiecke, deren Seiten durch jene gehen; sie haben paarweise noch eine Ecke gemein und bilden zusammen ein eingeschriebenes Viereck mit jenem Tripel als dem der Diagonalpunkte. Und mit einem Tripel harmonischer Polaren bestimmt jede Tangente des Kegelschnittes drei ihm umgeschriebene Dreiseite, deren Ecken in jenen liegen, die paarweis eine Seite gemein haben und zusammen ein umgeschriebenes Vierseit mit dem Tripel als dem der Diagonalen bilden. Für identische Tripel und Punkt und Tangente als zusammengehörig gehören auch jenes Viereck und dieses Vierseit zusammen.

Aber schließlich ist dies alles schon in den Entwicklungen von § 20, 14 enthalten. Dort ist zum Träger p_i der involutorischen Reihe der Punkt P_i (Figur auf S. 100) als der vierte

harmonische zu X in Bezug auf T und T' hinzugetreten als gemeinsamer Schnittpunkt der Geraden UU^*; fügt man aber in der Figur die Schnittpunkte der Strahlenpaare $TY, T'Y_1$ — $TY_1, T'Y$, ferner $TZ, T'Z_1$ — $TZ_1, T'Z$ etc. hinzu, also die Punktepaare des durch die projektivischen Büschel T, T' über der Involution p_i entstehenden Kegelschnittes, der in T von p und in T' von o' berührt wird, so sieht man, daß die Verbindungsgeraden aller solcher Punktepaare durch denselben vierten harmonischen Punkt P_i gehen müssen. Man erkennt ferner aus der Konstruktion, daß die Geraden P_iY, P_iY_1 — P_iZ, P_iZ_1 ebenso wie P_iX und P_iX_1 die Polaren der Punkte der Involution in p_i sind, nämlich bez. von Y_1, Y — Z_1, Z wie von X_1, X; daß sie also das Büschel der harmonischen Polaren y_1, y — z_1, z — x_1, x bilden, welches zu der vom Kegelschnitt erzeugten Involution harmonischer Pole in p_i perspektivisch ist.

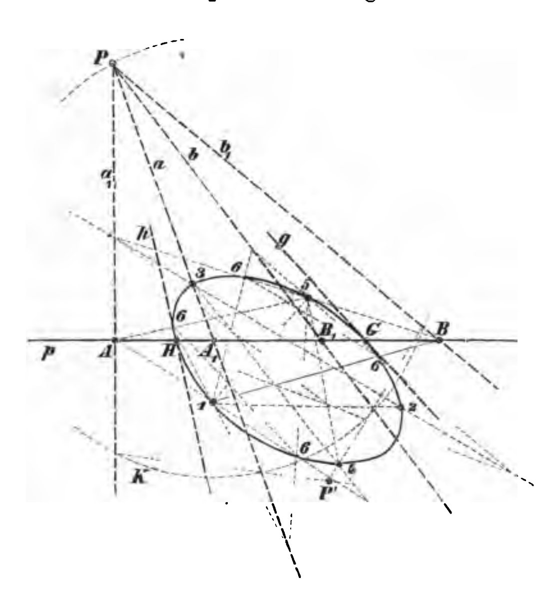
Und dual dazu a. a. O. in Figur auf S. 101 trat zum Träger P_i des involutorischen Strahlbüschels als vierter harmonischer Strahl zu x in Bezug auf t, t' eine Gerade p_i, zunächst als Ort der Punkte u, u^*; fügt man aber der Figur die Geraden $ty, t'y_1$ — $ty_1, t'y$; $tz, t'z_1$ — $tz_1, t'z$ etc. hinzu, also die Tangentenpaare des Kegelschnittes, der durch die projektivischen Reihen in t und t' aus der Involution um P_i entsteht, also in t den Berührungspunkt P und in t' den Berührungspunkt O' hat, so sieht man wie dort, daß die Schnittpunkte aller solcher Paare auch in p_i liegen müssen; endlich auch, daß die Punkte p_iy, p_iy_1 — p_iz, p_iz_1 wie p_ix und p_ix_1 die Pole der Strahlen von P_i in Bezug auf den Kegelschnitt sind, nämlich bez. von y_1, y — z_1, z — x_1, x.

Mit der Involution harmonischer Pole in p_i entspringt von selbst die für den erzeugten Kegelschnitt zugehörige Involution harmonischer Polaren und umgekehrt; aber zugleich vereinigen sich beide Konstruktionen zur **schnellsten und genauesten Konstruktion eines Kegelschnittes**, wenn wir ihn gleichzeitig aus der Involution p_i und richtig gewählten Büschelscheiteln T, T' durch seine Punktepaare und aus der Involution um P_i mit den zugehörigen Tangenten t, t' durch seine dazu perspektivischen Tangentenpaare konstruieren; denn dann werden die Tangentenpaare a, a' etc. zu den Tangenten in den Punkte-

paaren A, A'. Siehe B. 13 mit seiner Figur. Die B. 14 f. geben weitere Anwendungen.

Alle in den Beispielen — B. 5 bis 8 ausgenommen — behandelten Konstruktionen sind projektivisch, d. h. ihre Ausführung in der Projektion liefert die Projektion der Durchführung am Original und umgekehrt.

B. 1) Man konstruiere die Involution harmonischer Pole auf einer Geraden p und die der harmonischen Polaren um ihren Pol P für einen Kegelschnitt, der durch fünf Punkte bestimmt ist; speziell das Rechtwinkelpaar der letztgenannten Involution.



Man hat von zwei Punkten A, B der Geraden die Polaren a, b zu ermitteln (§ 30; 2). Die Konstruktion in nebenstehender Figur ist zu erklären. (Vergl. Figur S. 174 unten.)

Man bestimme den Zentralpunkt M der ersten Involution — mittelst der Polare der Richtung der Geraden.

Wäre der Kegelschnitt durch fünf Tangenten bestimmt, so ermittelt man zu einer von ihnen zunächst die neue Tangente, die ihr auf p begegnet und verbindet die Berührungspunkte T_1, T_2 von beiden durch den Strahl $o_1 p_2$ — also die Tangenten selbst p_1, o_2 bez.; dann liefert der Berührungspunkt jeder andern Tangente Strahlen aus T_1, T_2, welche in p Paare der Involution ausschneiden. Und dual.

Man erörtere die Bestimmung der Polinvolution auf einer beliebigen Geraden p für den Kegelschnitt aus zwei perspektivischen Strahlbüscheln T_1, T_2 mit der Perspektivachse s; ebenso die der Polarinvolution aus einem Punkte P für den aus zwei perspektivischen Punktreihen t_1, t_2 mit dem Perspektivzentrum S — und erläutere beides, dort auch die Doppelpunkte, hier die Doppelstrahlen und bez. den Pol von p und seiner Involution, die Polare von P und ihre Involution.

2) Man finde die Schnittpunkte des durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnittes mit einer Geraden p als Doppelpunkte der ihr angehörigen Involution harmonischer Pole; ebenso die Tangenten aus einem Punkte P an denselben (Figur auf S. 190). (Vergl. § 31, 18.)

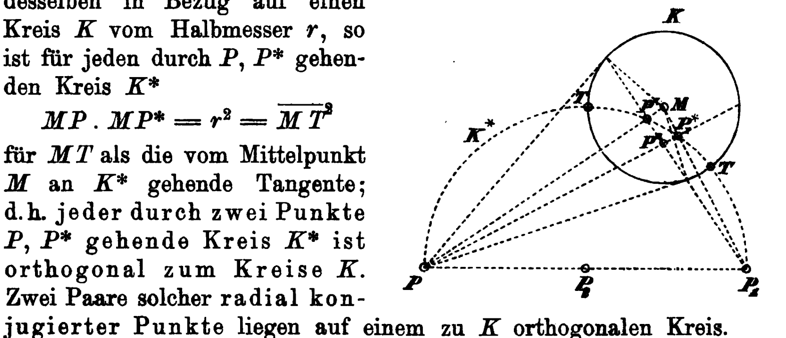
3) Denkt man in Figur auf S. 187 bei festgehaltenen B_1, C_1, D_1 den Punkt A_1 auf dem Kegelschnitt bewegt (oder bei festen b, c, d die Tangente a), so rückt P in $B_1 D_1$ nach $P' \ldots$, A in b nach $A' \ldots$ und D in d nach $D' \ldots$ und die Reihen A und D sind Projektionen der Reihe P von C bez. B aus; d. h. man hat den Identitätsbeweis von § 28, 10 wieder

$$(C_1 . A_1 A_1' A_1'' \ldots) = (PP'P'' \ldots) = (AA'A'' \ldots) = (DD'D'' \ldots)$$

4) Die projektivischen Büschel von (den Asymptoten) parallelen Strahlen, welche eine Hyperbel erzeugen, werden durch jede Gerade aus dem Zentrum in einer Involution harmonischer Pole geschnitten, die dasselbe zum Zentralpunkt hat.

5) Man erläutere die Konstruktion von Pol und Polare für den Kreis und den Satz, daß die Polare zum Durchmesser des Pols rechtwinklig ist, vom Standpunkte der involutorischen Zentralkollineation. Das Rechteck aus den Abständen des Pols und der Polare vom Zentrum ist dem Quadrat des Halbmessers gleich. § 16, 12.)

6) Nennen wir P^* (nachstehende Figur) den Schnittpunkt des nach einem Punkte P gehenden Durchmessers PM mit der Polare desselben in Bezug auf einen Kreis K vom Halbmesser r, so ist für jeden durch P, P^* gehenden Kreis K^*



$$MP . MP^* = r^2 = \overline{MT}^2$$

für MT als die vom Mittelpunkt M an K^* gehende Tangente; d. h. jeder durch zwei Punkte P, P^* gehende Kreis K^* ist orthogonal zum Kreise K. Zwei Paare solcher radial konjugierter Punkte liegen auf einem zu K orthogonalen Kreis.

7) Sind dann P und P_1 zwei in Bezug auf den Kreis K konjugierte Punkte und entsprechen ihnen P^*, P_1^* in der angegebenen Art, so ist $P_1 P^*$ die Polare von P und PP_1^* die Polare von P_1, also ihr Schnittpunkt P' der Pol von PP_1. Ein über PP_1 als Durchmesser beschriebener Kreis K^* geht durch P^* und P_1^*, weil $\angle PP^*P_1 = \angle PP_1^*P_1 = 90^0$ ist, und schneidet K rechtwinklig, weil er durch P, P^* oder auch weil er durch P_1, P_1^* geht. Und wenn umgekehrt ein Kreis K^* einen gegebenen Kreis K rechtwinklig schneidet, so sind die Endpunkte P, P_1 jedes

Durchmessers desselben konjugiert in Bezug auf K. Denn für P^*, P_1^* als Schnittpunkte desselben mit PM, P_1M sind P^*P_1, P_1, P die Polaren von P resp. P_1 in Bezug auf K. Man sieht, daß die Punkte P, P_1 in Bezug auf den Kreis K konjugiert bleiben, wenn man die Strecke PP_1 um ihren Mittelpunkt P_2 dreht; daß mit der Distanz von zwei in Bezug auf einen Kreis konjugierten Punkten auch der Abstand ihres Mittelpunktes vom Zentrum desselben bestimmt ist und umgekehrt; daß für einen Kreis K^*, der zu mehreren Kreisen K, K', K'', ... zugleich orthogonal ist, die Endpunkte eines Durchmessers in Bezug auf alle diese Kreise zugleich konjugiert sind. Infolgedessen gehen (§ 15) die zu einem Kreise K orthogonalen Kreise, deren Zentra in einer festen Geraden g liegen, durch zwei feste Punkte in dem zu g senkrechten Durchmesser. Das letzte sagt auch, daß der Orthogonalkreis K^* zu drei Kreisen K, K', K'' der Ort solcher Punktepaare ist, von denen jeder Punkt dem andern in Bezug auf K, K', K'' zugleich konjugiert ist, und daß diese Paare die Endpunktepaare seiner Durchmesser sind. Vergl. die §§ (35^b), (35^d), wo eine ganz andere Entwicklung zu diesen Ergebnissen führt und sie in den Zusammenhang einer Geometrie der Kreissysteme stellt.

8) Durch einen Punkt P, einen Kreis K und eine Gerade g ist ein Kreis K^* bestimmt, der den ersten enthält, zum zweiten orthogonal ist und seinen Mittelpunkt in der dritten hat; denn derselbe geht auch durch P^*, den Schnittpunkt der Polare von P mit dem nach P gehenden Durchmesser; die zu PP^* normale Halbierende schneidet g in seinem Mittelpunkt. Oder auch, weil er außer P die zwei vorerwähnten festen Punkte in dem zu g normalen Durchmesser enthält, welche man leicht ermittelt. Vergl. § 33, 14.

9) Wenn zwei Kegelschnitte durch vier Punkte A, B, C, D gehen und eine Tangente t berühren, so haben sie noch drei andere reelle Tangenten gemein; wenn t die Seiten des gemeinsamen Tripels EFG oder AB, CD; BC, AD; CA, BD in E_1, F_1, G_1 resp. schneidet, so bilden jene die Verbindungslinien von E_2, F_2, G_2, wenn

$$(EFG_1G_2) = (FGE_1E_2) = (GEF_1F_2) = -1$$

ist. Wenn GG_1, EE_1, FF_1 sich in F^*, G^*, E^* schneiden, so liefern also auch EE^*, FF^*, GG^*, mit FG, GE, EF geschnitten die Punkte E_2, F_2, G_2. Wie lautet der entsprechende Satz für zwei Kegelschnitte mit vier gemeinsamen Tangenten?

10) Die Polare zu einem Punkte des Kegelschnittes ist die Tangente desselben in ihm und der Pol einer Tangente ist ihr Berührungspunkt. Die Reihe der Punkte A, B, C, ... in der Tangente t und das Büschel der ihnen entsprechenden Polaren a, b, c, ... sind projektivisch, oder das Doppelverhältnis von vier Punkten eines Kegelschnittes ist dem der entsprechenden Tangenten desselben gleich. Vergl. § 24, S. 139.

Die Involution harmonischer Pole in der Tangente t ist parabolisch (§ 21), die entsprechenden A_1, B_1, ... aller Punkte A, B, ... sind im Berührungspunkte T vereinigt. Ebenso ist die Involution harmonischer Polaren aus einem Punkte des Kegelschnittes parabolisch. Es teilen sich also nach der Natur der zugehörigen Involutionen die Geraden resp. die Punkte in der Ebene eines Kegelschnittes in drei Gruppen; die Punkte speziell nennt man innerhalb, außerhalb des Kegelschnittes und auf demselben liegend, je nachdem ihre Polarinvolutionen elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch sind. Man darf dieselbe Ausdrucksweise auf die Geraden anwenden.

11) Durch ein sich selbst konjugiertes Dreieck und zwei Punkte bez. zwei Tangenten eines Kegelschnittes ist derselbe bestimmt. Denn man konstruiert zu den zwei gegebenen Elementen des Kegelschnittes sechs neue als ihre entsprechenden in den drei involutorischen Zentralkollineationen, die durch je eine Ecke des Dreiecks und die gegenüberliegende Seite desselben als Zentrum und Achse bestimmt sind. Erhält man dabei für die Zentra P_1, P_2, P_3 aus A, B die bez. Punktepaare A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3, so entsprechen einander aus denselben Zentren und für dieselben bez. Achsen auch die Paare B_2, B_3; A_2, A_3; sodann B_3, B_1 und A_3, A_1 und endlich B_1, B_2 und A_1, A_2; analog im Falle der gegebenen Tangenten. Die Punkte A_1, A_2, A_3 bilden also mit A ein Viereck, für welches $P_1P_2P_3$ das Dreieck der Diagonalpunkte ist, etc. Die acht Ecken von zwei solchen Vierecken liegen immer auf einem Kegelschnitt. Ein sich selbst konjugiertes Dreieck und ein Punkt mit der zugehörigen Tangente liefern dieselbe Bestimmung.

12) Wenn für einen Kegelschnitt ein sich selbst konjugiertes Dreieck XYZ und ein Pol P mit seiner Polare p gegeben ist, so wird der Kegelschnitt ebenfalls durch acht Elemente im allgemeinen bestimmt. Denn in der Geraden YZ sind die Punkte Y, Z ein erstes Paar und ihre Schnittpunkte mit den Geraden XP und p ein zweites Paar der durch den Kegelschnitt in ihr bestimmten Involution harmonischer Pole; die Doppelpunkte derselben sind zwei Punkte des Kegelschnittes und ihre Verbindungslinien mit der Gegenecke X die zugehörigen Tangenten derselben. Man erhält auf einer zweiten Seite des Dreiecks wiederum durch die Doppelpunkte und die Doppelstrahlen der Involution Elemente des Kegelschnittes, und erkennt leicht, daß für einen reellen Kegelschnitt dieselben in zwei Seiten und an ihren Gegenecken reell sein müssen, dagegen in und an der dritten nicht reell sein können.

Man erhält offenbar die Polarinvolution um P durch die Strahlenpaare von P nach X und von P nach p, YZ; von P nach Y und nach p, ZX, eventuell von P nach Z und nach p, XY ohne Gebrauch des Kegelschnitts. Das Polarsystem vertritt ihn. Man kann aber, auch ohne den Kegelschnitt zu zeichnen, zu jedem Punkt A der Ebene seine Polare a und umgekehrt bestimmen; denn

die Geraden XA und YA liefern durch die entsprechenden zu ihren Schnittpunkten mit YZ, ZX bez. zwei Punkte von a.

Liegt P im Innern des Dreiecks XYZ und tritt p gar nicht in dies Innere ein, so sind die Polinvolutionen an allen drei Seiten elliptisch und der Kegelschnitt kann nicht reell sein. Das Polarsystem vertritt also jetzt einen Kegelschnitt ohne reelle Peripherieelemente. Die Konstruktion des Pols A zur gegebenen Polare a geschieht mit denselben Mitteln.

Auch der nicht reelle durch ein Polarsystem definierte Kegelschnitt hat also einen reellen Mittelpunkt; ferner offenbar eine zugehörige Polarinvolution, Involution konjugierter Durchmesser; also auch reelle Achsen, nur keine Asymptoten, weil diese Peripherieelemente sind; er ist als Ellipse zu bezeichnen.

13) Ein Pol P, seine Polare p, die Involution harmonischer Polaren um jenen oder harmonischer Pole auf dieser und ein Punkt T, bez. eine Tangente t des Kegelschnittes bestimmen denselben. Man entwickele die Konstruktion: Ist T_1'' der Schnitt von TP mit p, so bestimmt man den vierten harmonischen Punkt T' zu T in Bezug auf P, T_1'', und dieser gehört dem Kegelschnitt an. Dem Punkte T_1'' entspricht in der Involution der Punkt T'', der das perspektivische Zentrum der den Kegelschnitt erzeugenden Büschel T, T' ist und sich daher aus den bekannten Paaren derselben ergibt.

Die Punkte T, T' liefern mit jedem neuen Paare Z, Z_1 der Involution in p durch TZ, $T'Z_1$; TZ_1, $T'Z$ zwei Punkte des Kegelschnittes, die auf einer durch P gehenden Geraden liegen; ganz so wie in der Figur S. 195 aus X, X_1 durch die Geraden TX, $T'X_1$ der Punkt A und durch TX_1, $T'X$ der Punkt A' (in AP) gefunden ist.

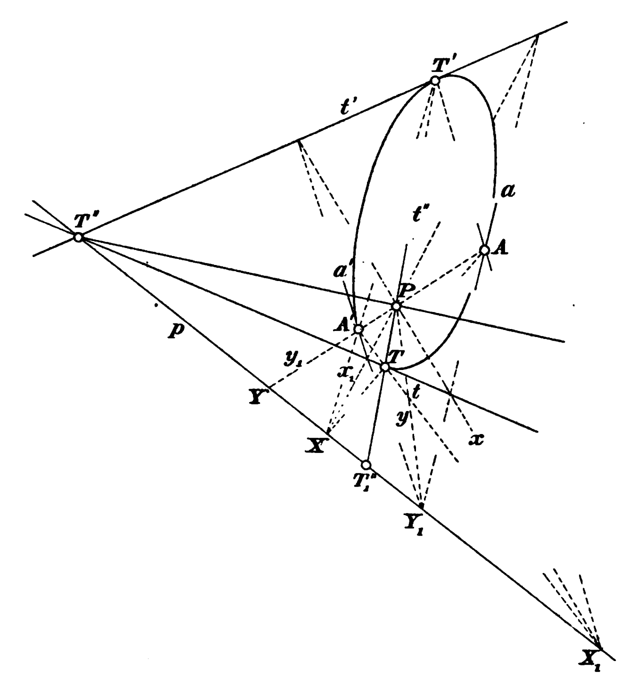
Zur Tangente t konstruiert man zuerst die zweite Tangente t' aus ihrem Schnittpunkt mit p, als vierte harmonische Gerade zu t in Bezug auf p und den nach dem Pol gehenden Strahl $T''P$. Ist dann z, z_1 ein Paar der Polarinvolution um P, so ist das Linienpaar tz, $t'z_1$; tz_1, $t'z$ ein neues Tangentenpaar des Kegelschnittes, das sich auf p schneidet, wie tx, $t'x_1$; tx_1, $t'x$ in der Figur die Tangenten bez. a in A und a' in A' liefern, die sich auf p treffen. Hat man zu T und T' mittelst des entsprechenden Strahles in der Polarinvolution die Tangenten t, t' konstruiert, so erhält man auch weiterhin immer Punkte- und Tangentenpaare zugleich.

Man bemerkt, daß der Schnitt von a, a' in p der Pol von AA' (durch P) ist und daß somit jener als Y_1 mit dem Schnittpunkt Y von AA' in p ein Paar in der Polinvolution auf p bildet, zu dem in der Polarinvolution um P die Strahlen y_1 und y gehören. Die Konstruktion setzt sich also von selbst fort — jedes neue Punktepaar des Kegelschnittes liefert durch seinen Polstrahl und den Schnitt seiner Tangenten in der Polare ein neues Paar in beiden Involutionen.

Doch ist diese Selbstfortsetzung, als Mittel für die Konstruktion des Kegelschnittes betrachtet, nicht immer von Vorteil; wählt man Z in p so, daß TZ, $T'Z$ Punkte in erwünschter Lage auf dem Kegelschnitt liefern, so findet man dieselben mittelst der Linealkonstruktion von Z_1.

Die Parabel ist durch einen Pol, seine Polare und die zugehörige Involution allein bestimmt.

Läßt man den Punkt T oder die Tangente t variieren, so erhält man ein Büschel von Kegelschnitten, das zugleich eine Schaar ist, nämlich mit reeller oder nicht reeller doppelter



Berührung — in den Doppelpunkten der Polinvolution auf p mit den von ihnen nach T gehenden Strahlen als Tangenten.

Durch jeden Punkt der Ebene wie an jede Gerade derselben geht ein Kegelschnitt dieses Systems.

In der Aufg. 6 des § 30 bilden die Pole P_1 und P_4, P_2 und P_5 in der Geraden p_3 zwei Paare der zugehörigen Involution harmonischer Pole; die damit bestimmten Doppelpunkte derselben sind zwei Punkte des Kegelschnittes, sowie ihre Verbindungslinien mit dem Pol P_3 die zugehörigen Tangenten derselben. Auch wenn sie nicht reell wären, kann man die genannte Aufgabe als Konstruktion aus Pol, Polare und zugehöriger Involution mit einem Punkt resp. einer Tangente behandeln.

14) Durch drei Punkte A, B, C und die Involution harmonischer Pole in einer Geraden p ist ein Kegelschnitt bestimmt. Seien X und Y die Punkte von p, welche den Geraden AB, BC angehören und X_1, Y_1 ihre entsprechenden in der Involution, sowie X' und Y' ihre harmonisch konjugierten in Bezug auf A, B und bez. B, C, so ist der Schnittpunkt von $X'X_1$ mit $Y'Y_1$ der Pol P von p; man erhält somit durch CY_1 und AX_1 den Punkt B' des Kegelschnittes, der mit B auf einer Geraden durch den Pol liegt. Damit aber findet man durch BZ, $B'Z_1$ und BZ_1, $B'Z$ stets Punkte des Kegelschnittes in einer durch P gehenden Geraden. Um aber auch ihre Tangenten immer mit zu erhalten, wird man zu dem Schnitt der Geraden BB' in p den in der Involution entsprechenden Punkt konstruieren, nach welchem die zu B, B' gehörigen Tangenten b, b' gehen, welche dann alle folgenden Paare durch die zugehörigen Paare der Involution bei P bestimmen wie in 13). Ein Beispiel ist die Hyperbel von gegebenen Asymptotenrichtungen durch einen Punkt und mit vorgeschriebener Polinvolution in einer Geraden.

Man zeige, wie die Konstruktion des Kreises durch drei Punkte A, B, C hiervon ein Spezialfall ist: Man kennt die Polinvolution der rechtwinkligen Richtungen auf der unendlich fernen Geraden. Dabei folgt, daß sich die halbierenden Perpendikel von AB, BC, CA in einem Punkte schneiden.

Durch drei Tangenten a, b, c und die Involution harmonischer Polaren um einen Punkt P ist ein Kegelschnitt bestimmt. Die Konstruktion entspricht der vorigen nach dem Prinzip der Dualität (Überblick S. 130 f.): Seien x und y die Strahlen aus P, welche die Punkte ab, bc enthalten und x_1, y_1 ihre entsprechenden in der Polarinvolution, ferner x' und y' ihre harmonisch konjugierten in Bezug auf die Paare ab und bc bez., so ist die Verbindungslinie von $x'x_1$ mit $y'y_1$ die Polare p von P; man erhält durch cy_1 und ax_1 die Tangente b' des Kegelschnittes, die sich mit b auf der Polare p schneidet (ebenso natürlich a' aus bx_1, $b'x$ und c' aus by_1, $b'y$), und damit aus bz, $b'z_1$ und bz_1, $b'z$; etc. Tangenten des Kegelschnittes aus einem Punkte von p. Durch die Ermittelung der Berührungspunkte B, B' der Tangenten b, b' sorgt man mittelst der zugehörigen Paare der Polinvolution für die aller folgenden Tangentenpaare.

Die Konstruktionen eines Kegelschnittes aus vier Punkten und einem Paar harmonischer Pole, bez. aus vier Tangenten und einem Paar harmonischer Polaren, kommen nach den Sätzen des § 25 auf die Bestimmung des gemeinsamen Paares von zwei vereinigten Involutionen zurück, deren eine durch das Viereck resp. Vierseit der gegebenen Punkte resp. Tangenten geliefert wird, während das gegebene Paar die Doppelelemente der andern bildet; wenn das gemeinsame Paar nicht reell ist, so ist doch immer die Involution

harmonischer Pole bez. Polaren bestimmt, die es mit dem gegebenen Paar bildet, und der Kegelschnitt kann wie vorher konstruiert werden.

15) Durch einen Punkt A und die Involutionen harmonischer Pole in zwei Geraden p, p' ist ein Kegelschnitt bestimmt. Ist X, Y' im Schnittpunkt beider Geraden und sind X_1, Y_1' die ihm entsprechenden in beiden Involutionen, so ist $X_1 Y_1'$ die Polare desselben und die Pole P, P' beider Geraden liegen in ihr. Wären dann B und B' die Schnittpunkte derselben mit dem Kegelschnitt, so geben die Strahlen AB und AB' sowohl in p als in p' ein Paar der bezüglichen Involution harmonischer Pole, und man findet somit AB, AB' als das gemeinsame Paar der beiden involutorischen Büschel, welche aus A über den Involutionen in p und p' stehen. Dann sind XB, XB' die Tangenten des Kegelschnittes in B und B', etc.

Man konstruiere den Kreis durch einen Punkt, der in einer Geraden p eine gegebene elliptische Polinvolution hat.

Die Bestimmung eines Kegelschnittes aus einer Tangente a und den Involutionen harmonischer Polaren für zwei Punkte P, P' geschieht durch die nach dem Prinzip der Dualität entsprechende Konstruktion: Sind xy' im Verbindungsstrahl beider Punkte und entsprechen ihnen x_1 und y_1' in beiden Polarinvolutionen, so ist $x_1 y_1'$ der Pol von jenem Scheitelstrahl. Die Tangenten b, b' von ihm an den Kegelschnitt schneiden in a das gemeinsame Paar der Involutionen aus, in welchen diese Tangente von beiden Polarinvolutionen geschnitten wird, und sind dadurch bestimmt; xb, xb' sind die zugehörigen Berührungspunkte; etc. Man konstruiere die Parabel aus den durch sie in zwei Punkten bestimmten Involutionen harmonischer Polaren.

16) Aus 14) erhellt die Konstruktion von Kegelschnitten durch vier Punkte, von denen zwei nicht reell und als Doppelpunkte einer Involution bestimmt sind; aus 15) die Konstruktion der Kegelschnitte durch zwei Paare nicht reeller Punkte. Die zu K orthogonalen Kreise aus Punkten von g in 8) bilden ein Büschel der ersten Art, falls K von g nicht geschnitten wird; ein Büschel der letzten Art im Falle des Schneidens. Im Falle der Berührung haben wir die Übergangsform zwischen jenem und diesem auch im Büschel der Kreise.

In allen Fällen wird ein Kegelschnitt des durch vier Punkte gehenden Büschels durch einen Punkt bestimmt und ein Kegelschnitt der an vier Tangenten gehenden Schaar durch eine Tangente.

Auf der beigegebenen Tafel I sind diese Haupttypen der Kegelschnittbüschel und bez. Kegelschnittschaaren dargestellt; wir verweisen auf die Beschreibung dieser Tafel im Verzeichnis der Figuren.

17) Die Involutionskonstruktionen lassen sich auch leicht den Bestimmungen durch reelle Peripherieelemente anpassen, weil die Involution harmonischer Pole in der Geraden zwischen zwei Punkten durch diese als Doppelpunkte und die Involution harmonischer Polaren am Schnittpunkt von zwei Tangenten durch diese als Doppelstrahlen bestimmt ist.

Wenn die Punkte G, H, T und die Tangenten g, h in den zwei ersten mit dem Schnittpunkt P gegeben sind, so wird man auf PT zu T den vierten harmonischen Punkt T_1 in Bezug auf P und U in GH, und sodann zu U den vierten harmonischen U^* in Bezug auf G und H verzeichnen, um als TU^* und T_1U^* die Tangenten t, t_1 in T, T_1 zu erhalten; dann liefert jedes neue Paar harmonisch zu G, H gelegener Punkte V, V^* zwei neue Punkte des Kegelschnittes auf einem Strahl durch den Pol P und ihre Tangenten durch seinen Pol in GH — welche wieder ein neues Paar der Involutionen liefern. Man kann aber auch PT als Polare und G, H bez. g, h als Träger der erzeugenden Büschel oder Reihen benutzen. Dual aber wesentlich identisch für drei Tangenten g, h, t mit den Berührungspunkten G, H der zwei ersten.

18) Vier Punkte und die Tangente des einen oder vier Tangenten und der Berührungspunkt der einen liefern durch die übrigen Tangenten bez. Berührungspunkte sofort die sechsfache Möglichkeit der vorigen Konstruktion.

Fünf Punkte bez. fünf Tangenten geben durch ein Paar als Doppelelemente einer Involution und drei einzelne in zehn Arten die Möglichkeit, nach B. 14) oben aus einer hyperbolischen Involution und drei gleichartigen Peripherieelementen den Kegelschnitt zu konstruieren.

Und sie führen durch die Teilung in zwei Paare und eins in fünfzehn Arten zur Konstruktion aus zwei hyperbolischen Involutionen und einem gleichartigen Peripherieelement. (B. 15.)

Damit sind die Vorteile der Involutionskonstruktion in Bezug auf Schnelligkeit und Genauigkeit auch für diese Konstruktionen gewonnen. Es bleibt dem Leser überlassen, dies auf die Spezialfälle der folgenden Paragraphen anzuwenden.

Selbstverständlich ist, daß die Ausführung aller dieser Konstruktionen an der Projektion den Vollzug derselben am Original darstellt.

19) Die Involution harmonischer Polaren aus dem Centrum $\mathfrak{C}$ und die der harmonischen Pole auf der Achse der Kollineation s sind zwei Kegelschnitten K, K' gemein, von denen der eine in der bezüglichen zentrischen Kollineation dem andern entspricht. Dies Verhalten ist von der Realität der Doppelelemente jener Involutionen, d. h. von der Existenz gemeinschaftlicher Tangenten aus $\mathfrak{C}$ und gemeinschaftlicher Punkte auf s, unabhängig. Die sechs Zentra und die sechs Achsen der Kollineation zwischen zwei Kegelschnitten sind

also Träger identischer Polar- resp. Polinvolutionen für beide. (Siehe die Ausführung in Bd. III dieses Werkes.)

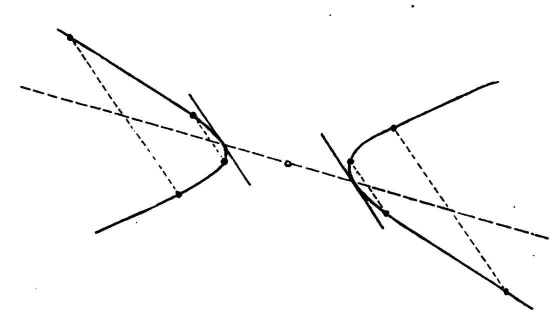
20) Geht von zwei zueinander zentrisch kollinearen Kegelschnitten der eine durch das Zentrum 𝔈, so tut dies auch der andere und beide haben in ihm dieselbe Tangente. (10.)

Die Verbindungslinie ihrer zwei übrigen gemeinsamen Punkte ist die Kollineationsachse für dieses Zentrum und für noch ein zweites 𝔈*, in welchem sich die beiden übrigen gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte schneiden.

33. Einige Spezialfälle der allgemeinen Gesetze des § 32 sind von besonderer Wichtigkeit; zuerst solche, in welchen der Träger der Involution harmonischer Polaren oder Pole eine spezielle, nämlich unendlich ferne Lage hat; sodann solche, in denen die Involution harmonischer Polaren selbst von besonderer Art, nämlich eine Involution rechter Winkel ist (§ 36). Wir entwickeln in Form von Beispielen zunächst hier die Lehre von der Involution der konjugierten Durchmesser und ihre Anwendungen; ferner die Überführung von Kegelschnitten und Kegelschnittbüscheln in Kreise und Kreisbüschel bez. gleichseitige Hyperbeln durch Projektion, wobei ein ergänzendes Zurückkommen auf die allgemeine und die zentrische Kollineation ebener Systeme (§ 23) sich ergibt betreffs ihrer entsprechenden Kreisbüschel; endlich die Konstruktionen der Kegelschnitte aus Punkten und Polarinvolutionen, bez. aus Tangenten und Polinvolutionen, welche in den Beispielen des vorigen Paragraphen fehlen und zu einem Überblick der einfachen Kegelschnittsysteme führen.

Die Erörterung der Frage nach der Projektivität der in den Beispielen besprochenen Konstruktionen ist zu empfehlen. Sie verwandelt sich in den Fällen nicht unmittelbarer Projektivität in die Frage: Wie ist die für die Originalfigur geforderte Konstruktion in der Projektion auszuführen? Z. B. in B. 1) ist der unendlich ferne Pol P als ein Punkt P_1' der Fluchtlinie q' projiziert, sein konjugierter Durchmesser als seine Polare p' in Bezug auf das Bild des Kegelschnittes; ist er begrenzt, so gehen die Bilder der Tangenten in seinen Endpunkten und aller seiner konjugierten Sehnen nach P', die Halbierungen auf diesen werden zu harmonischen Teilungen mit P'. Analog die Halbierung in B. 2.)

B. 1) Ist der Pol P unendlich entfernt, so halbiert die Polare alle durch ihn gehenden, untereinander parallelen Sehnen des Kegelschnittes; der Kegelschnitt entspricht sich selbst in einer Achsensymmetrie, für welche diese Polare die Achse ist (§ 22; b). Man nennt diese einem unendlich fernen Zentrum entsprechende Achse der Involution am Kegelschnitt den der Richtung des Zentrums also auch der von ihr halbierten Sehnen konjugierten Durchmesser des Kegelschnittes. Die Tangenten des Kegelschnittes in den Schnittpunkten dieses Durchmessers mit ihm sind parallel diesen Sehnen (nachstehende Figur) und die Berührungspunkte der zu ihm selbst parallelen Tangenten liegen auf dem gleichgerichteten Durchmesser, wenn er schneidet. Dieser letztere halbiert als die Polare der Richtung des ersten Durchmessers diesen so wie alle zu ihm parallelen Sehnen. Man nennt ihn den dem ersten konjugierten Durchmesser. Ihre Richtungen bilden ein Paar in der dem Kegelschnitt entsprechenden Involution harmonischer Pole auf der unendlich fernen Geraden oder in der zu ihm gehörigen Involution harmonischer Richtungen.



2) Wenn AB ein Durchmesser mit den zugehörigen Tangenten a, b und C ein Punkt des Kegelschnittes ist, so geht die zugehörige Tangente c durch die Mitte E des von BC auf a abgeschnittenen Segments AD. Denn für das Sechsseit $bbaacc$ ist BE die erste und die Parallele durch C zu a die zweite Brianchon-Diagonale, ihr Schnittpunkt B gibt mit A verbunden in b einen Punkt von c; von diesem und von B aus wird das Segment BC in gleicher Länge auf a projiziert in AE und ED. Beim Kreis ergibt sich der Satz aus der Gleichschenkligkeit der Dreiecke ACE und CDE.

3) In jedem Durchmesser liegt eine Involution harmonischer Pole, die ihre Doppelpunkte in der Peripherie des Kegelschnittes hat; der Zentralpunkt M dieser Involutionen ist allen gemeinsam und heißt der Mittelpunkt des Kegelschnittes. (§ 32, 4.) Die Involution in einem Durchmesser wird bestimmt durch die Schnittpunkte mit einer Tangente und mit der durch ihren Berührungspunkt gehenden Parallelen zum konjugierten Durchmesser.

Die Polinvolutionen in zwei beliebigen Durchmessern bestimmen den Kegelschnitt auch dann bei Hinzufügung eines beliebigen Peripheriepunktes, wenn sie elliptisch sind — nach § 32, 15; man erhält sofort die Asymptoten, braucht aber nicht zu den Mitteln von

§ 27, 4 zurückzugreifen. Ebenso bestimmen zwei beliebige elliptische Polarinvolutionen mit unendlich fernen Scheiteln und eine Tangente den Kegelschnitt.

Ist die Polare p unendlich fern, so werden alle durch ihren Pol gehenden Sehnen in demselben halbiert und sind Durchmesser des Kegelschnittes. Der Pol der unendlich fernen Geraden ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes, oder in Bezug auf den Mittelpunkt entspricht der Kegelschnitt sich selbst in einer zentrischen Symmetrie (§ 22; d). Die zentrische Kollinearfigur (§ 26) eines Kegelschnittes hat daher zu ihrem Mittelpunkt den entsprechenden Punkt zum Pol der Gegenachse in seinem System.

4) In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Parallelogramm sind die Diagonalpunkte ein Tripel harmonischer Pole, also die Parallelen zu den Seiten aus dem Mittelpunkt konjugierte Durchmesser.

In jedem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Parallelogramm sind die Diagonalen ein Tripel harmonischer Polaren, also die aus dem Mittelpunkt zwei konjugierte Durchmesser. (§ 32; a.)

5) Alle die Durchmesser eines Kegelschnittes bilden die Involution harmonischer Polaren aus dem Mittelpunkt desselben; die Paare der konjugierten Durchmesser sind die Paare der Involution. Ihre Doppelstrahlen sind reell und verschieden, zusammenfallend oder nicht reell, je nachdem die unendlich ferne Gerade den Kegelschnitt in reellen und verschiedenen, vereinigten oder nicht reellen Punkten schneidet, d. h. reell und verschieden in der Hyperbel, zusammenfallend — in der unendlich fernen Geraden — für die Parabel, nicht reell für die Ellipse, sie sind die Asymptoten des Kegelschnittes. (Man vergleiche die Benennungen des § 20; 9 u. § 21.) In der Ellipse trennen sich die Paare der konjugierten Durchmesser, in der Hyperbel trennen sie sich nicht; in der Parabel fällt von einem Paare derselben immer der eine mit der unendlich fernen Geraden zusammen. In der Hyperbel wird jedes Paar der konjugierten Durchmesser von den Asymptoten harmonisch getrennt. Von zwei konjugierten Durchmessern der Hyperbel schneidet sie also der eine; die Involution harmonischer Pole auf dem andern ist ohne reelle Doppelpunkte (3).

Man konstruiert die Paare konjugierter Durchmesser, die einen gegebenen Winkel miteinander einschließen, indem man den Pol der Durchmesserinvolution in einem Hilfskreis verzeichnet und seine Tangenten zu dem konzentrischen Kreis angibt, welcher die Sehne eines Peripheriewinkels von der vorgeschriebenen Größe in jenem berührt. Unter den Durchmesserpaaren der Hyperbel begegnen alle Winkel von 0^0 bis 90^0 je zweimal; unter denen der Ellipse gibt es ein Paar vom Minimalwinkel, der im Pol halbierten Sehne des Hilfskreises entsprechend.

6) Das Rechtwinkelpaar der Involution der konjugierten Durchmesser nennt man die Achsen des Kegelschnittes; die Tangenten

desselben in ihren Schnittpunkten mit ihm, die man seine Scheitel nennt, sind orthogonal zu ihnen. In der die Kurve nicht schneidenden Achse der Hyperbel kann man das symmetrische Paar oder das Paar der vom Mittelpunkt gleich weit abstehenden Punkte als ideale Scheitel der Hyperbel bezeichnen. Der Kegelschnitt ist in Bezug auf jede seiner Achsen mit sich selbst in orthogonaler Achsensymmetrie. Die Achsen halbieren den Winkel der Asymptoten bei der Hyperbel und die Winkel der konjugierten Durchmesser vom Minimalwinkel bei der Ellipse; diese Durchmesser sind also gleich lang. Die Involutionen harmonischer Polaren für die Punkte einer Achse haben diese und den Parallelstrahl zur andern Achse zum Rechtwinkelpaar.

7) Die Parabel hat nur eine Achse und einen Scheitel; man konstruiere beide, wenn vier Tangenten oder zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte bekannt sind — zuerst die Richtung der Achse, dann die Scheiteltangente und den Scheitel (mittelst des Satzes von Brianchon).

Die Involution harmonischer Pole in der Achse einer Parabel ist symmetrisch in Bezug auf den Scheitel; ebenso für jeden Durchmesser und seinen Endpunkt. (Vergl. oben 3.)

8) Man konstruiere aus den fünf einen Kegelschnitt bestimmenden Punkten A, B, C, D, E zwei Paare konjugierter Durchmesser desselben, seine Achsen, etc. Man zieht AB und dazu parallel DF, dessen zweiten Schnittpunkt F man nach dem Pascalschen Satze bestimmt, und halbiert beide Sehnen; ebenso für BC und etwa das dazu parallele DG. Damit sind zwei Paare konjugierter Durchmesser erhalten, also die Achsen, eventuell die Asymptoten zu bestimmen. Es ist leicht zu sehen, daß man (§ 28, 12) zu gegebenen Bestimmungsstücken auch einen Kreis bestimmen kann, von welchem der durch sie gegebene Kegelschnitt das Bild ist; dann erhält man aus diesem nach 14) unten die Achsen des Bildes.

9) Ist also T ein Punkt und t die zugehörige Tangente eines Kegelschnittes und macht diese in zwei konjugierten Durchmessern desselben die Abschnitte MX_1 und MY_1 (vom Mittelpunkte gemessen), während die zu ihnen Parallelen durch T die Abschnitte MX und MY bestimmen, so ist

$$MX : MX_1 = Y_1T : Y_1X_1, \quad MY : MY_1 = X_1T : X_1Y_1$$

und somit durch Addition

$$\frac{MX}{MX_1} + \frac{MY}{MY_1} = 1;$$

weil aber auch für die Polinvolutionen in den Durchmessern für a_1^2, b_1^2 als die Quadrate ihrer Längen

$$MX_1 \,.\, MX = a_1^2, \quad MY_1 \,.\, MY = \pm b_1^2$$

sind, so folgt gleichmäßig

$$\frac{\overline{MX}^2}{a_1^2} \pm \frac{\overline{MY}^2}{b_1^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{a_1^2}{\overline{MX_1}^2} \pm \frac{b_1^2}{\overline{MY}^2} = 1.$$

Diese Gleichungen des Kegelschnittes schreibt man gewöhnlich

$$\frac{x^2}{a_1^2} \pm \frac{y^2}{b_1^2} = 1; \quad a_1^2 \xi^2 \pm b_1^2 \eta^2 = 1;$$

für a, b als die halben Achsenlängen also insbesondere auch

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 \xi^2 \pm b^2 \eta^2 = 1,$$

und somit für die Gleichheit derselben oder den Kreis bez.

$$x^2 \pm y^2 = a^2, \quad a^2 (\xi^2 \pm \eta^2) = 1.$$

Für Ellipse und Hyperbel erhält man mit $x = d \cos\theta$, $y = d \sin\theta$ für die Länge des von a um θ abweichenden Halbdurchmessers

$$d^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\theta \pm b^2 \cos^2\theta};$$

ebenso ist die Entfernung der um τ von a abweichenden Tangente vom Mittelpunkt des Kegelschnittes

$$p^2 = a^2 \sin^2\tau \pm b^2 \cos^2\tau.$$

Mit $x - a_1$ statt x würde die erste der obigen Gleichungen zu

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{2x}{a_1} \pm \frac{y^2}{b_1^2} = 0,$$

oder für das obere Zeichen $y^2 = \frac{2 b_1^2}{a_1} x - \frac{b_1^2}{a_1^2} x^2$, was wir speziell für die Hauptachse und den Scheitel schreiben wollen:

$$y^2 = \frac{2 b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

Durch Einführung von $m = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$, d. h. $b^2 = 2am - m^2$ wird die Gleichung $y^2 = \left(4m - \frac{2m^2}{a}\right) x - \left(\frac{2m}{a} - \frac{m^2}{a^2}\right) x^2$, sodaß für unendlich wachsendes a die Glieder rechts bis auf das erste verschwinden und die Scheitelgleichung der Parabel entsteht $y^2 = 4mx$. Die Größe m ist der Abstand des Scheitels vom benachbarten Brennpunkt des Kegelschnittes — siehe § 36.

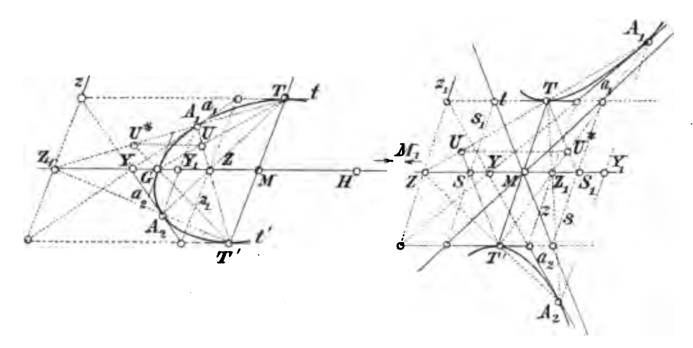
10) Man konstruiert eine Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern AB, CD durch Tangenten und deren Berührungspunkte entweder mittelst der Involution harmonischer Pole oder Polaren oder nach den Sätzen von Pascal-Brianchon.

Man gibt der Konstruktion die einfachste Form (Figur S. 204, links), indem man für ein Paar Z, Z_1 der Polinvolution in GH aus den Geraden TG und $T'Z$ mit TT' das Dreieck bildet und im Schnitt von $T'G$ mit der Parallelen zu GH durch die Gegenecke von TT' die vierte Ecke des Vierecks erhält, auf deren Verbindung mit T dann Z_1 liegt; darnach sind $T'Z$, TZ_1 und $T'Z_1$, TZ zwei Punkte A_1, A_2 der Ellipse, symmetrisch zu GH nach der Richtung P. Endlich liefern die Parallelen zu TT' durch Z, Z_1 als z_1, z durch ihre Schnitte mit t, t' je zwei Punkte der zuge-

hörigen Tangenten a_1, a_2, die sich in GH in dem Punkte Y schneiden, der mit dem Punkte Y_1 in $A_1 A_2$ ein Paar der Polinvolution bildet. Die Symmetrie zu TT' in der Richtung von GH liefert sofort zwei weitere Paare von Punkten und Tangenten.

a) Für das erste ist die Richtung des einen Durchmessers der Pol und der andere Durchmesser die Polare; seine Endpunkte bestimmen als Doppelpunkte G, H und die zugehörigen Tangenten g, h als Doppelstrahlen die zugehörigen Involutionen, und die Endpunkte des andern resp. die zugehörigen Tangenten sind das Paar TT' resp. tt' von § 32, 13, aus welchem man durch jedes Paar der Involution zwei neue Punkte und Tangenten findet.

Diese Konstruktion bleibt auch für die Hyperbel brauchbar, die durch zwei konjugierte Durchmesser mit den Endpunkten des einen und dem symmetrischen Paar S, S_1 des andern bestimmt ist; dabei ist natürlich die elliptische Involution zu benutzen und die



reellen Punkte und Tangenten dienen als Paar T, T' und t, t'. (Vorstehende Figur, rechts.) Für die Konstruktion von Z_1 zu Z bilde man das Dreieck aus T, T' als Ecken mit $T'S$ und TZ als Seiten aus der Ecke U, ziehe durch U die Parallele zu SS_1 bis zum Schnitt mit TS_1 und verbinde diesen mit T'; der Schnitt mit SS_1 ist Z_1 und es entstehen aus TZ, TZ_1 durch Schnitt mit $T'Z_1$, $T'Z$ zwei Punkte A_1, A_2. Die Strahlen z_1, z aus P durch Z, Z_1 liefern in t, t' je zwei Punkte der zugehörigen Tangenten a_1, a_2, die in SS_1 den zweiten Punkt Y desjenigen Paares liefern, dessen erster Y_1 in $A_1 A_2$ liegt. Symmetrie wie vorher.

Die Konstruktion gilt ohne wesentliche Änderung bei der Angabe eines Durchmessers mit seinen Endpunkten und einer seiner konjugierten Sehnen mit ihrer Polinvolution oder umgekehrt. Sie paßt also insbesondere auch für die Parabel.

Man sieht leicht, daß das Parallelogramm aus t, t' und s, s_1 die Asymptoten der Hyperbel zu seinen Diagonalen hat. Wenn es ein Rhombus ist, wird also die Hyperbel gleichseitig.

Auch den algebraischen Ausdruck erhält man unmittelbar. Nimmt man den Durchmesser TT' als Achse der x und seine

Hälfte gleich a_1, so ist der andere der Träger der benutzten Polinvolution und die Achse der y und man hat, wie das auch die Konstruktion ausdrückt, $MZ \cdot MZ_1 = \pm b_1^2$ für MG bez. MS als b_1. Somit ist der Kegelschnitt der Ort der Punkte, in denen sich die Geraden

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{nb_1} = 1, \quad -\frac{x}{a_1} \pm \frac{ny}{b_1} = 1$$

schneiden, d. h. seine Cartesische Gleichung ist das Produkt von

$$\frac{y}{nb_1} = 1 - \frac{x}{a_1} \quad \text{mit} \quad \pm \frac{ny}{b_1} = 1 + \frac{x}{a_1}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{x^2}{a_1^2} \pm \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Für den Ausdruck in Plückerschen Linienordinaten ξ, y mit denselben Achsen sind die Gleichungen der zwei Punkte einer Tangente als von den Cartesischen Koordinaten $-a_1$, $\frac{b_1}{n}$ und bez. $a_1, \pm nb_1$ analog

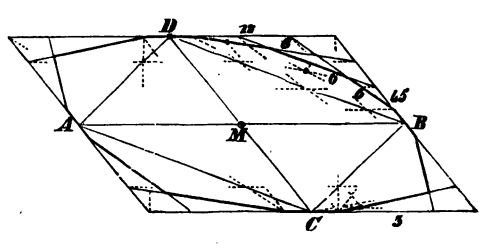
$$-\xi a_1 + y\frac{b_1}{n} + 1 = 0, \quad \xi a_1 \pm ynb_1 + 1 = 0,$$

aus welchen folgt

$$\pm b_1^2 y^2 = (1 - a_1\xi)(1 + a_1\xi) = 1 - a_1^2\xi^2.$$

Wenn für dieselben T, T' als Scheitel der Büschel und für die G und H der Ellipse als das symmetrische Paar S, S_1 der Hyperbel beide konstruiert werden, so erkennt man die involutorische Kollineation zwischen beiden sowohl für T als Zentrum und t' als Achse wie für T' als Zentrum und t als Achse. Den Asymptoten der Hyperbel entsprechen die Tangenten g, h der Ellipse, etc.

b) Für die Konstruktion nach dem Brianchonschen Satze betrachtet man von den zwei Tangenten in den Enden eines Durchmessers die eine als Vereinigung der ersten und zweiten (12), die andere als dritte Seite (3), die Tangente in einem Endpunkt des andern Durchmessers als Vereinigung der vierten und fünften Seite (45) des Brianchonschen Sechsseits (beistehende Figur). Man erhält dann BD als erste Diagonale des Sechsseits; ist dann der Schnitt einer neuen Tangente 6 mit 12 gegeben, so liefert die von ihm nach 34 gehende Gerade in BD den Brianchonschen Punkt und die Parallele durch ihn zu MB in 45 einen zweiten Punkt von 6. Die Berührungspunkte findet man nach § 28, 4. Man disponiert so, daß nur der im Inneren des Parallelogramms der gegebenen Tangenten gelegene Raum für die Konstruktion benutzt wird.



Will man zuerst die Punkte des Kegelschnittes konstruieren, so benutze man den Pascalschen Satz in der Form, wo 1 in C,

2 3 in B, 4 in A und 5 in D sind. Dann ist die Pascalsche Linie parallel BC und AD als durch 1 2, 4 5 gehend; zieht man also durch einen zwischen M und B gelegenen Punkt E eine solche Parallele bis F zur Tangente in B, so schneiden sich die Geraden, die von diesem Endpunkt F nach D und von jenem Anfangspunkt E nach C gehen, stets in einem Punkte P der Ellipse zwischen B und D.

Konstruiere die Ellipse speziell aus den Achsen durch den Schnittpunkt der vom einen Endpunkte der Hauptachse ausgehenden Geraden und die bezügliche Tangente. Natürlich als Spezialfall nach der vorigen Konstruktion. Wir geben aber eine andere ebenso praktische Anordnung, die auch für beliebige konjugierte Durchmesser gilt: Man fasse diesen Achsenendpunkt als 5, den anderen Endpunkt derselben Achse als 3 4 und den einen Endpunkt der andern als 1 2, den gesuchten Punkt als 6, für die Bestimmung seiner Tangente als 5 6.

11) In der gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten rechtwinklig zueinander sind, besteht die Involution der konjugierten Durchmesser aus zwei gleichwinkligen Strahlenbüscheln mit entgegengesetztem Drehungssinn oder sie ist eine symmetrische Involution (§ 24, 3). Die aus den Endpunkten eines Durchmessers über den Punkten der gleichseitigen Hyperbel gebildeten Strahlenbüschel sind gleich. (§ 29, 9.)

Wenn es in einem Kegelschnitt zwei Paare von rechtwinkligen konjugierten Durchmessern gibt, so sind alle Paare der Durchmesserinvolution rechtwinklig; der Kegelschnitt ist somit ein Kreis.

12) Weil die Involution konjugierter Durchmesser und ein Punkt bez. eine Tangente einen Kegelschnitt bestimmen (§ 32, 13), so ist eine Hyperbel durch die Asymptoten und einen Punkt (vergl. § 27, 7 d.; 28, 7) und der Kreis durch das Zentrum M und einen seiner Punkte T bez. eine seiner Tangenten t bestimmt.

Man konstruiert den Kreis aus Punkten, nachdem man in der Geraden TM als den vierten harmonischen zu T in Bezug auf M, ∞ den Punkt T' angegeben hat, für welchen $TM = MT'$ ist, als den Ort der Scheitel rechter Winkel, deren Schenkel durch T und T' gehen; man konstruiert ihn aus Tangenten, nach Ermittelung der zu t in Bezug auf M symmetrischen Tangente t', als die Enveloppe der Geraden, deren Schnittpunkte mit t und t' von M aus gesehen unter rechten Winkeln erscheinen. (§ 24, I und II.)

Infolgedessen ist der Scheitel einer Rechtwinkelinvolution ein Kreis vom Radius Null, sagen wir ein Nullkreis — und die entsprechenden Lagen der Zentra $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ in zwei kollinearen ebenen Systemen sind Paare entsprechender Nullkreise in ihnen, weil ihre Rechtwinkelinvolutionen sich entsprechen. (§ 31, 9.)

Zwei Nullkreise $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ oder $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2'$ bestimmen ein Büschel

von Kreisen, wie zwei Kreise derselben Ebene stets tun; es besteht aus den Kreisen, welche den über $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2$ als Durchmesser beschriebenen Kreis orthogonal schneiden und die Gerade $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2$ zur Zentrale haben. (§ 15; vergl. aber (§ 36[b].)) Jedem Kreis des Büschels in der ungestrichenen Ebene entspricht ein Kreis des Büschels in der gestrichenen Ebene und diese beiden Büschel enthalten die Gesamtheit aller Kreise der kollinearen Ebenen, denen Kreise entsprechen. Im Falle der Involution vereinigen sich beide in ein einziges Büschel sich selbst entsprechender Kreise.

13) Wir haben daran schon in § 11, 7 die darstellend geometrische Behandlung des Kreises geknüpft, den wir durch Ebene **E**, Mittelpunkt M und Radius r bestimmt denken (Figur S. 48). Die Fußpunkte der Schenkelpaare rechter Winkel am Scheitel $\mathfrak{C}$ in der Gegenachse q' bilden die Polinvolution des Kreises auf der unendlich fernen Geraden q ab, d. h. sie liefern die Polinvolution seines Bildes in q'. M' ist der zugehörige Pol und das Bild ist also durch Angabe eines Peripheriepunktes oder einer Tangente bestimmt. Wäre T' ein beliebiger Peripheriepunkt, so gibt der Entsprechende $Q^{*\prime}$ in der Polinvolution auf q' zum Fluchtpunkt Q' seines Durchmessers die zugehörige Tangente t'; der vierte harmonische Punkt $T^{*\prime}$ zu T' in Bezug auf M' und $Q^{*\prime}$ ist der Scheitel des zweiten Strahlbüschels und die Gerade $T^{*\prime}Q^{*\prime}$ die Trägerin der zweiten Punktreihe $t^{*\prime}$. (Vergl. § 32, 13, wo nur die Bezeichnung T, T', t, t' statt $P', P^{*\prime}$ etc. steht.) Wir haben die Punkte des Bildes aus Pol M', Polare q', Polinvolution und Peripheriepunkt konstruiert und bemerken jetzt, daß die Benutzung der Polinvolution um M' in der Figur nicht vollständig ist: in der Geraden $Q'M'$ schneiden sich die Tangentenpaare a', p'; $a^{*\prime}, p^{*\prime}$ und ebenso in $Q^{*\prime}M'$ die Paare $a', p^{*\prime}$ und $a^{*\prime}, p'$. Aber auch dieses liefert die elementare Begründung, da zum eingeschriebenen Rechteck APA^*P^* durch die Tangenten apa^*p^* der umgeschriebene Rhombus mit denselben Diagonalen MQ, M^*Q^* entsteht. (§ 24, 1.) Endlich bilden Q_d' und Q_t' das neue Paar der Polinvolution und die nach ihm gehenden Strahlen aus M' das neue Paar der Polarinvolution, mit welchem sich die Konstruktion fortsetzen muß.

Es wäre nun leicht, wie in § 32, 14 das Bild des Kreises durch drei Punkte oder durch zwei Punkte und die Tangente des einen zu ermitteln; auch die Bilder der vier Kreise zu drei Tangenten, oder die der zwei Kreise zu zwei Tangenten mit dem Berührungspunkt der einen nach 22) unten. Auch verbinden sich damit sehr einfach die zentralprojektivische Behandlung des geraden oder Rotationszylinders (vergl. § 11, 3) und -Kegels und der Kugel; wir empfehlen zur Übung die Durchführung folgender Aufgaben: a) Von einem geraden Zylinder ist die Ebene des Basiskreises, der Mittelpunkt und Radius desselben sowie die Höhe bekannt; man soll beide Grundkreise projizieren. b) Von einem ge-

raden Kegel kennt man die Achse a, die Spitze K in derselben und die Höhe h, sowie den Radius der Basis r; man verzeichne das Bild seiner Basis und seine Tangenten aus dem Bilde der Spitze (Umriß). c) Man soll den Querschnitt einer Ebene $\mathbf{E}$ mit der durch Mittelpunkt K und Radius r bestimmten Kugel projizieren — als einen Kreis, dessen Mittelpunkt M der Fußpunkt der vom Kugelmittelpunkt K auf $\mathbf{E}$ gehenden Normale und dessen Radius die zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, das die Länge dieser Normale zur ersten Kathete und den Kugelradius zur Hypotenuse hat. d) Man soll den Kreis der Berührungspunkte der von einem Punkte P an die Kugel gehenden Tangenten darstellen — indem man seinen Mittelpunkt M in dem nach P gehenden Kugeldurchmesser PK, sowie seinen Radius aus der Bemerkung bestimmt, daß jener der Höhenfußpunkt in einem rechtwinkligen Dreieck aus PK als Hypotenuse und r als Kathete an der Ecke K und dieser die zugehörige Höhe selbst ist; insbesondere für P als Projektionszentrum (Umriß) und für P als Richtung (Selbstschattengrenze für Sonnenlicht).

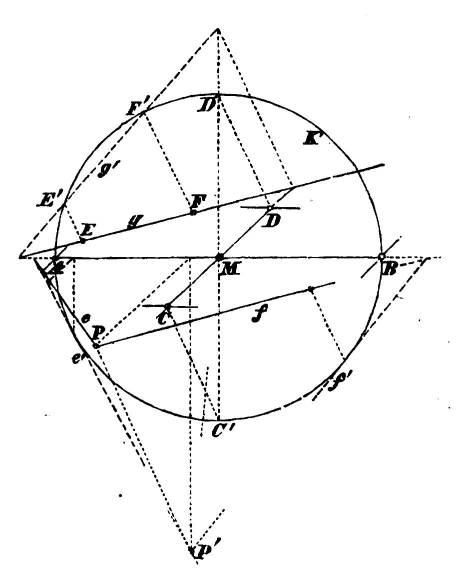
Wir gehen im folgenden Abschnitt und sodann im II. Teil dieses Werkes weiter auf diese Formen ein.

14) In der Zentralprojektion K' eines Kreises K wird das Bild vom Pol der Gegenachse r im Kreise zum Mittelpunkt. (Vergl. § 30, 4.) Die in Bezug auf K konjugierten Punktepaare der Gegenachse r bestimmen mit $\mathfrak{C}$ die Richtungen der konjugierten Durchmesser von K'. Nach § 32, 7) werden diese Paare durch die zu K orthogonalen Kreise aus Punkten von r bestimmt, die alle die zwei Punkte des zu r normalen Durchmessers von K enthalten, in denen der mit der Tangentenlänge von K aus seinem Fußpunkte in r beschriebene Kreis ihn schneidet. Im Falle des hyperbolischen Bildes sind diese letzten Punkte nicht reell. Die Involution der konjugierten Punkte in r oder der Durchmesserenden der Orthogonalkreise zu K ist aber durch den Zentralpunkt in der Normalen zu r vom Mittelpunkte und durch ein Paar bestimmt. Einer dieser Kreise (§ 32, 8) geht durch $\mathfrak{C}$ und durch den ihm radial konjugierten Punkt $\mathfrak{C}^*$ und liefert die Richtungen der Achsen des Kegelschnittes K'; die von seinen Punkten in r nach dem Pol von r in K gehenden Sehnen des Kreises liefern d i e A c h s e n d e s K r e i s b i l d e s. (Vergl. Bd. II, § 43, wo eine andere Betrachtung zur nämlichen Konstruktion leitet.)

Die Parallelen der Achsen aus dem Zentrum sind dasjenige Paar einer Rechtwinkelinvolution, welches die Gegenachse r in einem Paar ihrer Involution harmonischer Pole in Bezug auf den Kreis K schneidet. Man konstruiert sie also auch nach § 31, 15. Damit löst man dann die allgemeinere Aufgabe ebenso leicht: M a n s o l l d i e A c h s e n d e s K e g e l s c h n i t t e s k o n s t r u i e r e n, d e r d i e Z e n t r a l p r o j e k t i o n e i n e s g e g e b e n e n K e g e l s c h n i t t e s i s t.

15) Wenn eine Ellipse und ein Kreis einen Durchmesser nebst seinen Endpunkten gemein haben, so sind sie als affine Figuren für diesen Durchmesser als Achse der Affinität anzusehen; die Verbindungslinien der Endpunkte derjenigen Durchmesser von beiden, welche dem gemeinsamen Durchmesser konjugiert sind, geben die Richtung der Affinitätsstrahlen. Sie sind zur Affinitätsachse rechtwinklig, wenn diese eine Achse für die Ellipse ist. Man bezeichne die für zwei Ellipsen oder zwei Hyperbeln erforderlichen Modifikationen.

Von einer Ellipse (nachstehende Figur) sind die Endpunkte von zwei konjugierten Durchmessern AB, CD gegeben; man soll ihre Durchschnittspunkte E, F mit einer Geraden g und ihre Tangenten e, f von einem beliebigen Punkte P ihrer Ebene konstruieren — indem man sie als affin zu dem über einem jener Durchmesser beschriebenen konzentrischen Kreise K' betrachtet, und durch Bestimmung der im Kreissystem entsprechenden Geraden g' und des dort entsprechenden Punktes P' von den Schnittpunkten E', F' und Tangenten e', f' dieser Letzten mit dem Kreise K' zu den Geforderten übergeht. Die nebenstehende Figur enthält die Ausführung; auch die Berührungspunkte der Tangenten e und f; man wird leicht die Tangenten für die Punkte E, F hinzufügen.



Wir merken an, daß für D_0 als Mitte der Strecke DD' die Halbierungslinien des Winkels MD_0D den Achsen der Ellipse parallel sind.

Wenn insbesondere AB und CD die Achsen selbst sind, so liefert die Konstruktion des Ellipsenpunktes P aus dem entsprechenden Punkte P' des Kreises den Satz, daß die große und die kleine Achse der Ellipse in der Parallele durch P zu MP' die von P aus gemessenen Längen der kleinen bez. großen Halbachse abschneiden, sodaß die Ellipse die Bahn eines Punktes in einer bewegten Geraden ist, wenn zwei feste Punkte derselben in den Schenkeln eines rechten Winkels fortrücken.

16) Die Achsen eines durch fünf Punkte gehenden Kegelschnittes können auch mittelst eines Kreises bestimmt werden, der durch drei

von diesen fünf Punkten A, B, C geht und dessen vierter Schnittpunkt D' mit demselben daher nach § 29, d. h. linear bestimmt ist. In der durch diesen Kreis und den Kegelschnitt nach § 25, 2 in der unendlich fernen Geraden bestimmten Involution von Schnittpunkten, zu der auch die Richtungen der Gegenseitenpaare des Kreisvierecks der gemeinsamen Punkte als Paare gehören, sind die Achsenrichtungen des Kegelschnittes zu den Kreispunkten und den Asymptotenrichtungen des Kegelschnittes zugleich harmonisch, d. h. sie sind die Doppelpunkte jener Involution. Bildet man aber ferner im Viereck $ABCD$ die Durchschnittspunkte der Gegenseitenpaare E, F, G und die Halbierungslinien der von diesen gebildeten Winkel, so sind ihre Richtungen als zu drei Paaren der vorbetrachteten Involution zugleich harmonisch identisch untereinander und mit den Doppelpunkten jener Involution. Nachdem durch diese Bemerkungen die Richtungen der Achsen bestimmt sind, erhält man leicht die Achsen selbst; auch ihre Endpunkte als Doppelpunkte der bezüglichen Involution harmonischer Pole, welche offenbar durch den Schnitt einer Tangente mit der Achse und den der Normale zur Achse vom bezüglichen Berührungspunkte bestimmt wird. (3.)

Wenn zwei konjugierte Durchmesser nach Lage und Größe gegeben sind, so konstruiert man nach 4) und 5) auch die Achsen der Ellipse; ebenso die Lagen und Längen aller andern Paare der konjugierten Durchmesser. Die Konstruktion führt zu den Sätzen von der Konstanz der Fläche des Parallelogramms, welches zwei konjugierte Durchmesser bestimmen und von der Konstanz der Summe ihrer Quadrate.

17) Zwei Kegelschnitte sind ähnlich und ähnlich gelegen, wenn die zu den Paaren konjugierter Durchmesser des einen parallelen Durchmesser des andern wieder konjugiert sind — oder wenn sie parallele Asymptoten haben und in entsprechenden Winkeln derselben liegen; sie sind ähnlich, wenn sie gleiche Involutionen konjugierter Durchmesser haben, oder wenn ihre Asymptotenwinkel gleich sind. Im ersten Falle zeigt man leicht, daß diese Kegelschnitte durch gleiche und parallele Paare erzeugender Büschel entstehen können.

18) Wenn ein Kegelschnitt K und ein Punkt M seiner Ebene gegeben sind, so geht derselbe durch jede Zentralkollineation, die die Polare dieses Punktes in Bezug auf ihn zur Gegenachse r hat, in einen Kegelschnitt K' über, der das Bild M' von M zu seinem Mittelpunkt hat. Nach dem Vorigen ist K' eine Ellipse, wenn M im Innern liegt und somit die Involution harmonischer Pole auf r elliptisch ist (§ 32, 10); eine Hyperbel für M außerhalb K und eine Parabel für M auf K selbst. Die Festsetzung von $\mathfrak{C}$ unter den Punkten der Ebene bestimmt die elliptische, resp. hyperbolische und parabolische Involution der konjugierten Durchmesser

von K', während die Wahl von s nur über die Größe des entstehenden Bildes K' und über die Realität der ihm mit K gemeinsamen sich selbst entsprechenden Punkte entscheidet. Sind die Involutionen um M und auf r elliptisch, so kann durch die Wahl von $\mathfrak{C}$ in einem der Grundpunkte des Büschels von Kreisen, die über den Strecken zwischen den Paaren auf r als Durchmessern beschrieben werden, die Durchmesserinvolution des Bildes K' rektangulär und dieses daher zum Kreis gemacht werden; den verschiedenen Lagen von s entsprechen verschiedene Kreise K', die das Kollineationszentrum $\mathfrak{C}$ zum gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt haben. Sind die Involutionen um M und auf r aber hyperbolisch. so macht die Annahme von $\mathfrak{C}$ in einem Punkte des Kreises, der das Segment der Doppelpunkte in r zum Durchmesser hat, die Durchmesserinvolution des Bildes symmetrisch und das Bild K' zur gleichseitigen Hyperbel; für jede Lage des Zentrums entsprechen den verschiedenen Lagen von s verschiedene gleichseitige Hyperbeln, die jenes zum gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt haben. Der Übergang wird erst bestimmt, wenn von der verlangten gleichseitigen Hyperbel etwa die eine Asymptote gegeben ist; im Falle des Kreisbildes kann der Radius z. B. gegeben werden.

19) Für jede Parallelprojektion eines Kegelschnittes gilt der Satz: Das Bild des Mittelpunktes ist der Mittelpunkt des Bildes; Ellipsen können in Kreise, Hyperbeln in gleichseitige Hyperbeln, Parabeln nur wieder in Parabeln projiziert werden. Man erörtere die Modalitäten für schiefe und für orthogonale Parallelprojektion getrennt.

20) Wenn man die sämtlichen Kegelschnitte eines Büschels betrachtet, so hängt die Möglichkeit ihrer gleichzeitigen Projektion in gleichseitige Hyperbeln oder in Kreise von der Realität ihrer Grundpunkte ab. Die Kegelschnitte durch vier reelle Punkte (§ 25) können nicht in Kreise, wohl aber in gleichseitige Hyperbeln projiziert werden; umgekehrt die Kegelschnitte durch vier nicht reelle Punkte (§ 32, 15) in Kreise, aber nicht in gleichseitige Hyperbeln; nur bei den Kegelschnitten durch zwei reelle und zwei imaginäre Punkte (§ 32, 16) ist beides möglich.

In dem Fall von vier reellen Grundpunkten gibt es sechs Lagen von r, Verbindungsgerade der Grundpunkte in Paaren, und sechs Kreise über ihren Abständen als Durchmessern als Orte von Zentren $\mathfrak{C}$ für diesen Übergang durch zentrische Kollineation in der Ebene.

In dem Fall von vier nicht reellen Grundpunkten sind die beiden Träger der bestimmenden elliptischen Polinvolutionen die Geraden r, und jeder von ihnen entsprechen nach 18) zwei Lagen von $\mathfrak{C}$ für die zentrisch kollineare Überführung der Kegelschnitte des Büschels in Kreise, nämlich die beiden Scheitel der Rechtwinkelinvolutionen, welche zu der elliptischen Involution in r

perspektivisch liegen: sie liegen also in der im Mittelpunkt der Involution zu r errichteten Normale im Abstand seines symmetrischen Paares vom Mittelpunkt.

Für zwei reelle und zwei imaginäre Grundpunkte ist die Verbindungsgerade der ersten die Gegenachse r und die zugehörige Strecke der Durchmesser des Ortskreises der $\mathfrak{C}$ zur Zentralkollineation in gleichseitige Hyperbeln; dagegen ist die Verbindungsgerade der letzten, der Träger der bestimmenden elliptischen Involution, die Gegenachse r und die beiden Scheitel der zu dieser Involution gehörigen rechtwinkligen Scheine nach 18) die Lagen der Zentra $\mathfrak{C}$ für die Projektion in Kreise. Man erläutere die besondere Bedeutung der reellen Grundpunkte für den Übergang zu gleichseitigen Hyperbeln. (Vergl. § 22 f.)

Für die Überführungen durch Zentralprojektion statt durch zentrische Kollineation in der Ebene treten in den Fällen der r mit hyperbolischen Involutionen als Orte der Projektionszentra C Kugeln auf, die die Ortskreise der $\mathfrak{C}$ zu Hauptkreisen haben; und in den Fällen der r mit elliptischen Involutionen Kreise in den Normalebenen der r durch die Mittelpunkte M ihrer Involutionen, die die bezüglichen $\mathfrak{C}$ enthalten, d. h. mit den MS als Radien. Für die Wahl eines $\mathfrak{C}$ auf diesen Orten ist die Projektionsebene parallel zur Ebene Cr zu wählen.

21) Eine Tangente und die Involutionen harmonischer Pole in zwei Geraden, oder ein Punkt und zwei Involutionen harmonischer Polaren bestimmen zwei Kegelschnitte. Die zwei Geraden oder Punkte bestimmen in der Tangente (am Punkte) ein Paar der Involution und indem man den zweiten Schnitt oder die zweite Tangente des durch einen Punkt in der Tangente oder an eine Tangente aus dem Punkte gehenden Kegelschnittes des Büschels oder der Schaar konstruiert, erhält man ein zweites Paar. Die Doppelelemente der Involution bestimmen zwei Kegelschnitte als Lösungen.

22) Drei Punkte und eine Involution harmonischer Polaren (d. h. auch drei Punkte und zwei Tangenten) oder drei Tangenten und eine Involution harmonischer Pole (d. h. auch drei Tangenten und zwei Punkte) bestimmen einen Kegelschnitt. Im allgemeinen entsprechen vier Kegelschnitte dem Problem: Man ermittelt die Polare des Scheitels des involutorischen Büschels (den Pol der Geraden der involutorischen Reihe) mittelst ihrer Schnittpunkte mit den Verbindungslinien der gegebenen Punkte (mittelst seiner Verbindungslinien mit den Schnittpunkten der gegebenen Tangenten); sie sind das gemeinsame Paar, welches die gegebene Involution in jener Geraden oder an diesem Schnittpunkte und die durch jene Punkte oder Tangenten als Doppelelemente bestimmte Involution besitzen.

Die drei so erhaltenen Punktepaare liegen viermal zu dreien in einer Geraden und die drei Strahlenpaare des andern Falles

gehen viermal zu dreien durch einen Punkt; d. h. man erhält vier Polaren resp. vier Pole des Trägers der Polarinvolution. Jedes dieser Elemente liefert nach dem früheren (§ 32, 13) einen Kegelschnitt.

23) Man konstruiere speziell die Kegelschnitte zu drei Tangenten und den gegebenen Richtungen von zwei Paaren konjugierter Durchmesser und zeige, wie insbesondere die vier Kreise zu drei Tangenten sich so ergeben. (Die vier Kegelschnitte des allgemeinen Falles sind ähnlich und ähnlich gelegen zu einem gegebenen Kegelschnitt nach 17.) Man erläutere die für zwei Tangenten und den Berührungspunkt der einen oder zwei Punkte und die Tangente des einen eintretenden Modifikationen.

24) Durch die entwickelten Konstruktionen sind fünf einfach unendliche Systeme von Kegelschnitten hervorgetreten, nebst ihren Beziehungen zu den Punkten und geraden Linien ihrer Ebenen. Zuerst (§ 25, 1 und 4; § 32, 14) die Büschel und die Scharen von Kegelschnitten; im Büschel geht einer durch jeden Punkt, in der Schar einer an jede Gerade, dagegen (§ 25, 4) im Büschel zwei an eine Gerade und in der Schar zwei durch einen Punkt. Sodann die Kegelschnitte mit drei gemeinsamen Punkten und einer gemeinsamen Tangente, davon zwei durch einen Punkt und (22) vier an eine Gerade gehen, und die Kegelschnitte mit drei gemeinsamen Tangenten und einem gemeinsamen Punkte, von denen vier durch einen Punkt gehen und zwei eine Gerade berühren; endlich die Kegelschnitte durch zwei Punkte und an zwei Tangenten, von denen vier durch einen Punkt und vier an eine Gerade gehen — genauer gesprochen zweimal zwei, da sie in zwei Systeme zerfallen. Überall können zwei gleichartige gemeinsame Elemente durch eine Involution ersetzt, also auch konjugiert imaginär werden; überall können solche auch einander unendlich nahe gedacht werden unter Angabe ihres Verbindungselements, sodaß z. B. unter den Büscheln die einfach- und die zweifachberührenden, sowie die oskulierenden speziell hervortreten. (Vergl. § 35.)

34. Jeder aus Punkten und Geraden zusammengesetzten Figur in der Ebene eines Kegelschnittes K entspricht eine aus den Polaren jener Punkte und den Polen jener Geraden ganz gleich zusammengesetzte Figur, in der jedem Strahlenbüschel der ersten eine ihm projektivische Punktreihe der zweiten, und umgekehrt, entspricht — die Polarfigur der ersten in Bezug auf K; gleichzeitig ist nach § 32 die erste Figur die Polarfigur der zweiten in Bezug auf K. Man nennt daher zwei solche Figuren reziproke Polarfiguren in Bezug auf K und bezeichnet diesen Kegelschnitt als die Direktrix der Reziprozität.

Sie bilden einen besonderen Fall der ineinanderliegenden reziproken ebenen Systeme (Überblick, S. 115), der dadurch charakterisiert ist, daß jedem Element das nämliche andere Element entspricht, ob man es dem einen oder dem andern der beiden Systeme zuzählt, d. h. durch das vertauschbare Entsprechen der Elemente. Der Direktrixkegelschnitt ist der Ort der Punkte, die in ihren entsprechenden Geraden liegen, und zugleich die Enveloppe dieser Geraden, welche ihre entsprechenden Punkte enthalten; denn der Pol liegt nur in der Polare, wenn er ein Punkt des Kegelschnittes ist und die Polare ist seine Tangente. Daß dieser Kegelschnitt nicht notwendig reell sein muß, wissen wir schon aus § 32, 12. Man überträgt zuweilen die Ausdrucksweise dieses speziellen Falles auf den allgemeinen Fall der reziproken Systeme, indem man vom entsprechenden Punkt einer Geraden als ihrem Pol und von der entsprechenden Geraden eines Punktes als seiner Polare auch dann spricht. Wir kommen auf diesen allgemeinen Fall später (Tl. III dieses Werkes) zurück und verweilen hier beim speziellen. In Erinnerung an § 20, 12 erkennen wir, daß die Spuren orthogonaler Elementenpaare im projizierenden Bündel der Zentralprojektion eine besondere Form desselben bilden, und wir berücksichtigen dieselbe unter den Beispielen.

In jedem Falle gibt die Figur eines projektivischen geometrischen Satzes oder Problems der eines neuen Satzes oder Problems den Ursprung; das Prinzip der Reziprokalfiguren oder der Reziprozität erlaubt, die Menge der geometrischen Wahrheiten ohne neue Beweisarbeit zu vermehren; aus dem Satze von Pascal läßt es z. B. so den Satz von Brianchon hervorgehen, aus der Konstruktion des Kegelschnittes aus projektivischen Büscheln die eines andern aus projektivischen Reihen (vergl. B. 7), etc. In den vorhergehenden Entwickelungen liefern alle die parallel nebeneinander gestellten Sätze und Aufgaben Beispiele für diesen Übergang. Ihre Nebeneinanderstellung im vorhergehenden ist aber von diesem Prinzip unabhängig schon aus der dualistischen Natur des Prozesses der Projektion und des ihn beherrschenden Gesetzes der Doppelverhältnisgleichheit hervorgegangen; so wie jener sich aus der Bildung des Scheines oder des projizierenden Bündels und der seines Schnittes mit der Bildebene zusammen-

setzt, so erstreckt sich dieses gleichmäßig auf Reihen von Punkten und auf Büschel von Strahlen und Ebenen. Unsere Entwickelung gibt jene Sätze als Folgen jenes allgemeinen Gesetzes der Dualität, das die geometrischen Formen und ihre Eigenschaften beherrscht (Überblick); im besondern entsprechen sie einander auch nach dem Prinzip der Reziprocität. Wir geben unter den Beispielen die Behandlung des Normalenproblems der Kegelschnitte unter diesem Gesichtspunkte.

B. 1) Der Direktrixkegelschnitt degeneriert in ein Paar von Geraden, resp. in ein Paar von Punkten, wenn die reziproke Beziehung der beiden ebenen Systeme die im Überblick, S 133 f. mit f_2) und f_1) bezeichnete ist.

2) Welche Degenerationsform des Kegelschnittes entspricht der besonderen Reziprozität g) a. a. O.?

3) Die Polarfigur eines Kreises (oder Kegelschnittes) in Bezug auf einen Kreis als Direktrix der Reziprozität ist ein Kegelschnitt; und zwar eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Mittelpunkt des Direktrixkreises in dem gegebenen Kreise, auf seiner Peripherie oder außerhalb desselben liegt. Weitere Beziehungen für denselben würden sich in Anwendung der folgenden Entwicklungen ergeben; z. B. der Mittelpunkt der Direktrix ist ein Brennpunkt desselben nach § 36.

4) Die Punkte der Bildebene und die Spuren der projizierenden Normalebenen zu den durch sie bestimmten projizierenden Strahlen bilden zwei polarreziproke Systeme mit einem nicht reellen Direktrixkegelschnitt (6) oder, wie man sagt, ein Orthogonalsystem.

5) Die Spuren von drei projizierenden Ebenen, von denen jede auf den beiden andern rechtwinklig ist, sodaß für jede von ihnen der Schnittpunkt der beiden andern der Durchstoßpunkt des zu ihrer Ebene normalen projizierenden Strahles ist, bilden ein sich selbst konjugiertes Dreieck des Systems und bestimmen dasselbe. Nach § 10 ist der notwendig in seinem Innern gelegene Höhenschnittpunkt eines solchen Dreiecks der Hauptpunkt C_1 und die mittlere geometrische Proportionale zwischen den durch ihn bestimmten Abschnitten der Höhen die Distanz d für den Scheitel C des projizierenden Bündels. Somit bestimmt ein solches Dreieck das Orthogonalsystem; in der Tat ist wie in § 20, 12 durch dasselbe das eine zur Bestimmung des Direktrixkegelschnittes und aller übrigen Paare notwendige Paar eines Pols und seiner Polare mit gegeben, da der Hauptpunkt C_1 die unendlich ferne Gerade der Ebene zur Polare hat. Sind X, Y, Z die Ecken eines solchen Dreiecks, so bilden zu den Paaren YZ, ZX, XY die Höhenfußpunkte X_1, Y_1, Z_1 die Mittelpunkte der bezüglichen Involutionen, resp. $X_1Y \,.\, X_1Z$, $Y_1Z \,.\, Y_1X$ und $Z_1X \,.\, Z_1Y$ also ihre Potenzwerte k^2. Ist nun P ein Punkt der Ebene und schneiden die Geraden XP,

YP, ZP die Gegenseiten YZ, ZX, XY des Dreiecks in P_x, P_y, P_z, resp., so erhält man nach § 10 die zu diesen gehörigen Spuren der Normalebenen in den von X, Y, Z resp. zu den Geraden C_1P_x, C_1P_y, C_1P_z gehenden Perpendikeln, und man erkennt sofort, daß auf Grund dieser Konstruktion für P_{1x}, P_{1y}, P_{1z} als die Schnittpunkte derselben mit YZ, ZX, XY resp.

$$k^2 = X_1Y \,.\, X_1Z = X_1P_x \,.\, X_1P_{1x}, \text{ etc.}$$

ist. Die Punkte P_{1x}, P_{1y}, P_{1z} liegen also in der Polare p von P und die Konstruktion des Orthogonalsystems stimmt mit der von § 32, 12 überein.

6) Der Hauptpunkt C_1 als Pol der unendlich fernen Geraden ist der Mittelpunkt der nicht reellen Direktrix. Da die Polare eines unendlich entfernten Punktes, d. h. einer Richtung die zu dieser normale Gerade durch den Hauptpunkt ist, so ist die Involution der konjugierten Durchmesser für die Direktrix des Orthogonalsystems rektangulär und wir bezeichnen dieselbe daher als einen nicht reellen Kreis mit Hauptpunkt als Mittelpunkt. In der Tat haben die Involutionen harmonischer Pole auf allen durch C_1 gehenden Geraden nach § 10 die nämliche Potenz $-d^2$, sodaß die Abstände ihrer Doppelpunkte vom gemeinsamen Mittel- oder Zentralpunkt gleich groß, nämlich gleich $d\sqrt{-1}$ sind. Wir dürfen diese Größe als den Halbmesser des imaginären Direktrixkreises bezeichnen. Der Distanzkreis ist der Ort der Paare symmetrischer entsprechender Punkte in den Polinvolutionen seiner Durchmesser und die Enveloppe der Paare solcher Strahlen in den Polarinvolutionen aus Parallelen.

7) Jedem Kegelschnitt in der Bildebene entspricht ein anderer Kegelschnitt derselben als Enveloppe der Polaren seiner Punkte, d. h. als Enveloppe der Spuren der projizierenden Normalebenen zu den nach seinen Punkten gehenden projizierenden Strahlen. Zugleich entsprechen den Punkten des zweiten Kegelschnittes die Tangenten des ersten in derselben Art, also seine unendlich entfernten Punkte den von C_1 aus an diesen gehenden Tangenten als die Richtungen ihrer Normalen. Insbesondere entsprechen zwei zum Distanzkreis konzentrische, d. h zwei Neigungskreise (§ 1, 2) einander, wenn die zugehörigen Winkel einander zu 90^0 ergänzen; der Distanzkreis entspricht sich selbst in der Art, daß jedem seiner Punkte die Tangente im diametral gegenüberliegenden Punkte entspricht. (Vergl. 3 oben.)

Man bilde die so entspringende Reziprokalfigur des Kegels in § 11, 6a) und diskutiere sie.

8) Die im Berührungspunkte einer Tangente des Kegelschnittes auf ihr errichtete Normale nennt man die zugehörige Normale des Kegelschnittes. Wenn der Punkt und die Tangente den Kegelschnitt umlaufen, so umhüllt die Normale eine Kurve, die

man die Evolute des Kegelschnittes nennt. Die von einem Punkte P der Ebene an diese Kurve gehenden Tangenten sind die von ihm ausgehenden Normalen des Kegelschnittes. Zu ihrer Konstruktion führen zwei einander dualistisch gegenüberstehende Betrachtungen. Ist X der Fußpunkt einer solchen Normale mit der Tangente x, so ist PX normal auf dem Durchmesser, der zu dem nach X gehenden konjugiert ist; schneidet man also jeden der Strahlen des Büschels um P mit dem Durchmesser, welcher konjugiert ist zu dem zu ihm normalen Durchmesser des Kegelschnittes, so ist der als Ort der Schnittpunkte entstehende Kegelschnitt eine durch X gehende Kurve. Anderseits ist x eine Gerade, die die Polare p von P in einem Punkte schneidet, dessen Polare zu ihr normal ist; verbindet man also die Punkte von p mit den zu ihren Polaren durch P normalen Richtungen, so hat der durch die Verbindungsgeraden entstehende Kegelschnitt, die reziproke Polarfigur des vorigen in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt als Direktrix, x zu seiner Tangente. Von beiden Kegelschnitten liefert der erste die Fußpunkte der Normalen aus P als seine gemeinschaftlichen Punkte, der zweite die zugehörigen Tangenten als seine gemeinschaftlichen Tangenten mit dem gegebenen Kegelschnitt; im allgemeinen sind es also vier.

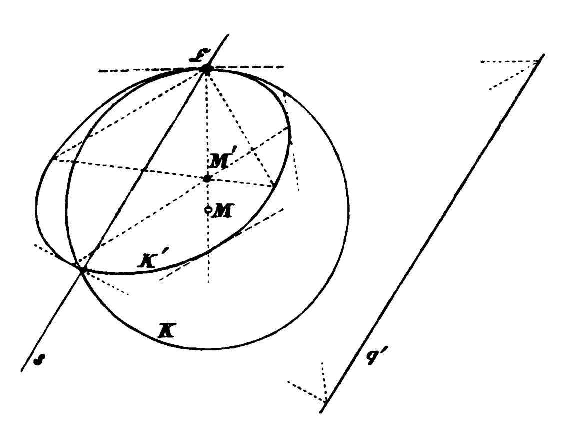
Da nun die zu den Achsen parallelen Strahlen aus P zu den konjugierten der zu ihnen normalen Durchmesser die ihnen parallelen Achsen selbst haben, so ist der erste Kegelschnitt eine den Mittelpunkt enthaltende gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten den Achsen parallel sind; sie berührt in P das Perpendikel auf den zum Durchmesser von P konjugierten Durchmesser und im Mittelpunkt den konjugierten zu dem auf dem Durchmesser von P senkrechten. Es ist klar, daß diese gleichseitige Hyperbel den gegebenen Kegelschnitt zweimal oder viermal reell schneiden wird, und daß ein Übergangsfall eintritt, wenn der den Mittelpunkt nicht enthaltende Ast derselben den Kegelschnitt berührt, ein Fall in welchem die der Berührungsstelle entsprechende Normale als doppelt zu zählen ist. Sie ist die Tangente der Evolute für P als Berührungspunkt.

Der zweite Kegelschnitt, die Polarfigur des ersten, ist eine Parabel, welche die Achsen des Originalkegelschnittes, das Rechtwinkelpaar der Polarinvolution von P und die Polare p berührt; der Berührungspunkt an p ist der Pol der Normalen von P zu p; der unendlich ferne Punkt der Parabel ist die Richtung der Normalen zum Durchmesser von P.

9) Ist der gegebene Kegelschnitt eine Parabel, so ist ihr unendlich ferner Punkt sowohl ein Schnittpunkt mit der Hyperbel (die Parabelachse ist Asymptote derselben) als auch Berührungspunkt einer gemeinsamen Tangente mit der Hilfsparabel, d. h. der Parabeldurchmesser aus P ist die eine Normale; von den drei andern ist notwendig eine reell. Man spezialisiere die Betrachtung

für den Kegelschnitt als Kreis und als Linienpaar; für den Punkt P als auf dem Kegelschnitt, in einer seiner Achsen und als in unendlicher Ferne gelegen.

35. Die zentrische Kollineation eines Kreises mit einem Kegelschnitt ist auch in dem Falle von Wichtigkeit, wo das Zentrum $\mathfrak{C}$ der Kollineation ein Punkt der Kreisperipherie ist und die Kollineationsachse s durch diesen Punkt selbst hindurchgeht. Es ist schon in § 32, 20 bemerkt, daß die Lage des Kollineationszentrums in der Peripherie des Kreises oder Kegelschnittes die Berührung desselben mit dem kollinearverwandten Kegelschnitt in ihm bedingt. Wenn dann die entsprechenden Punkte der zentrischen Kollineation auf einerlei



Seite des Zentrums liegen, so können beide Kurven zwei weitere Punkte miteinander gemein haben, die in der Kollineationsachse gelegen sind. Berührt diese den Originalkegelschnitt, so ist der Bildkegelschnitt mit demselben in doppelter Berührung, in $\mathfrak{C}$ und nach s — ein Fall, der eine besondere eingehende Behandlung verdiente.

Geht die Kollineationsachse durch das Zentrum, so fällt von jenen beiden weiteren gemeinsamen Punkten noch einer mit den zwei schon in $\mathfrak{C}$ vereinigten gemeinsamen Punkten zusammen, und es muß ein vierter gemeinsamer Punkt der Kurven existieren, ihr zweiter Schnittpunkt mit der Kollineationsachse. Die Beziehung zweier Kegelschnitte, welche in diesem Falle im Punkte $\mathfrak{C}$ stattfindet, bezeichnet man als eine Berührung zweiter Ordnung; ist der eine Kegelschnitt ein Kreis, so

nennt man denselben den Krümmungs- oder Oskulationskreis des Kegelschnittes in jenem Punkte und seinen Halbmesser den entsprechenden Krümmungshalbmesser desselben — denn es gibt nur einen Kreis dieser Art, weil er in $\mathfrak{C}$ drei unendlich nahe Punkte mit dem Kegelschnitt gemein haben und durch die Kreispunkte der Ebene gehen oder eine Rechtwinkelinvolution konjugierter Durchmesser haben muß. Macht man die Kollineationsachse s zur Tangente des Kegelschnittes in $\mathfrak{C}$, so erhält man durch die Wahl der einen Gegenachse unter ihren Parallelen einen der einfach unendlich vielen Kegelschnitte, die den gegebenen in $\mathfrak{C}$ vierpunktig oder in der dritten Ordnung berühren, und man sieht sofort, daß durch jeden Punkt der Ebene einer dieser Kegelschnitte geht, und wie man ihn konstruiert. Die Kollinearfiguren eines Kreises für einen Punkt seiner Peripherie als Zentrum und eine durch diesen gehende Gerade als Achse liefern also die zweifach unendlich vielen von diesem Kreise in $\mathfrak{C}$ oskulierten Kegelschnitte; die Lage der Kollineationsachse und einer Gegenachse, welche zur Bestimmung der Kollineation erforderlich ist, individualisieren dieselben. Wir wollen daraus die Konstruktion des Oskulationskreises für einen durch fünf Punkte (etc.) bestimmten Kegelschnitt in einem gegebenen Punkte desselben ableiten. Da der Mittelpunkt M des Kreises der Pol der unendlich fernen Geraden q in ihm ist, so ist sein Bild M' der Pol der Gegenachse q' im System des Kegelschnittes; drehen wir um jenen einen Durchmesser, so dreht sich um diesen die Sehne, welche sein Bild ist, und die entsprechenden Endpunkte beider liegen notwendig in einerlei Strahl aus dem Zentrum $\mathfrak{C}$. Beide Punkte sind also die Pole rechtwinkliger Involutionen aus $\mathfrak{C}$, resp. im Kreis und im Kegelschnitt; oder man erhält den Punkt M' im Kegelschnittsystem als den Pol der Involution rechter Winkel aus $\mathfrak{C}$, und aus ihm die Gegenachse q' als seine Polare in Bezug auf den Kegelschnitt. Damit ist die zentrische Kollineation bestimmt, in welcher dem als gegeben gedachten Kegelschnitt ein Kreis entspricht und die Achse s durch das Zentrum geht; — man erhält s und r für dieselbe. (Figur S. 218.)

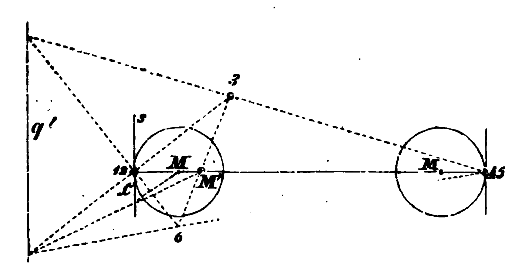
B. 1) Von einem Kegelschnitt sind fünf Punkte A, B, C, D, E gegeben; man soll für einen derselben A den Krümmungs-

mittelpunkt konstruieren. Man bestimmt die Schnittpunkte B_1, C_1 der zu AB, AC normalen Geraden aus A mit dem Kegelschnitt und dadurch den Pol M' der Rechtwinkelinvolution aus A; seine Polare (§ 30, 2) ist die Gegenachse q', die Parallele zu derselben durch A die Kollineationsachse s. Ihr zweiter Schnittpunkt F mit dem Kegelschnitt bestimmt den Krümmungskreis, die halbierende Normale zu AF schneidet die Normale des Kegelschnittes in A im Krümmungsmittelpunkt. Noch mehr direkt findet man denselben als den entsprechenden zu M'. Man erläutere die Konstruktion für A als einen Punkt der gleichseitigen Hyperbel, die durch ihre Asymptoten bestimmt ist. Ebenso bei der Bestimmung des Kegelschnittes durch vier Punkte A, B, C, D und die Tangente des einen a, wo man nur eine Sehne der Rechtwinkelinvolution bei A braucht.

Die benutzte zentrische Kollineation ist von der Charakteristik $\Delta = +1$ und wird bei entgegengesetzter Umlegung zur Involution.

2) Man konstruiere einen Kegelschnitt aus dem Krümmungskreis K in einem gegebenem Punkte $\mathfrak{C}$ und zwei Punkten A', B' seiner Peripherie. Man wird die in den Strahlen $\mathfrak{C}A'$, $\mathfrak{C}B'$ gelegenen Punkte AB, des Kreises bestimmen und im Schnitt der Geraden AB, $A'B'$ einen zweiten Punkt der Kollineationsachse erhalten; etc. Ebenso kann man offenbar den einen gegebenen Kegelschnitt K in $\mathfrak{C}$ oskulierenden Kegelschnitt durch zwei Punkte A', B' konstruieren.

3) Man konstruiere den Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel eines Kegelschnittes bei gegebenen Bestimmungsstücken. (In nebenstehender Figur die Scheitel der Hauptachse und ein Punkt 3.). Es ergibt sich, daß die Kollineationsachse mit der Scheiteltangente zusammenfällt, daß also alle dem Krümmungskreis und der Kurve gemeinsamen Punkte im Scheitel vereinigt sind; es findet also zwischen beiden eine Berührung dritter Ordnung statt. Eine andere Konstruktion wird die Untersuchung der Schraubenlinie liefern. (Vergl. Bd. II, § 16, 8).



4) Man konstruiere eine Parabel aus ihrem Krümmungskreis im Scheitel.

5) Zu einer Hyperbel ist die andere Hyperbel zu konstruieren, die sie in einem ihrer unendlich fernen Punkte oskuliert und für die eine Tangente und der Berührungspunkt gegeben ist. Man

zeige, daß für alle diese Hyperbeln die Dreiecke gleich groß sind, welche die Tangenten mit ihren Asymptoten bilden.

6) Man konstruiere den in $\mathfrak{C}$ vierpunktig oskulierenden Kegelschnitt eines gegebenen mit einer vorgeschriebenen Tangente. Die von ihrem Schnittpunkte mit s an den Kegelschnitt gehende von s verschiedene Tangente ist ihre entsprechende, womit die Gegenachsen und die Kollinearfigur bestimmt sind. Man findet speziell für die vierpunktig berührende Parabel, daß ihre Achsenrichtung die vom Durchmesser des Punktes ist.

7) Wenn die Achsenrichtungen des Kegelschnittes bekannt sind (vergl. für ihre Bestimmung aus fünf Punkten § 33, 16), so kann der Krümmungskreis für einen Punkt desselben auch mittelst des Satzes konstruiert werden, daß die gemeinsamen Sehnenpaare zwischen einem Kreis und einem Kegelschnitt die Achsenrichtungen zu den Richtungen der Halbierungslinien ihrer Winkel haben. Er ergibt sich aus unserer Konstruktion durch die Benutzung der von $\mathfrak{C}$ ausgehenden Parallelen zu den Achsen, deren Sehne der durch M' gehende Durchmesser ist, deren Tangenten also einander parallel und zur Tangente in $\mathfrak{C}$ symmetrisch in Bezug zu den Achsenrichtungen liegen. Man verzeichnet also die Tangente des Kegelschnittes im gegebenem Punkte und erhält als Kollineationsachse s die Linie unter gleicher Neigung mit derselben zu den Achsen, also in ihrem zweiten Schnittpunkt mit der Kurve einen Punkt des Krümmungskreises. Diese Konstruktion ist auf die Scheitel der Kurve nicht anwendbar.

Wären die Scheitel einer Achse und ein Punkt gegeben, so kombinieren sich die erwähnten Konstruktionsmittel in verschiedener Weise.

8) Nach § 34, 8 ist der Krümmungsmittelpunkt der Berührungspunkt der Normale mit der Evolute oder ihr Schnittpunkt mit der nächstbenachbarten Normale; seine Konstruktion kann daher an die Behandlung des Normalenproblems angeknüpft werden, die wir dort gegeben haben, nämlich an die der Parabel, welche die Tangenten in den Normalenfußpunkten berühren. Ist P ein Punkt des Kegelschnittes und also seine Polare p die zugehörige Tangente, und fällen wir von jedem Punkte der Tangente p das Perpendikel auf seine durch P gehende Polare, so wird durch diese Perpendikel jene Parabel umhüllt, und wir erkennen hier, daß außer den beiden Axen des Kegelschnittes auch die Tangente p und die Normale n von P als Rechtwinkelpaar von seiner Polarinvolution, und zwar p insbesondere im Pol von n in dieser Parabel, berührt werden. Offenbar ist der Berührungspunkt dieser Parabel mit der Normale n der Krümmungsmittelpunkt des Kegelschnittes für den Punkt P.

Man erhält hiermit zunächst Konstruktionen des Krümmungsmittelpunktes bei bekannten Achsen in der Form des Brianchonschen

Satzes; offenbar aber können die Achsen immer durch zwei andere Tangenten der Parabel ersetzt werden, d. h. durch die Normalen aus zwei Punkten der Tangente zu ihren durch den Berührungspunkt gehenden Polaren; wenn der Kegelschnitt bestimmt ist, so lassen sich solche immer leicht in verschiedener Weise ableiten. Man bestimme z. B. für die vier Punkte A, B, C, D und die Tangente a in einem derselben A das Krümmungszentrum für diesen in der zugehörigen Normale n als Berührungspunkt mit der Parabel durch Abgabe von zwei weiteren Tangenten derselben, indem man in zweien der Punkte B, C die Tangenten des Kegelschnittes b, c nach Pascal konstruiert und von ihren Schnittpunkten mit a auf AB, AC resp. die Perpendikel fällt.

Die Beziehungen des Krümmungsmittelpunktes zu den Brennpunkten (§ 36), den Asymptoten bei der Hyperbel, etc. sind zahlreich, kommen aber, weil diese Elemente nicht projektivisch sind, in den Formen darstellend geometrischer Anwendung seltener vor.

9) Wenn man die Krümmungsradien eines gegebenen Kegelschnittes jeden nach der entgegengesetzten Seite von diesem aus um sich selbst verlängert und über den Verlängerungen als Durchmessern Kreise beschreibt, so schneiden alle diese Kreise rechtwinklig den Kreis von § 31, 7, welcher der Ort der Schnittpunkte rechtwinkliger Tangentenpaare des Kegelschnittes ist; bei den Hyperbeln mit stumpfen Asymptotenwinkel tritt an dessen Stelle ein Symmetriekreis, welcher nach § (36b, e) diametral geschnitten wird und der Orthogonalkreis der ihr konjugierten spitzwinkligen Hyperbel ist.

36. Schon in § 31, 7 haben wir gesehen, daß der Ort der Punkte, von denen Paare rechtwinkliger Tangenten an den Kegelschnitt gehen, ein Kreis um den Mittelpunkt desselben ist; natürlich vom Radiusquadrat gleich $a^2 + b^2$; derselbe wird für die gleichseitige Hyperbel zum Mittelpunkt und für die Parabel zur Direktrix, wie wir unten (10) sehen werden. Wir bemerken hier, daß die diesen Punkten angehörigen Polarinvolutionen symmetrische Involutionen (§ 31, 11) sind. Die Involutionen rechter Winkel fanden wir als die andere metrisch spezialisierte Art der Involutionen im Strahlenbüschel und ihre Bedeutung als Polarinvolution ist noch zu untersuchen.

Wenn das Zentrum $\mathfrak{C}$ der Kollineation zwischen einem Kreise K und dem Kegelschnitt K' in den Mittelpunkt des Kreises fällt, so ist es ein Brennpunkt des Kegelschnitts X'; denn man nennt die Punkte in der Ebene eines Kegelschnittes, deren Polarinvolutionen in Bezug auf ihn recht-

winklig sind, **Brennpunkte** und ihre Polaren **Direktrixen** desselben.

Da aber nach § 32, 19 die Involution harmonischer Polaren aus dem Zentrum der Kollineation $\mathfrak{C}$ einem beliebigen Originalkegelschnitt und seinem Bilde gemeinsam ist, so erhält man in der zentrisch kollinearen Figur zu einem Kreise K, dessen Mittelpunkt das Kollineationszentrum $\mathfrak{C}$ ist, einen Kegelschnitt K', der diesen Punkt zum Brennpunkt hat (Figuren S. 224); die zugehörige Direktrix, als die Polare des Brennpunktes im Bilde, ist das Bild der Polare von $\mathfrak{C}$ oder der unendlich fernen Geraden im Original, d. h. die Gegenachse q' im Bilde. Ein zweiter Brennpunkt und seine Direktrix ergeben sich dann aus der Symmetrie des Kegelschnittes in Bezug auf sein Zentrum. Wenn die Gegenachse r den Originalkreis K nicht schneidet, so ist der Kegelschnitt K' eine Ellipse (S. 224 oben), wenn sie ihn berührt, eine Parabel (S. 224 unten), und wenn sie ihn schneidet, eine Hyperbel (S. 224 Mitte). In jedem Falle ist für P als einen Punkt des Kreises und P' als den entsprechenden des Kegelschnittes auf dem Strahl mit den Gegenpunkten Q' und R

$$(\mathfrak{C} \infty PR) = (\mathfrak{C} Q'P' \infty) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{C}P : \mathfrak{C}R = \mathfrak{C}P' : Q'P'.$$

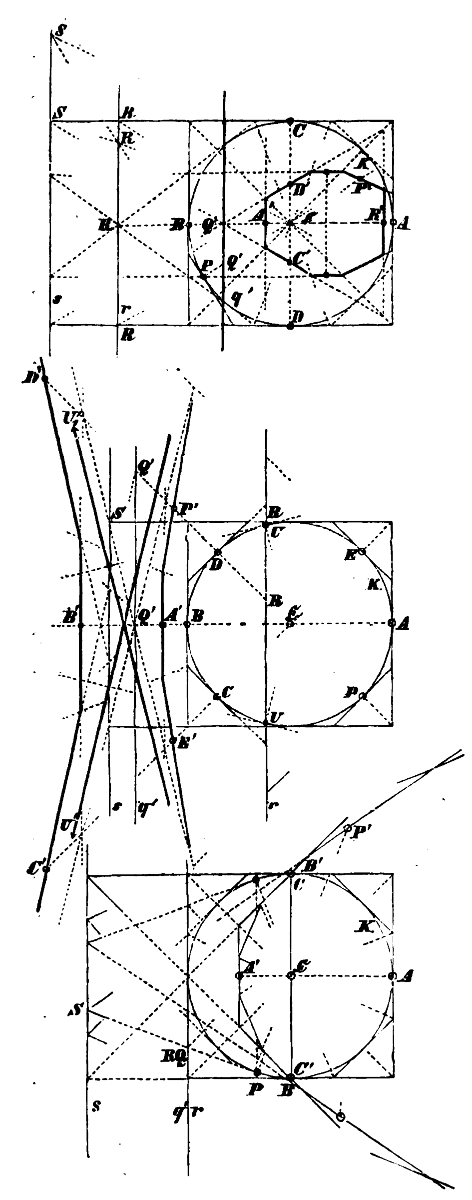
Da nun das Verhältnis $\mathfrak{C}R : Q'P'$ gleich dem Verhältnis der Abstände von $\mathfrak{C}$ bis zur Gegenachse r — schreiben wir $(\mathfrak{C}, r)$ — und von der Gegenachse q' oder der Direktrix bis P' — schreiben wir (q', P') — ist, der erste Abstand aber ebenso wie $\mathfrak{C}P$ eine Konstante ist, so folgt

$$\mathfrak{C}P' : (q', P') = \mathfrak{C}P : (\mathfrak{C}, r),$$

die Definition des Kegelschnittes als Ort eines Punktes, für den das Verhältnis der Abstände von einem Brennpunkte und der entsprechenden Direktrix konstant ist: Numerische Exzentrizität.

Der Wert e dieses Verhältnisses ist offenbar für die Ellipse kleiner, für die Hyperbel größer als Eins, für die Parabel gleich Eins. Der zu q' normale Durchmesser AB des Kreises wird zum Durchmesser und zwar zur Achse $A'B'$ des Kegelschnittes, weil er den Pol von r im Kreise enthält (§ 33, 3, 6) und zu seinem konjugierten Durchmesser rechtwinklig ist; nach § 15 wird sein Bild zugleich der längste Durchmesser im Falle der Ellipse und der kürzeste im Falle der Hyperbel — als solchen nennt man ihn die Hauptachse der Kurve, auch

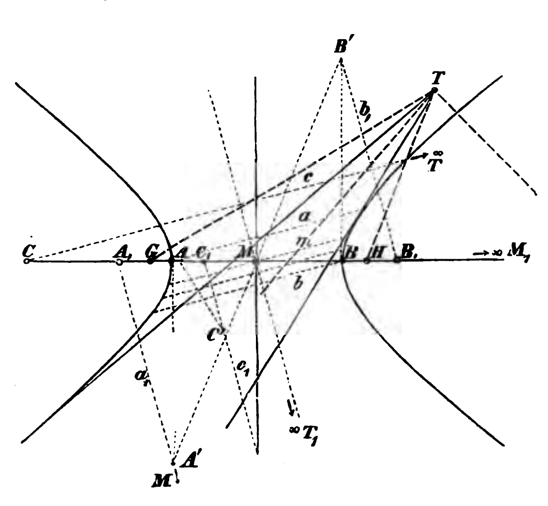
Brennpunktsachse. Unmittelbar fließen dann aus derselben Konstruktion die Sätze in 6, 7, 9 unten.

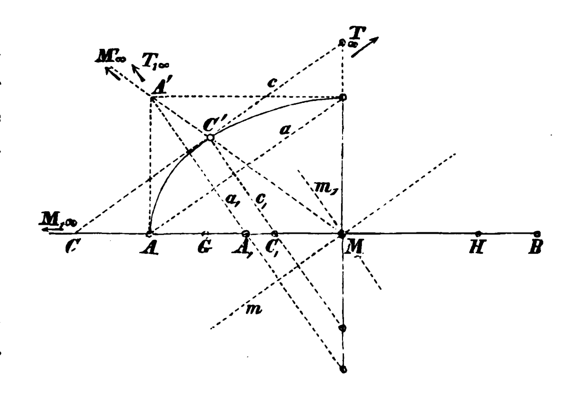


Faßt man aber den Kegelschnitt nicht als Zentralkollineation des Kreises, sondern als gegebenes Erzeugnis projektivischer Gebilde, so erhält man die Konstruktion und die Eigenschaften der Brennpunkte auch direkt aus derselben Definition — als Scheitel rechtwinkliger Involutionen harmonischer Polaren; die Direktrixen findet man als ihre Polaren.

Da nämlich die Involution rechter Winkel keine reellen Doppelstrahlen hat, so liegen die Brennpunkte im Innern des Kegelschnittes, d. h. in dem Teile seiner Ebene, durch welchen keine Tangenten an ihn gezogen werden können, und die Direktrixen haben also keine reellen Punkte mit dem Kegelschnitt gemein. Da ferner die Involution rechter Winkel keine schiefwinkligen Paare zuläßt, so können die Brennpunkte nur in den Achsen liegen, weil sonst der entsprechende Durchmesser und die konjugierte Sehne ein schiefwinkliges Paar bilden. Man findet sie wie

folgt: Einem Büschel T_∞ von parallelen zu den Achsen geneigten Geraden $a, b, c, \ldots$ in den folgenden Figuren entspricht die ihm projektivische Reihe der Pole $A', B' C', \ldots$ in dem seiner Richtung T_∞ konjugierten Durchmesser; dem Durchmesser m unter ihnen die Richtung M' dieses konjugierten Durchmessers; der unendlich fernen Geraden, insofern sie jenem Büschel T_∞ angehört, der Mittelpunkt M des Kegelschnittes. Fällt man nun von den Punkten $A', B', C', \ldots M, \ldots$ die Normalen $a_1, b_1, c_1, \ldots m_1$ zu den entsprechenden Sehnen $a, b, \ldots$, so ist das Büschel T_1 derselben dem der letzten projektivisch und die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen bilden eine gleichseitige Hyperbel; die Schnittpunkte mit den Achsen des Kegelschnittes aber zwei projektivische Reihen $A, B, \ldots; A_1, B_1 \ldots$ in diesen, in welchen der Mittelpunkt M und der bezügliche unendlich entfernte Punkt M_1 sich vertauschbar entsprechen, also eine Involution in jeder Achse. (M ist das perspektivische Zentrum der Büschel T, T_1 § 32, 4). Ist G ein Doppelpunkt in einer dieser Involutionen oder ein Schnittpunkt einer Achse mit besagter Hyperbel, so bilden der durch ihn gehende Strahl g des Strahlenbüschels T





und der entsprechende g_1 des Normalenbüschels T_1 ein Paar in der Involution harmonischer Polaren, die der Kegelschnitt an ihm bestimmt; dieselbe ist also rechtwinklig, weil sie zwei rechtwinklige Paare enthält (§ 31, 6).

Wenn die Richtung T_∞ aus der der einen in die der andern Achse übergeht — in welchen Grenzen die Achsen selbst als die gleichseitige Hyperbel der Konstruktion erscheinen —, so dreht sich diese Hyperbel um die Brennpunkte des Kegelschnitts, indem ihre Polinvolutionen in den Achsen dieselben bleiben; da sie dabei durch jeden Punkt der Ebene geht, so ist das Rechtwinkelpaar der Involution harmonischer Polaren des Kegelschnittes an jedem Punkt der Ebene das gemeinsame Paar der über den Brennpunktsinvolutionen in den Achsen stehenden Büschel (s. unten 5).

Die Involutionen $A, A_1, \ldots$ in den Achsen bestimmt — weil ihr Zentralpunkt M bekannt ist — je ein einziges Paar, welches durch eine Tangente t (c unten S. 225) des Kegelschnittes und die Normale t_1 (c_1 in der Figur) zu derselben im Berührungspunkte oder durch eine Sehne c und die Normale zu ihr aus ihrem Pol C' (oben S. 225) erhalten wird. In den Figuren sind die durch die Scheitel gehenden Sehnen benutzt; die Sehne a durch den Scheitel A liefert durch die Normale a_1 aus A' den entsprechenden Punkt A_1, etc. — natürlich ein Paar in jeder Achse. Von den Involutionen beider Achsen hat immer die eine sich trennende und die andere sich nicht trennende Paare; nur die letzte hat reelle Brennpunkte G, H, die vom Mittelpunkt M bez. von den Scheiteln A, B gleichweit entfernt liegen. Die Kreise über den Strecken AA_1, CC_1 in dieser Achse als Durchmesser haben aus dem Mittelpunkt M gleiche Tangentenlänge oder denselben Orthogonalkreis, der G und H ausschneidet (§ 15); die Kreise über den entsprechenden Strecken der andern Achse, schreiben wir etwa $C^* C_1^*$, gehen sämtlich durch G und H und der aus M durch G und H beschriebene liefert das symmetrische Paar der Involution; denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CC^*M und $C_1^* C_1 M$, welche die c und c_1 mit den Achsen bilden, folgt sofort $MC : MC^* = MC_1^* : MC_1$ oder $MC \,.\, MC_1 = MC^* \,.\, MC_1^*$. An diese Entwicklung schließen sich unmittelbar die Sätze in 4 und 5, etc.

B. 1) Dem Kreise entspricht für einen Peripheriepunkt als Zentrum und den zum Radius desselben rechtwinkligen Durchmesser

als Gegenachse seines Systems eine gleichseitige Hyperbel, mit einem Scheitel im Zentrum; ist die Kollineation involutorisch, so entsprechen den Durchmessern des Kreises die zur Hauptachse parallelen Sehnen der gleichseitigen Hyperbel, sodaß die Schnittpunkte solcher Sehnen in der Hyperbel am Scheitel rechte Winkel bestimmen. Oder wenn zwei rechte Winkel in einer Ebene sich so um ihre Scheitel drehen, daß zwei Schnittpunkte ihrer Schenkelpaare in der senkrechten Halbierungslinie zwischen ihren Scheiteln liegen, so beschreiben die beiden andern die gleichseitige Hyperbel mit diesen Scheiteln.

Die Kollinearfiguren einer gleichseitigen Hyperbel für ihren Mittelpunkt als Zentrum sind Kegelschnitte, für die der Ortskreis der Schnitte rechtwinkliger Tangentenpaare durch jenen geht. Wie speziell für q', r als die Scheiteltangenten der Hyperbel? Man betrachte auch im gleichen Falle die Kollinearfigur des Kreises und erläutere die Beziehungen der beiden Parabeln, die sich für dieselben $\mathfrak{C}$, q' und r ergeben.

2) Ihrer Definition gemäß können die Brennpunkte angesehen werden, als die beiden andern Paare der Gegenecken des nicht reellen Vierseits, welches die Tangentenpaare von den Kreispunkten der Ebene an den Kegelschnitt miteinander bilden; die zugehörige Direktrix ist die Berührungssehne der jedesmal entsprechenden beiden Tangenten (§ 31, 8).

Wenn der Kegelschnitt die Kreispunkte der Ebene enthält, so fallen die Brennpunkte mit seinem Mittelpunkt zusammen; die Involution seiner konjugierten Durchmesser ist rechtwinklig, er ist ein Kreis. Die Tangente des Kreises ist rechtwinklig zum Radius des Berührungspunktes — weil parallel zum konjugierten Durchmesser, oder weil die Normale zum Mittelpunkt gehen muß als der Vereinigung der beiden Doppelpunkte der Brennpunktsinvolution in einem Durchmesser.

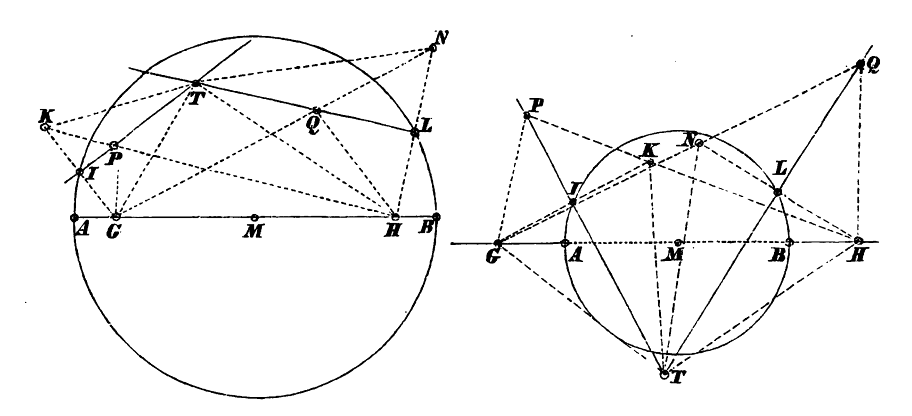
3) Die Brennpunktsinvolution der Parabel ist eine symmetrische Involution mit dem Brennpunkt als Symmetriemittelpunkt. Der Radius vector ist somit bei ihr dem durch die Tangente in der Achse bestimmten Abschnitt vom Brennpunkt gleich.

Man kennt von einer Parabel vier Tangenten und bestimme daraus ihre Achsenrichtung (d. h. den Berührungspunkt der unendlich fernen Tangente), die Scheiteltangente und den Scheitel (d. h. die zur Achsenrichtung normale Tangente und den Berührungspunkt derselben), die Achse und den Brennpunkt.

4) Die Brennpunktsinvolution in der Nebenachse erscheint von jedem reellen Brennpunkte aus durch eine rechtwinklige Involution von Strahlen projiziert.

5) Ist T ein Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes, so gehen die Rechtwinkelstrahlen der ihm entsprechenden Involution harmonischer Polaren durch zwei entsprechende Punkte der Brennpunkts-

involution; sie halbieren also zugleich die von den Doppelstrahlen der Involution harmonischer Polaren, d. i. den Tangenten von T aus gebildeten Winkel und die Winkel der Strahlen, welche von T nach den Brennpunkten G und H gehen, weil sie mit diesen ein harmonisches Büschel bilden müssen. Also: Die Tangenten von einem Punkte an einen Kegelschnitt und die Verbindungslinien desselben mit seinen Brennpunkten bilden Winkel von denselben Halbierungslinien oder jene machen mit diesen gleiche Winkel. Die Tangentenpaare aller Kegelschnitte mit denselben Brennpunkten aus einem Punkte ihrer Ebene bilden also eine symmetrische Involution (§ 31, 11). Ihre rechtwinkligen Doppelstrahlen sind die Tangenten der den Punkt enthaltenden konfokalen Kegelschnitte. Die Tangente und die Normale in einem Punkte des Kegelschnittes halbieren die Winkel der Brennstrahlen (Radienvektoren) des Punktes. (Vergl. 2.) Zwei Tangenten des



Kreises bilden gleiche Winkel mit demjenigen Durchmesser, der nach ihrem Schnittpunkt geht.

6) Das Stück einer Kegelschnittstangente zwischen ihrem Berührungspunkt und der Direktrix erscheint vom zugehörigen Brennpunkt aus unter rechtem Winkel; denn die dasselbe von da aus projizierenden Strahlen sind konjugiert in der Rechtwinkelinvolution harmonischer Polaren, weil der Pol des Brennstrahls im Schnitt der Tangente mit der Direktrix liegt. Die Zentralkollineation nach Maßgabe des Textes läßt diesen Satz hervorgehen aus dem Satze, daß der Radius des Berührungspunktes normal ist zu dem der Tangente parallelen Durchmesser. (Vergl. Figuren auf S. 225.) Man leite ferner aus ihr ab, daß die algebraische Summe der Reziproken konjugierter Sehnen des Kegelschnittes durch einen seiner Brennpunkte konstant ist; also speziell, daß zueinander rechtwinklige Fokalsehnen der gleichseitigen Hyperbel gleich lang sind.

7) Durch die Zentralkollineation im Text wird aus dem Schluß von 5), wonach die Radien der Berührungspunkte von zwei Kreistangenten gleichgeneigt sind zu dem Radius ihres Schnittpunktes, der Satz: Die Strahlen, welche die Berührungspunkte von zwei Kegelschnittstangenten mit einem Brennpunkt verbinden, machen gleiche Winkel mit dem Strahl von diesem nach ihrem Schnittpunkt. Dieselbe liefert ferner den Zusatz: Der Schnittpunkt der Berührungssehne zweier Tangenten mit der Direktrix und der Durchschnittspunkt der Tangenten selbst bestimmen mit dem entsprechenden Brennpunkt zwei zueinander rechtwinklige Gerade. — Strahlen seiner Polarinvolution.

8) Wenn man von den Brennpunkten G, H eines Kegelschnittes mit der Hauptachse AB und dem Mittelpunkt M auf seine ihn in P und Q berührenden Tangenten vom Schnittpunkte T aus die Normalen GJ und HL fällt, und dieselben nach K und N um ihre eigene Länge verlängert (Figuren auf S. 228), so ist $\triangle HKT \cong \triangle NGT$ wegen

$$TH = TN, \quad TK = TG \quad \text{und} \quad \angle HTK = \angle NTG; \quad \text{also}$$

$$HK = NG \quad \text{oder} \quad HP + GP = GQ + HQ \text{ in Figur links, und}$$

$$HP - GP = GQ - HQ \text{ in Figur rechts.}$$

Läßt man den Punkt T die Tangente TP durchlaufen, so erhellt der Satz: Die Summe der Radienvektoren eines Punktes der Ellipse, resp. die Differenz derselben für einen Punkt der Hyperbel, ist konstant; nämlich

$$= 2\,MJ = 2\,ML = HA \pm GA = AB,$$

also der Hauptachse gleich.

Dasselbe folgt aus der Fundamentaleigenschaft der Brennpunkte im Text so: Nehmen wir die Sehne PQ des Kegelschnittes parallel AB, so ist für P und Q bez. $PG = QH$, $PH = QG$ und für g und h als die den Brennpunkten G, H entsprechenden Direktrixen

$$GP = e\,.\,(g, P), \quad PH = e\,.\,(P, h) \text{ d. h. } GP + PH = \text{const.} = e\,.\,(g, h).$$

Daraus folgt aber die Gleichheit der Winkel, welche die Radienvektoren des Berührungspunktes mit der Tangente bilden. Denn für P und P' als zwei benachbarte Punkte der Kurve ist

$$GP + PH = GP' + P'H;$$

trägt man nun GP in GR auf GP' und HP' in HR' auf GP ab, so ergibt sich durch Subtraktion von $GP = GR$ und $P'H = R'H$, $PR' = P'R$; und wegen PP' als gemeinschaftlicher Seite, und weil in der Grenze $\angle PRP' = \angle PR'P' = 90^0$ sind, ist $\angle PP'R = \angle P'PR'$.

9) Aus den Figuren der vorigen No. folgt sofort $\angle PGT = \angle TGQ$, der erste Satz von 7). Fügt man eine dritte Tangente hinzu, so folgt der Satz: Das zwischen zwei festen Tangenten ent-

haltene Stück einer beweglichen Tangente desselben Kegelschnittes erscheint von jedem Brennpunkt aus unter konstantem Winkel — ein Satz, der durch die Zentralkollineation des Textes unmittelbar erhalten wird aus dem zweiten Fundamentalsatz über den Kreis in § 24.

Mit andern Worten: Die projektivischen Reihen, welche in zwei Tangenten eines Kegelschnittes von den übrigen gebildet werden, bestimmen mit den Brennpunkten projektivisch gleiche Büschel von gleichem Sinn; in der Tat gehen die Doppelstrahlen solcher Büschel, d. i. die Tangenten vom Brennpunkt aus, nach den Kreispunkten der Ebene. (§ 31, 11.) Wenn die Berührungssehne der Träger der projektivischen Reihen durch einen Brennpunkt geht, so ist der Drehungswinkel zwischen den zugehörigen projektivisch gleichen Büscheln von einerlei Sinn 90^0 und sie bilden die Polarinvolution des Brennpunktes. So auch beim Kreis für parallele Tangenten.

10) Die Fußpunkte der Normalen von den Brennpunkten auf die Tangenten eines Kegelschnittes liegen in der Peripherie eines Kreises (Hauptkreis), der seine Hauptachse zum Durchmesser hat; denn $MJ = ML = MA = MB$.

Man konstruiert nach diesen Relationen die Tangenten aus einem Punkt an den durch die Hauptachsenlängen und die Brennpunkte bestimmten Kegelschnitt.

Da im Falle der Parabel r den Originalkreis berührt, also das Segment von r zwischen zwei parallelen Kreistangenten von $\mathfrak{C}$ als Kreismittelpunkt aus unter rechtem Winkel erscheint (§ 24), während ihre diesen Kollineationsstrahlen parallelen Bilder in q' konvergieren, so ist die Direktrix der Parabel der Ort der Schnittpunkte rechtwinkliger Tangentenpaare derselben. Die Direktrix im Endlichen bildet mit der unendlich fernen Geraden als der Direktrix des unendlich fernen Brennpunktes (als Parabeltangente in ihm) zusammen den Ortskreis der Scheitel symmetrischer Polarinvolutionen.

11) Man konstruiere den Kegelschnitt von gegebenen Brennpunkten G, H zu einer gegebenen Tangente t — durch Tangenten und deren Berührungspunkte.

Es kann nach 10) geschehen, indem man aus der Mitte M zwischen den Brennpunkten G, H durch die Fußpunkte der von ihnen zur Tangente t gefällten Perpendikel den Hauptkreis beschreibt; jedes Paar durch die Brennpunkte gezogener paralleler Sehnen in diesem bestimmt ein Rechteck, dessen neue Seiten Tangenten des Kegelschnittes sind, und die orthogonal-symmetrischen eines Brennpunktes in Bezug auf sie bestimmen ihre Berührungspunkte durch Verbindung mit dem andern Brennpunkt.

Nach dem Früheren ist die Aufgabe aber die Bestimmung aus den Involutionen harmonischer Polaren um G, H und einer Tangente t. Zunächst ist die Richtung der Normalen zu GH der Pol

der Geraden GH und die Polaren g und h von jenen gehen durch ihn; sodann erhält man das gemeinschaftliche Paar der in t durch beide Rechtwinkelinvolutionen erzeugten Involutionen mittelst des Kreises durch G, H, der seinen Mittelpunkt in t hat, also im Schnitt mit der Nebenachse des Kegelschnittes; die Perpendikel aus den Punkten des gemeinsamen Paares zur Hauptachse GH sind die Scheiteltangenten, etc.

Man erhält hiernach umgekehrt die Brennpunkte bei gegebenen Scheiteln der Hauptachse und einer Tangente als die Schnittpunkte der Hauptachse mit dem Kreise, der das zwischen den Hauptachsenscheiteltangenten enthaltene Segment der Tangente zum Durchmesser hat.

12) So wie in zentrischer Kollineation den Kreisen um das Zentrum Kegelschnitte mit ihm als Brennpunkt und den Kegelschnitten mit ihm als Brennpunkt wieder solche entsprechen, so auch in kollinearen ebenen Systemen überhaupt. Endlich entspricht aber jedem Kegelschnitt des einen Systems, der die beiden Lagen des Zentrums in ihm zu Brennpunkten hat, ein Kegelschnitt des andern mit seinen Zentren als Brennpunkten. Ist eine Tangente des Kegelschnittes im ersten System gegeben, so bestimmt ihre entsprechende Gerade im zweiten als Tangente den entsprechenden Kegelschnitt. In zwei kollinearen Ebenen liegen zwei entsprechende Schaaren konfokaler Kegelschnitte mit den zugehörigen Lagen der Zentra als reellen Brennpunkten. Jeder Ellipse der einen Schaar entspricht eine Hyperbel der andern.

13) Durch einen Punkt gehen zwei Kegelschnitte von gegebenen Brennpunkten (Ellipse und Hyperbel), die sich rechtwinklig durchschneiden. (Vergl. 5.) Es ist Konstruktion aus vier Tangenten und einem Punkte. (§ 25, 4 und § 31, 3.)

Die entsprechenden konfokalen Schaaren kollinearer Ebenen in 12) teilen also die gesamten Ebenen in entsprechende konfokal begrenzte rechtwinklige Vierseite.

14) Man konstruiere den durch drei Tangenten a, b, c und einen Brennpunkt F bestimmten Kegelschnitt (9); man konstruiere den Kegelschnitt aus Brennpunkt F und zwei Tangenten a, b nebst dem Berührungspunkt A der einen; insbesondere aus Scheitel, Brennpunkt und Tangente. Die Angabe eines Brennpunktes F ist äquivalent der Angabe von zwei Tangenten (9) und man konstruiert daher in den vorigen Fällen aus fünf Tangenten.

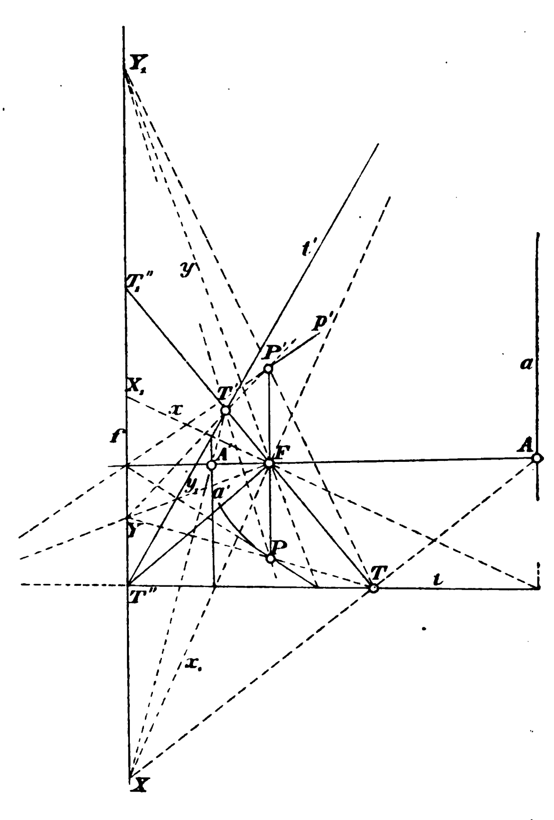
Der besondere Fall der Parabel aus Brennpunkt und zwei Tangenten oder einer Tangente mit Berührungspunkt ist bemerkenswert. Die direkte Konstruktion nach der Regel von § 32, 14 oben liefert die Sätze wieder: von der Direktrix als Ort der Schnittpunkte rechtwinkliger Tangentenpaare; von der Scheiteltangente als Ort der Fußpunkte der Perpendikel vom Brennpunkt auf die Tangenten (vergl. für beide den Schluß von B. 1) in § 24) und dem

Scheitel als Mitte zwischen Brennpunkt und Direktrix. Der sich nach 9) um den Brennpunkt drehende Winkel, dessen Schenkel aus den Tangenten die Schnittpunkte mit neuen Tangenten ausschneiden, ist hier dem Winkel der gegebenen Tangenten selbst gleich; daher schneidet jeder den Brennpunkt und den Schnittpunkt der Tangenten enthaltende Kreis aus diesen zwei Punkte einer neuen Tangente aus und man erhält sämtliche Tangenten der Parabel durch die Kreise dieses Büschels. Umgekehrt geht der einem aus Tangenten der Parabel gebildeten Dreieck umgeschriebene Kreis durch den Brennpunkt der Parabel; man findet also den Brennpunkt der Parabel zu vier Tangenten als den gemeinschaftlichen Schnittpunkt der vier Kreise, welche den aus den vier Tripeln der Tangenten gebildeten Dreiecken umgeschrieben sind. Die Fußpunkte der Perpendikel von diesem Punkte auf die vier Geraden liegen in der Scheiteltangente unserer Parabel. (Für eine Gruppe von drei Parabeltangenten ist jeder Punkt des ihrem Dreieck umschriebenen Kreises Brennpunkt und die Verbindungslinie der Fußpunkte der von ihm auf sie gefällten Perpendikel Scheiteltangente einer zugehörigen Parabel.) Zugleich liegen die Höhenschnittpunkte der vier Dreiecke in der Direktrix der Parabel und die Diagonalenmitten des Vierseits in einer Parallelen zu ihrer Achse; das letzte nach § 31, 7; das erste als ein Spezialfall des Brianchonschen Satzes, weil zu drei Parabeltangenten t_1, t_2, t_3 zwei der mit ihnen in der Direktrix sich schneidenden normalen Tangenten t_1', t_2', t_3' und die unendlich ferne Gerade u ein umgeschriebenes Sechsseit $t_1 t_2 t_3 t_3' u t_1'$ bilden, sodaß die Geraden $t_1 t_2$, $t_3' u$; $t_2 t_3$, $t_1' u$; $t_3 t_3'$, $t_1 t_1'$ d. h. zwei Höhen und die Direktrix sich in einem Punkte schneiden.

(15.) Die Kegelschnitte einer Ebene, die einen Brennpunkt gemein haben, können als das dualistische Gegenbild der Kreise der Ebene angesehen werden; den Kreisen durch einen Punkt entsprechen diejenigen unter ihnen, die eine gemeinsame Tangente haben, speziell die Parabeln, etc. Die Angabe der Direktrix entspricht der Angabe des Mittelpunktes beim Kreise. Sowie die konzentrischen Kreise der Ebene die zur Tafel symmetrischen Punktepaare in der Tafelnormale durch den Mittelpunkt darstellen, sodaß ihr Tafelabstand dem Radius des Bildkreises gleich ist, so können die Kegelschnitte mit dem festen Brennpunkt und gemeinsamer Direktrix die tafelsymmetrischen Paare der durch diese Direktrix gehenden Ebenen repräsentieren, deren Exzentrizität mit dem Modul der Ebene übereinstimmt — mit mannigfachen nützlichen Ergebnissen. Die vollständige dualistische Umbildung der Methode der Zyklographie würde eine Abbildung der Ebenen des Raums durch die Elemente eines Bündels liefern, die von geringerer Anschaulichkeit ist als diese selbst.

16) Aus einem Brennpunkte F, der zugehörigen Direktrix f und einem Punkte T oder einer Tangente t konstruiert man den Kegelschnitt

a) allgemein projektivisch nach § 32, 18. Man erhält insbesondere T' auf TF mittelst des zur Normale von F auf f d. h. zur Hauptachse symmetrischen T^* zu T in der Geraden von ihm nach dem Schnittpunkt der Hauptachse mit f (daraus auch $T^{*\prime}$ in T^*F); oder noch besser man schneidet die Parallele aus T zu f mit der in F auf TT' errichteten Normale $T''F$ und trägt die Strecke von da bis T nach oben, um den Endpunkt mit T'' zu verbinden — denn diese Gerade ist die Tangente t' in T'. Damit hat man zu den erzeugenden Büscheln T, T' die erzeugenden Reihen t, t' des Kegelschnittes (§ 32, 13). Jeder Kreis aus einem Punkte von f durch F liefert dort die Punkte eines Paares Z, Z_1 der Polinvolution und damit die zugehörigen Strahlen z_1, z der Polarinvolution um F; die Geraden TZ, $T'Z_1$ und wieder $TZ_1, T'Z$ schneiden sich in zwei Punkten des Kegelschnittes auf einer Geraden durch F, deren Tangenten durch die Punktepaare bez. $tz, t'z_1$ und $tz_1, t'z$ gehen und sich in der Direktrix im Pol jener Geraden schneiden und so das neue Paar der Involution liefern, mit dem man weiter konstruiert. Nach unserem Ausgangspunkt im Texte kann man aber



b) den Kegelschnitt auch konstruieren als die zentrische Kollineation zu dem um F durch T beschriebenen Kreise für f als die Gegenachse im Bilde und die Parallele durch T zu derselben als Kollineationsachse; oder indem man mit K als einem um F mit

beliebigem Radius beschriebenen Kreise für f als q' zu T als Punkt des Bildes einen seiner Schnitte mit dem Durchmesser FT als Original festsetzt; bez. zur Geraden t als Tangente des Bildes eine der beiden Tangenten von K als Original wählt, die dem Strahl aus F nach ihrem Schnitt mit q' parallel sind.

17) Man bestimmt aber aus F, f, T oder t auch direkt a) die Scheitel A, A' des Kegelschnittes, b) seine Parametersehne PP', und mit ihr im Falle der Hyperbel die Asymptoten, etc. Denn a) das Paar X, X_1 in f mit dem Mittelpunkt T'' gibt die Scheitel als TX, $T'X_1$ und TX_1, $T'X$ mit ihren Tangenten $tx, t'x_1$ und $tx_1, t'x$ — da diese Tangenten die zu f notwendig parallelen Perspektivachsen der harmonischen Büschel aus T'' und F sind, die sich in ihnen schneiden. Sodann b) die Endpunkte P, P' der Parametersehne entstehen aus dem Paare Y, Y_1 der Involution in f, welches in T_1'' (auf FT') seine Mitte hat: YT, Y_1T' ist P und Y_1T, YT' ist P' und PP' ist Perspektivachse der harmonischen Büschel aus T und T' über der Halbierungsgruppe YY_1T_1''. Benutzt man die Parametersehne PP' (Länge $2p$) zur Bestimmung, so führen die ähnlichen Dreiecke PUP' und ZUZ_1, welche bei der Bestimmung eines Punktes U aus irgend einem Paar Z, Z_1 der Involution durch $P'Z$, PZ_1 entstehen, sofort zu der Proportion

$$2p : ZZ_1 = \{(F, f) - (U, f)\} : (U, f)$$

für (U, f) u. s. w. als Zeichen für die Entfernung des Punktes U von der Geraden f. Und für C als Mitte von ZZ_1 und D und E als Fußpunkte bez. der Direktrix und ihrer Parallelen durch U in der Brennpunktsachse gibt das Paar ähnlicher Dreiecke FCD und FUE

$$2(F, f) : ZZ_1 = \{(F, f) - (U, f)\} : (U, f)$$

weil $ZZ_1 = 2CF$ ist; woraus durch Division folgt

$$p : (F, f) = UF : (U, f) = e,$$

der numerischen Exzentrizität im Texte.

Ist diese größer als Eins, sodaß der Kreis aus F mit dem Radius FP die Direktrix in zwei Punkten trifft, so liefern die Schnittpunkte als Mitten zwei Paare, etwa V, V_1 und W, W_1 bez. v_1, v, w_1, w der Involutionen in f und bei F, aus deren Benutzung einerseits die unendlich fernen Punkte der Hyperbel und ihre Tangenten also die Asymptoten hervorgehen, anderseits die beiden Punkte, deren Tangenten sich mit den Asymptoten auf der Direktrix f (und auf der Parametersehne) begegnen; man erkennt dabei, daß diese Punkte in den zu den Asymptoten parallelen Radienvektoren die Mitten zwischen Brennpunkt und Asymptote sind; die Schnitte der Asymptoten mit diesen Tangenten zugleich die Fußpunkte der Normalen vom Brennpunkt auf die Asymptoten, die Schnittpunkte

der Scheiteltangenten und Direktrixen mit den Asymptoten auf einem Kreis bez. durch die Brennpunkte oder die Scheitel, etc.

18) Eine Parabel ist durch Brennpunkt und Direktrix allein bestimmt; die Mittellinie zwischen beiden ist die zur unendlich fernen Geraden harmonisch konjugierte Tangente im endlichen Scheitel; wenn man durch ihre Schnittpunkte mit zwei zueinander rechtwinkligen Strahlen aus dem Brennpunkt Parallelen zu diesen zieht, so sind diese zwei neue auf der Direktrix sich durchschneidende Tangenten, und in den aus ihren Schnittpunkten mit der Direktrix zu derselben errichteten Perpendikeln liegen ihre Berührungspunkte und überdies in der Normale in F zum Radiusvektor ihres Schnittpunktes.

19) Drei Punkte A, B, C und ein Brennpunkt F bestimmen vier Kegelschnitte; nach § 33, 22 konstruiert man die vier Lagen der zugehörigen Direktrix.

Nimmt man dagegen einen Kreis K aus dem Brennpunkt als Original, so ermittelt man die Kollineationsachse s und die Gegenachse q' der entsprechenden Kollineation, diese letzte in vier-, die erste in achtfacher Art — und konstruiert die gesuchten Kegelschnitte als die vier entsprechenden Kreisbilder. (Die zwei Kollineationsachsen für jedes derselben liefern die beiden konjugierten Sehnen des Kreises und seines Bildes, welche zur Achse des letzten normal sind.) Es ist leicht, diese Konstruktionen auf die Fälle anzupassen, wo statt dreier Punkte zwei Punkte mit der Tangente des einen, also z. B. für die Parabel ein Punkt und die Achsenrichtung, für die Hyperbel eine Asymptote und ein Punkt, für die gleichseitige Hyperbel die eine Asymptote neben dem Brennpunkt gegeben sind.

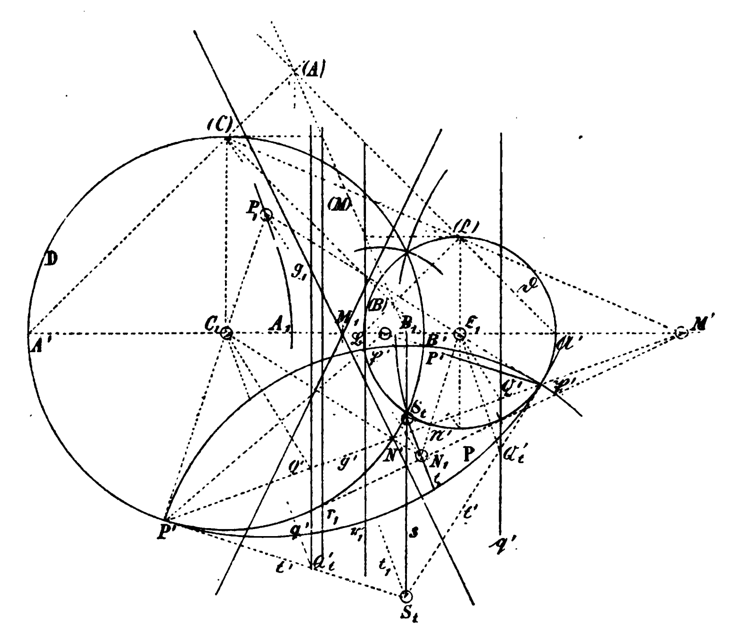
20) Die Direktrix f und ihre Involution bestimmen zwei zu ihr symmetrische Lagen F, F^* des entsprechenden Brennpunktes. Mit einem Peripherieelement T bez. t werden also zwei Kegelschnitte T, F, f bez. $T, F^* f$, etc. entstehen. Man verzeichne sie und füge das Kegelschnittpaar durch T mit den Brennpunkten F, F^* hinzu.

21) Man soll die Projektionen der Kegelschnitte in der Ebene sq' ermitteln, welche durch drei Punkte von den Projektionen A', B', C' und einen Brennpunkt von der Projektion F' bestimmt sind (19).

Nach Bestimmung des Kollineationszentrums $\mathfrak{C}$ der Ebene aus Fluchtlinie und Distanzkreis verzeichnet man Paare der Bilder rechtwinkliger Richtungen auf q' als Schnitte der Schenkel eines sich um $\mathfrak{C}$ als Scheitel drehenden rechten Winkels und verbindet sie mit F' durch die Strahlenpaarbilder der zugehörigen Polarinvolution. Man erhält dann nach § 33, 22 die vier Lagen der Polare f' von F' in Bezug auf das gesuchte Kegelschnittbild und damit dieses selbst wie im Textschluß von § 32.

22) Die Projektion des Kegelschnittes in sq' zum Bilde seines Brennpunktes F' und seiner zugehörigen Direktrix f' aus gegebenem Peripherieelement erfordert wieder die Eintragung der Paare der Bilder rechtwinkliger Richtungen durch 𝕮 auf q'; die von ihnen nach F' gehenden Strahlenpaare bilden die Polarinvolution der Projektion um F' und ihre Schnittpunkte mit f' die zugehörige Polinvolution, sodaß das Kegelschnittbild nach § 32 konstruiert wird. Damit sind Brennpunkt und Direktrix als Bestimmungselemente der Projektion des Kegelschnittes verwendbar.

(36.) Die Eigenschaften der Kegelschnitte in Beziehung zu den Brennpunkten und Direktrixen werden nach der Methode der Zyklographie — vergl. § (7) — in einfacher und lehrreicher Art abgeleitet, wie hier kurz entwickelt werden soll. Nach dieser Methode ist der Distanzkreis **D** der Zentral-



projektion nicht nur der Basiskreis eines gleichseitigen Rotationskegels von der Achse CC_1, sondern auch der Bildkreis seiner Spitze oder seines Mittelpunktes C, während zugleich die ihn berührenden Kreise in der Tafel die Punkte seiner Oberfläche abbilden; nämlich jeder solche Kreis denjenigen Punkt, welcher auf der nach seinem Berührungspunkt gehenden Mantellinie des Kegels und zugleich in dem auf der Tafel in seinem

Mittelpunkt errichteten Perpendikel liegt. Eine Reihe von Kreisen, welche **D** berühren und deren Mittelpunkte zugleich mit ihren Berührungspunkten stetig aufeinanderfolgen, stellt daher eine auf dem Mantel des Kegels C, **D** liegende Kurve dar; und diese Kurve ist speziell ein ebener Querschnitt des Kegels, wenn die bezeichneten Kreise eine gerade Linie oder einen andern festen Kreis unter konstantem Winkel schneiden. Wir erörtern hier zunächst das Schneiden unter bestimmtem Winkel mit einer Geraden und die Berührung mit einem zweiten festen Kreis, weil diese den Eigenschaften von Brennpunkt und Direktrix entsprechen; weiterhin — § (36^e) — werden wir sehen, daß die Bedingung, ein Kreis solle zwei feste Kreise der Ebene unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden, ebenfalls auf Kegelschnitte führt, etc.

Eine durch Spur s und Fluchtlinie q' bestimmte Ebene (Figur S. 236) bestimmt mit dem Kegel C, **D** einen Kegelschnitt, dessen Bildkreissystem und Tangentensystem wir konstruieren, indem wir von jedem in einem Punkte P' des Distanzkreises zentral projizierten Punkte P desselben und seiner in der zugehörigen Tangente t' von **D** projizierten Tangente t das Perpendikel und die Normalebene zur Tafel mit dem Fußpunkt P_1 bez. der Spur t_1 ermitteln und den Kreis **P** aus P_1 durch P' beschreiben; ziehen wir also in P' an **D** die Tangente t' mit dem Fluchtpunkt Q_t' in q' und dem Durchstoßpunkt S_t in s, so ist t_1 die durch S_t zu $C_1 Q_t'$ gezogene Parallele und P_1 ihr Schnittpunkt mit dem Strahl $C_1 P'$. Der Ort von P_1 und die Enveloppe von t_1 ist der zum Kreis **D** für seinen Mittelpunkt C_1 als Zentrum und die Spur s der Ebene als Achse der Kollineation sowie ihre Fluchtlinie q' als Gegenachse im System des Kreises korrespondierende Kegelschnitt; C_1 ist also ein Brennpunkt desselben nach § 36. Der Kreis **P** um P_1 und durch P' ist der Bildkreis von P und da das Verhältnis des senkrechten Abstandes von P_1 von der Spur s zu seinem Radius die Kotangente des Neigungswinkels α der Ebene zur Tafel ist, so schneiden nach § (7) die Bildkreise des Kegelschnittes diese Spur unter konstantem Winkel σ mit $\cos\sigma = \operatorname{cotan}\alpha$. Man erhält insbesondere für $\alpha = 45^0$ und die Parabel, weil q' den Distanzkreis berührt, $\sigma = 0^0$ oder 180^0, d. h. die Bildkreise der Parabelpunkte berühren die Spur; da-

gegen für $\alpha > 45^0$ oder q' den Distanzkreis schneidend die Hyperbel, wie es die Figur auf S. 236 zeigt, und σ reell, weil $\cos\sigma < 1$; endlich für $\alpha < 45^0$ oder q' den Distanzkreis nicht treffend die Ellipse und σ nicht reell, weil $\cos\sigma > 1$ ist. Für die Grenzfälle $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ entspringt der zu D konzentrische Kreis als der Ort der Mittelpunkte gleicher Kreise, welche D auf bestimmte Art berühren, und daher sämtlich von einem zweiten Kreise in der andern Art berührt werden, und die gerade Linie s als Ort der Zentra von Kreisen, welche D berühren und s orthogonal durchschneiden oder, wie unmittelbar ersichtlich, welche zwei gleiche Kreise (D und den für s als Achse zu ihm orthogonal symmetrischen D^1) gleichartig berühren. Die Gerade ist die Orthogonalprojektion der gleichseitigen Hyperbel mit zur Tafel normaler Hauptachse in der Ebene sq'.

Verschiebt man die Tafel parallel zu sich selbst bis C, sodaß C_1 in ihr unverändert bleibt, so ist dies auch mit allen P_1 und t_1 der Fall, indes die Spur s der Schnittebene in die Gegenachse r_1 oder die Orthogonalprojektion ihrer Verschwindungslinie übergeht, der Basiskreis des Kegels C, D zum Punkte C_1 wird und die Radien aller Bildkreise P um die Distanz d ab- oder zunehmen, je nachdem sie zu Punkten gehören, die ursprünglich auf derselben Seite der Tafel mit dem Zentrum lagen oder nicht. Dann gehen alle Bildkreise der Punkte des Kegelschnittes durch seinen Brennpunkt C_1 und schneiden die Gerade r_1 unter dem konstanten Winkel σ, oder für alle Punkte P_1 besteht dasselbe Verhältnis ihrer Abstände von der festen Geraden r_1 und von dem festen Punkte C_1 (§ 36^c), $\cot\alpha = \cos\sigma$; für Ellipse, Parabel, Hyperbel bez. größer, gleich oder kleiner als Eins. Die Gerade r_1 ist die Direktrix zum Brennpunkte C_1, als entsprechende der unendlich fernen Geraden im System des Kreises; das Stück der Kegelschnittstangente vom Berührungspunkt bis zur Direktrix erscheint am Brennpunkt unter rechtem Winkel, etc. (Vergl. § 36, 6. 7. 9.) Für $\alpha = 0^0$ erhält man den Kreis als Ort der Zentra gleicher Kreise, die durch einen Punkt gehen, mit diesem als Brennpunkt und der unendlich fernen Geraden als Direktrix; und für $\alpha = 90^0$ die gerade Linie als Ort der Zentra der durch zwei Punkte gehenden Kreise und als Orthogonalprojektion und zyklographische

Darstellung der zur Tafel orthogonalsymmetrischen gleichseitigen Hyperbel, welche den Abstand jener Punkte zu ihrer zur Tafel normalen Hauptachse hat. (Vergl. für die weitere Bedeutung dieses Spezialfalls § (36^b).)

Erinnert man sich, daß dem Pol M' von q' im Kreise D der Mittelpunkt M_1 des Kegelschnittes entspricht, so kann man statt der Tangenten t' von D die durch M' gehenden Sekanten $P'N'$ des Kreises desselben benutzen. Man erhält aus dem S und Q' einer solchen als Parallele zu $C_1 Q'$ durch S die Gerade, auf welcher im Schnitt mit den Strahlen $C_1 P'$ und $C_1 N'$ die Punkte P_1 und N_1 liegen; da die Tangenten von D in P' und N sich in einem Punkte von q' schneiden, so werden ihre entsprechenden, die Tangenten des Kegelschnittes in P_1 und N_1, parallel. Aus zwei Sekanten von D aus M', deren eine den Pol der andern enthält, entspringen zwei konjugierte Durchmesser, etc.; für q' als D reell schneidend, entsprechen den von M' an D gehenden Tangenten die sich selbst konjugierten Durchmesser; d. h. die Asymptoten und jene Tangenten sind die Bildkreise der zugehörigen Kegelschnittspunkte und zeigen den Winkel σ. Die Scheitel A_1, B_1 des Kegelschnittes, als den Punkten A', B' in dem zu s normalen Durchmesser $C_1 M'$ entsprechend, erhält man durch Umlegung mit der zugehörigen projizierenden Ebene aus (A) und (B) in $(C)A'$ und $(C)B'$ auf der Parallelen durch sein S zu der Geraden von (C) nach seinem Q'.

B. Man wende die vorigen Konstruktionen auf den Fall der Parabel oder $\alpha = 45^0$, auf den des Kreises $\alpha = 0^0$ und der geraden Linie oder $\alpha = 90^0$ an.

(36a.) Im allgemeinen, nämlich den Fall der Parabel allein ausgenommen, geht durch den betrachteten Kegelschnitt aus E und C, D noch ein zweiter gleichseitiger Rotationskegel mit zur Tafel normaler Achse. Denn zieht man in der eben betrachteten Umlegung zu $(C)(A)$ und $(C)(B)$ die Parallelen aus (B) und (A), so schneiden sich diese in der Umlegung $(\mathfrak{C})$ seiner Spitze; in dem Falle der Parabel, wo (B) unendlich fern ist, wird $\mathfrak{C}$ eine in der Ebene derselben enthaltene Richtung, die Ebene selbst ist ($\alpha = 45^0$) ein gleichseitiger Rotationskegel mit zur Tafel normaler Achse bei unendlich ferner Spitze. Und zwei solche Kegel können sich in der Tat, weil sie den unendlich fernen Querschnitt gemein haben,

nur noch in einem ebenen Querschnitt schneiden, der wegen ihrer orthogonalen Symmetrie zur Ebene ihrer beiden Achsen auf dieser Ebene normal sein muß und also, weil (A) und (B) ihm notwendig angehören, von dem betrachteten Querschnitt nicht verschieden sein kann. (Vergl. § (36^c).) In den besonderen Fällen $\alpha = 0^0$ und $\alpha = 90^0$ haben wir den Basiskreis dieses zweiten Kegels in der Erörterung des vorigen Paragraphen schon auftreten sehen; im allgemeinen Falle hat der Kegelschnitt der Punkte P_1 zur Orthogonalprojektion $\mathfrak{C}_1$ von $\mathfrak{C}$ und zu dessen Bildkreis $\mathfrak{D}$ die gleiche Beziehung, wie zu C_1 und $\mathbf{D}$. Die Parallelebenen zu seiner Ebene und zur Tafel durch $\mathfrak{C}$ schneiden die Tafel in $\mathfrak{q}'$ und diese Ebene in $\mathfrak{r}$ von der Orthogonalprojektion $\mathfrak{r}_1$; aus $\mathfrak{C}_1$, s und $\mathfrak{q}'$ wird der Ort der P_1 als zentrisch kollinear zu $\mathfrak{D}$ wieder erhalten, $\mathfrak{r}_1$ ist seine Direktrix für den Brennpunkt $\mathfrak{C}_1$ und das nämliche feste Verhältnis der Abstände; die vorher bestimmten Bildkreise berühren auch den Kreis $\mathfrak{D}$. Man sieht auch, daß M' ein Ähnlichkeitspunkt der Kreise $\mathbf{D}$ und $\mathfrak{D}$ wie in § (7) und der Durchstoßpunkt der Verbindungslinie der Kegelspitzen in der Ebene derselben ist; daß also die durch M' gehenden Geraden mit den Schnitten N', P' auf $\mathbf{D}$ und $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{P}'$ auf $\mathfrak{D}$, welche diametral gegenüberliegende Punkte N_1, P_1 und parallele Tangenten des Kegelschnittes liefern, Ähnlichkeitsstrahlen und zugleich die Spuren von Hilfsebenen für die Konstruktion der Durchdringung der Kegel sind, welche beide in geraden Linien schneiden. (Vergl. Bd. II, § 18.) Infolgedessen sind die Strahlen $C_1 P'$ und $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{N}'$ und wieder $C_1 N'$ und $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{P}'$, die Orthogonalprojektionen jener geraden Mantellinien, parallel und $P_1 N_1$ ist die neue Diagonale des aus ihnen gebildeten Parallelogramms, parallel zu $C_1 Q'$ und zu $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{Q}'$; die Tangenten in P_1 und N_1 sind normal zu dem gegen die Radienvektoren $C_1 P_1$ und $\mathfrak{C}_1 P_1$ und also auch gegen die zugehörigen Tangenten t' und $\mathfrak{t}'$ der Kreise $\mathbf{D}$, $\mathfrak{D}$ (oder die im Durchstoßpunkt S_t der Tangente der Durchdringung auf der Spur s der Ebene sich schneidenden Spuren der Tangentialebenen der Kegel längs jener Mantellinien) gleichgeneigten Ähnlichkeitsstrahl, halbieren daher die Winkel der Radienvektoren, und man hat

$$C_1 N_1 - \mathfrak{C}_1 N_1 = C_1 N' - \mathfrak{C}_1 \mathfrak{N}'$$

die Differenz der Radienvektoren ist gleich der Ra-

diendifferenz der Kreise D und 𝔇, also auch gleich der Hauptachse A_1B_1 des Kegelschnittes. (§ 36, 8; auch den Satz § 36, 10 liest man aus der Figur ab, etc.). Den Grenzlagen der schneidenden d. h. den berührenden Ähnlichkeitsstrahlen mit dem Winkel σ gegen s entsprechen die Asymptoten.

Es ist klar, daß die Kreise D und 𝔇 für M' als Zentrum und s als Achse zueinander zentrisch kollinear sind.

Verschiebt man die Tafel parallel sich selbst nach C, so erhält man die durch C_1 gehenden, r_1 unter σ schneidenden Bildkreise der P, welche den mit A_1B_1 als Radius um $\mathfrak{C}_1$ beschriebenen Kreis berühren; ebenso mit der Verschiebung nach $\mathfrak{C}$ die, welche durch $\mathfrak{C}_1$ gehen, $\mathfrak{r}_1$ unter σ schneiden und den mit A_1B_1 um C_1 beschriebenen Kreis berühren.

Wenn man den Kegelschnitt als Ort vom Mittelpunkte eines veränderlichen Kreises — Symmetrielinie zu zwei Kreisen — bezeichnet, der zwei gegebene feste Kreise gleichartig oder ungleichartig berührt, so hat man ein Hauptergebnis unserer Diskussion hervorgehoben; aber sie ist damit keineswegs erschöpft. Schneiden sich die beiden festen Kreise, so entspricht dem äußeren Ähnlichkeitspunkt und der gleichartigen Berührung eine Hyperbel von der Differenz der Radien als Hauptachse, und dem innern Ähnlichkeitspunkt unter ungleichartiger Berührung die konfokale Ellipse von der Summe der Radien. Wenn die Kreise einander ausschließen, so liefert der äußere wie der innere Ähnlichkeitspunkt bei gleichartiger bez. ungleichartiger Berührung eine Hyperbel von der Differenz bez. der Summe der Radien als Hauptachse. Wenn endlich der eine der Kreise den andern umschließt, so entspringen für beide Ähnlichkeitspunkte Ellipsen mit der Radiendifferenz bez. -summe als Hauptachsenlänge — bei konzentrischer Lage speziell zwei neue konzentrische Kreise. Wie bei den Grenzfällen der umschließenden und ausschließenden Berührung der Kreise zusammenfallende Gerade als Kegelschnitte auftreten, sei zu näherer Erläuterung empfohlen; eine Reihe von Beispielen gibt Anwendungen der entwickelten Anschauungen auf verschiedene Konstruktionsaufgaben.

B. 1) Man bestimmt die Schnittpunkte des durch die Brennpunkte C_1, $\mathfrak{C}_1$ und die Hauptachsenlänge A_1B_1 ge-

gebenen Kegelschnittes mit einer Geraden g_1, indem man den Kegelschnitt als Orthogonalprojektion der Durchdringung des gleichseitigen zur Tafel symmetrischen Rotationskegels vom Mittelpunkt $\mathfrak{C}_1$ mit einem der beiden gleichseitigen Rotationskegel über dem Kreise aus C_1 und vom Radius $A_1 B_1$ betrachtet; aus der Spur s und Fluchtlinie q' oder der Gegenachse r_1 der Ebene dieser Durchdringung erhält man die zur Orthogonalprojektion g_1 gehörige Zentralprojektion der gesuchten Schnittpunkte auf dem Kreis, also jene selbst. (Die Figur auf S. 236 enthält das nur für einen Durchmesser und Ähnlichkeitsstrahl.)

2) Für die Kegelschnitte, welche einen gegebenen Brennpunkt haben und durch drei gegebene Punkte gehen, erhält man, durch Kombination des vorigen mit der Lehre von den Ähnlichkeitsachsen von drei Kreisen in § (7), die folgende mit § 36, 19 zu vergleichende Konstruktion: Man beschreibt um die drei gegebenen Peripheriepunkte als Zentren und durch den gegebenen Brennpunkt die drei Kreise; die vier Ähnlichkeitsachsen dieser Kreise sind die diesem Brennpunkt in den vier möglichen Kegelschnitten zugehörigen Direktrixen, die r_1 der Ebenen, welche sie aus dem um den Brennpunkt als Mittelpunkt oder Spitze gebildeten gleichseitigen Rotationskegel ausschneiden.

3) Wenn von einem Kegelschnitt die Bildkreise von dreien seiner Punkte gegeben sind, so erhält man zunächst vier Ebenen durch diese Punkte mit den Ähnlichkeitsachsen der Kreise als Spuren; sodann die vier Paare von Grundkreisen der sich in dem Kegelschnitt im Raum durchdringenden Kegel als die diesen Ähnlichkeitsachsen konjugierten vier Paare Apollonischer Kreise zu den drei gegebenen Kreisen.

4) Die Bestimmung der vier Paare Apollonischer Kreise zu drei Kreisen 1, 2, 3 derselben Ebene ist aber nichts anderes als die Angabe der Bildkreise der gemeinsamen Punkte der Tripel von gleichseitigen Rotationskegeln I und I^*, II und II^*, III und III^*, welche durch diese Kreise 1, 2, 3 bez. gehen; also der Punktepaare

$$I\;II\;III,\quad I\;II\;III^*,\quad I\;II^*\;III,\quad I\;II^*\;III^* \text{ (oder } I^*\;II\;III).$$

Man wird den Kreis 1 zum Distanzkreis oder den Kegel I zum projizierenden machen und so in ihm den Fluchtkreis $\mathbf{Q}'$ aller zu betrachtenden Kegel sowie den Spurkreis $\mathbf{S}_1$ des ersten haben, indes die beiden andern Kreise die Spuren $\mathbf{S}_2$ und $\mathbf{S}_3$ der beiden Kegelpaare zwei und drei sind. Insofern wir dann annehmen, daß die Kegel II und III ihre Spitzen mit der von I auf derselben Seite der Tafel haben, erscheinen ihre Spitzen als in den äußern Ähnlichkeitspunkten der Kreise 1, 2 und 1, 3 bez. projiziert, während die innern Ähnlichkeitspunkte derselben Paare die Bilder der Spitzen der Kegel II^* und III^* oder die Durchstoßpunkte

der Verbindungslinien ihrer Spitzen mit der Spitze von I als dem Projektionszentrum sind. Die vier neuen Verbindungslinien dieser Punktepaare sind die Ähnlichkeitsachsen der drei Kreise; nach dem Texte und der Figur auf S. 236 sind die Polaren der Bilder der Spitzen der zweiten Kegel im Distanzkreis jeweilen die Fluchtlinien der bez. Ebenen der Durchdringungskegelschnitte. So sind z. B. die Polaren der bezeichneten äußeren Ähnlichkeitspunkte die Fluchtlinien der Ebenen der Kegelschnitte $I\ II$ und $I\ III$; ihr Schnittpunkt also, der Pol der äußeren Ähnlichkeitsachse im Distanzkreis, ist der Fluchtpunkt der Durchschnittslinie beider Ebenen, deren Durchschnittspunkte mit dem Kegel I, als die Schnittpunkte ihres Bildes mit dem Distanzkreis 1 projiziert, die gemeinsamen Punkte der Kegel I, II, III sind. Wir erhalten also die Mittelpunkte ihrer Bildkreise sofort, wenn wir erinnern, daß der Schnittpunkt der drei Kollineationsachsen oder Potenzlinien der gegebenen Kreise in Paaren der gemeinsame Durchstoßpunkt der Schnittlinien der Durchdringungsebenen ist. Man findet also genau als den Ausdruck der Bestimmung der fraglichen acht Durchdringungspunkte die Gergonnesche Konstruktion des Apollonischen Problems; und man übersieht zugleich, daß diese stereometrische Behandlung der Aufgabe keinerlei Schwierigkeiten in Spezialfällen zuläßt, wie sie bekanntlich bei der planimetrischen Behandlung existieren; sowie daß sie alle Grenzfälle mit Kreisen von verschwindendem oder unendlich großem Radius unter den gegebenen umfaßt. Die nähere Ausführung darf dem Leser überlassen werden.

(36^b.) Die nächste Reihe wichtiger Resultate liefert ein Spezialfall. Die Gesamtheit der Bildkreise der Punkte einer zur Tafel symmetrischen gleichseitigen Hyperbel mit zu ihr normaler Hauptachse, der wir in § (36) S. 238 als Spezialfall begegneten, oder die Gesamtheit der durch zwei reelle Punkte gehenden Kreise, die man auch das Kreisbüschel mit reellen Grundpunkten nennt, verdient eine weitere Untersuchung. Die Grundpunkte oder Kegelspitzen sind zugleich die Scheitel A, B der mit ihrer Ebene in die Tafel niedergelegten Hyperbel (Figur auf S. 258), und die Endpunkte der zu AB parallelen Durchmesser in allen durch sie gehenden also aus Punkten ihrer senkrecht halbierenden Geraden C_1O beschriebenen Kreisen gehören der Umlegung der Hyperbel an. Für $AB = 2r$ und für x und y als die senkrechten Abstände eines Punktes P dieser Umlegung von den Achsen AB und C_1O ist

$$y^2 = x^2 + r^2 \quad \text{oder} \quad y^2 - x^2 = r^2$$

der Ausdruck dieser Beziehung, die Gleichung der gleich-

seitigen Hyperbel. (Vergl. § 33, 9.) Da für einen zweiten Punkt P' mit den Abständen x', y'

$$y'^2 = x'^2 + r^2$$

ist, so folgt durch Subtraktion $y^2 + x'^2 = y'^2 + x^2$. Wir interpretieren das, indem wir bemerken, daß die gleichseitige Hyperbel APP'... ebensowohl durch Umlegung aus der durch die Nebenachse gehenden Normalebene zur Tafel — wie in der bisherigen Entwickelung — wie auch durch Umlegung aus der Normalebene zur Tafel durch ihre Hauptachse entstanden gedacht werden kann, und daß im letzten Falle dem Punkte P' der um den Fußpunkt O^* der Normale von P' auf AB mit ihrer Länge $O^*P' = x'$ beschriebene Kreis als Bildkreis entspricht, welcher den Kreis über AB rechtwinklig schneidet, weil $y'^2 = x'^2 + r^2$ ist. Die durch Subtraktion erhaltene Relation enthält aber links die Summe der Quadrate der Radien der Bildkreise von P aus $C_1 O$ oder x und von P' aus AB oder y, rechts das Quadrat der Distanz ihrer Zentra, spricht also aus, daß jeder Kreis des ersten Systems von jedem Kreise des zweiten rechtwinklig geschnitten wird. Man nennt die Gesamtheit der Kreise des zweiten Systems, nach den Bildkreisen der Hyperbelscheitel A und B, welche diese Punkte selbst sind, ein Kreisbüschel mit reellen Grenzpunkten oder Nullkreisen, und in Bezug auf das erste insbesondere das zu ihm konjugierte Büschel. Es wird ebenfalls ein Büschel genannt, weil es mit dem ersten die fundamentalen Eigenschaften (§ 33, 24) gemein hat, daß durch jeden Punkt der Ebene einer seiner Kreise geht und daß jede gerade Linie der Ebene von zweien seiner Kreise berührt wird. Beide sind Kegelschnittbüschel, von deren Grundpunkten zwei, die absoluten oder Kreispunkte im Unendlichen (§ 31, 8), imaginär sind; und zwar sind bei dem erstbetrachteten die beiden andern Grundpunkte reell, bei dem zuletzt erhaltenen sind auch sie imaginär, während ihre gerade Verbindungslinie stets reell und die gemeinsame Linie gleicher Potenzen oder die Kollineationsachse der Paare aus den Kreisen des Büschels ist. Zwei Kreise bestimmen das Büschel und die durch dasselbe repräsentierte gleichseitige Hyperbel; die zu ihrer Zentrale normalen Durchmesser liefern vier Punkte und die Richtungen der 45^0 Linien gegen die

Zentrale die Asymptotenrichtungen der Hyperbel, und die Bestimmung der einen Asymptote nach § 27, 2, 3 u. 7 gibt den Mittelpunkt und die andere Achse der Hyperbel, die Potenzlinie des Büschels.

Wenn wir die Gleichung $y^2 = x^2 + r^2$ oder $y^2 - x^2 = r^2$ und $x^2 - y^2 = -r^2$ in den äquivalenten Formen

$$(y + x)(y - x) = r^2 \quad \text{und} \quad (x + y)(x - y) = -r^2$$

schreiben, so sagt sie aus, daß die Zentrale des Büschels mit Grenzpunkten die Kreise derselben in Paaren einer Involution schneidet, die diese zu Doppelpunkten hat; daß hingegen die Kreise des Büschels mit Grundpunkten von seiner Zentrale in Paaren einer Involution geschnitten werden, welche im Abstand r vom Mittelpunkt ein symmetrisches Paar enthält.

Wenn man — um eine Anwendung zu geben — zu vier Tangenten das Büschel der Orthogonalkreise nach § 31, 7 bestimmt, so liefern die Grenzpunkte desselben die Zentra der beiden gleichseitigen Hyperbeln, welche in der durch sie bestimmten Kegelschnittschar vorkommen.

Wenn überhaupt ein Kreis vom Radius R einen festen Kreis vom Radius r, mit dem er die Zentraldistanz c hat, in den Endpunkten eines Durchmessers schneidet, so ist notwendig $R^2 = c^2 + r^2$; wenn beide einander orthogonal schneiden, dagegen $R^2 = c^2 - r^2$ oder die letzte Relation geht in die erste über durch Vertauschung von r mit ri. Das orthogonale Schneiden eines reellen Kreises mit einem nicht reellen Kreis vom Radius ri wird ersetzt durch das diametrale Schneiden desselben mit dem zu ihm konzentrischen Kreis vom Radius r, wir wollen sagen durch das diametrale Schneiden mit seinem Symmetriekreis. (Vergl. § 34, 6.) Eben dieser Übergang entspricht der Vertauschung der Rollen als Zentrale und Potenzlinie zwischen den beiden Achsen derselben gleichseitigen Hyperbel und damit auch, wie wir sehen werden, der Bestimmung derselben und des Büschels durch zwei Kreise, je nachdem dieselben reell oder imaginär sind.

Denkt man in jedem der beiden Fälle die aus der Tafel aufgerichtete gleichseitige Hyperbel um ihre nun zur Tafel normale Achse gedreht, bis sie in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, so beschreibt sie eine zur Tafel orthogonalsymmetrische Oberfläche, die im Falle des Büschels mit Grundpunkten

oder der zur Tafel normalen Achse als Hauptachse der Hyperbel der Ort aller der Punkte des Raumes ist, deren Bildkreise den Kreis über AB als Durchmesser je in den Endpunkten eines Durchmessers oder diametral durchschneiden; während sie im Falle des Büschels mit Grenzpunkten oder der zur Tafel normalen Achse als Nebenachse den Ort derjenigen Punkte bildet, deren Bildkreise denselben Kreis rechtwinklig durchschneiden. Man nennt die erste Gesamtheit von Kreisen der Ebene das Netz mit Diametralkreis, die zweite das Netz mit Orthogonalkreis, und die beiden durch sie zyklographisch repräsentierten Oberflächen die Netzhyperboloide, nämlich das zweifache bez. das einfache gleichseitige Rotationshyperboloid. Im ersten System ist offenbar der Kreis über AB oder vom Radius r der kleinste aller ihm angehörigen reellen Kreise oder die beiden durch ihn repräsentierten Raumpunkte sind die der Tafelebene nächsten Punkte der Oberfläche, sodaß diese aus zwei im Endlichen getrennten Teilen besteht; das zweite System enthält dagegen Kreise von allen Größen, und den unendlich kleinen Radien entsprechen insbesondere die Punkte des Grundkreises r selbst als Nullkreise des Systems. Dagegen gehört offenbar zu jedem Punkte der Ebene als Mittelpunkt ein Kreis des ersten Systems, indes nur zu denjenigen Punkten der Ebene reelle Kreise des zweiten Systems gehören, die nicht vom Grundkreis r eingeschlossen werden; oder die Orthogonalprojektion des zweifachen Hyperboloids bedeckt die ganze Ebene, die des einfachen nur den vom Grundkreis nicht umschlossenen Teil derselben. In jedem Falle heißt die zur Tafel normale Achse der erzeugenden Hyperbel die Achse der Fläche und die Tafel ihre Hauptebene; im Falle des zweifachen Hyperboloids heißen auch die beiden durch den Grundkreis repräsentierten Punkte die Scheitel der Fläche, wonach wir diesen Kreis auch als den Scheitelkreis bezeichnen können; im Falle des einfachen Hyperboloids wird derselbe Kreis auch der Umriß- oder Kehlkreis desselben genannt. Die Entstehung lehrt, daß jede solche Fläche rücksichtlich ihrer Hauptebene orthogonalsymmetrisch mit sich selbst ist, sodaß zu jedem ihrer Punkte ein zweiter Punkt in demselben Perpendikel zur Hauptebene und in derselben Entfernung von ihr auf ihrer entgegengesetzten Seite entspricht, beide Punkte aber durch

denselben Kreis des zugehörigen Netzes repräsentiert werden. Jede solche Fläche wird aber auch, ganz ebenso wie das System der zugehörigen Netzkreise, durch eine beliebige seine Achse enthaltende Ebene in zwei bezüglich dieser orthogonalsymmetrische Hälften geteilt, die den Querschnitt dieser Ebene mit der Fläche, eine Lage der erzeugenden gleichseitigen Hyberbel, gemein haben, resp. diejenigen Kreise des Netzes, deren Mittelpunkte in dem zugehörigen Durchmesser des Grundkreises liegen.

B. Wenn man alle die Kreise denkt, welche von dem festen Kreise vom Radius r im Durchmesser geschnitten werden, so besteht zwischen Zentraldistanz c und Radius R des unveränderlichen Kreises mit dem Radius r des festen die Relation $r^2 = c^2 + R^2$. Die Gesamtheit dieser Kreise repräsentiert die sämtlichen Punkte der Kugelfläche, von welcher der feste Kreis der Hauptkreis der Tafel ist. Sie geht für R^2 als negativ aus der des zweifachen gleichseitigen Rotationshyperboloids und für r^2 und R^2 als zugleich negativ aus der des einfachen gleichseitigen Rotationshyperboloids hervor.

(36^c.) Denken wir nun zwei solche Netze in derselben Ebene, also die zugehörigen Netzhyperboloide mit derselben Hauptebene, so ist zunächst im Falle einfacher Hyperboloide, oder von Netzen mit reellen Orthogonalkreisen, das zyklographische Bild ihrer Durchdringung die Gesamtheit der Kreise, welche diese beiden Orthogonalkreise rechtwinklig durchschneiden, d. h. das konjugierte Büschel zu dem Büschel dieser Kehlkreise; die Durchdringung selbst ist daher die gleichseitige zur Tafel orthogonalsymmetrische Hyperbel in der durch die Potenzlinie der Kehlkreise gehenden Normalebene. Nach dem vorigen gilt aber dasselbe Resultat auch für die beiden andern möglichen Fälle, weil der Diametralkreis im Netz ein imaginärer Orthogonalkreis ist; wir dürfen kurz sagen, zwei Netze von Kreisen in derselben Ebene haben ein Büschel und zwei Netzhyperboloide mit derselben Hauptebene eine zu dieser orthogonalsymmetrische gleichseitige Hyperbel gemein, deren Ebene die Potenzlinie ihrer Orthogonalkreise enthält. Das bezeichnete Büschel ist immer durch die Grundkreise der Netze als zwei Kreise des konjugierten Büschels bestimmt; wenn sie reell sind, als die Gesamtheit der zu ihnen orthogonalen Kreise; wenn beide Vertreter imaginärer Kreise oder Symmetriekreise sind, als die

Gesamtheit der zu ihnen diametralen Kreise; und für nur einen als reell als die Gesamtheit der Kreise, die diesen Kreis orthogonal und den andern diametral durchschneiden.

Wir sehen daraus auch, daß ein Netzhyperboloid von allen zu seiner Hauptebene normalen Ebenen in tafelsymmetrischen gleichseitigen Hyperbeln geschnitten wird, oder daß die Kreise eines Netzes mit einerlei Zentrale ein Büschel bilden. Es ist insbesondere ein Büschel mit Grenzpunkten im Falle des Netzes mit reellem Orthogonalkreis, wenn dieser von der Ebene geschnitten wird; speziell im Falle ihrer Berührung eine lineare Reihe berührender Kreise, deren Berührungspunkt der Punkt des Orthogonalkreises und deren Zentrale seine Tangente ist, das zyklographische Bild des Paares von zueinander symmetrischen 45^{0} Linien; woraus wir schließen, daß das einfache gleichseitige Rotationshyperboloid zwei Systeme von 45^{0} Linien enthält, die sich in Paaren in den Tangenten seines Kehlkreises orthogonal projizieren. Und allgemein folgt, daß ein Netzhyperboloid von einer geraden Linie immer, wie die gleichseitige Hyperbel in der durch sie gehenden Normalebene zur Hauptebene, in zwei Punkten geschnitten wird, welche entweder reell und verschieden, oder zusammenfallend oder konjugiert imaginär sind; also auch, daß jeder ebene Querschnitt eines Netzhyperboloids eine Kurve zweiten Grades oder ein Kegelschnitt ist; man hat dasselbe daher als eine Fläche zweiten Grades zu bezeichnen, die an Einfachheit der Eigenschaften der Kugel nahe steht.

Wir stellen dem noch eine andere Überlegung zur Seite. Irgend zwei unserer Hyperboloide mit parallelen — nicht bloß mit zusammenfallenden — Hauptebenen haben denselben unendlich fernen Querschnitt, sodaß dieser ein Teil ihrer Durchdringungskurve ist; denn man weiß, daß die Asymptoten einer Hyperbel ihre unendlich fernen Punkte mit dieser gemein haben, daß daher der unendlich ferne Querschnitt der durch Rotation von zwei gleichseitigen Hyperbeln um ihre parallelen Achsen entstehenden Hyperboloide von dem eines gleichseitigen Rotationskegels um eine gleichgerichtete Achse, den für eine Normalebene zur Achse als Bildebene der Distanzkreis projiziert, nicht verschieden sein kann. Der Querschnitt eines solchen

Hyperboloids mit einer zur Achse parallelen Ebene hat daher seine unendlich fernen Punkte in den Schnittpunkten derselben mit diesem unendlich fernen Querschnitt, oder sie sind zentral projiziert in den Durchschnittspunkten des Distanzkreises mit demjenigen seiner Durchmesser, welcher die Fluchtlinie der besagten Ebene ist, d. h. sie bilden zwei zueinander rechtwinklige Richtungen, deren Mittelrichtungen resp. zur Tafel normal und parallel sind — das schon begründete Resultat. Weil aber zwei beliebige Hyperboloide dieser Art mit parallelen aber nicht vereinigten Hauptebenen in jeder Ebene nicht mehr als vier gemeinsame Punkte haben können — nämlich die Schnittpunkte der zugehörigen Querschnitte oder Kurven zweiten Grades — und weil zwei dieser Punkte die zugehörigen Punkte des gemeinsamen unendlich fernen Querschnittes sind (oder jene Querschnitte nach § 33, 17 ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte bilden), so fallen nur die zwei andern im allgemeinen ins Endliche oder der ins Endliche gehende Teil der Durchdringung von zwei solchen Hyperboloiden ist immer ein Kegelschnitt. Nach der orthogonalen Symmetrie beider Flächen zur Verbindungsebene ihrer Achsen ist der Kegelschnitt orthogonalsymmetrisch zu dieser Ebene, d. h. seine Ebene steht normal zu ihr und schneidet sie nach der einen seiner Achsen als ihrer Falllinie gegen die Hauptebene.

B. 1) Wenn die Neigung α der Ebene der Durchdringung von zwei Netzhyperboloiden mit parallelen Hauptebenen zu diesen größer ist als 45^0, so ist der Kegelschnitt, der sie bildet, eine Hyperbel, weil seine im Schnitt des Distanzkreises mit der Fluchtlinie der Ebene projizierten unendlich fernen Punkte reell und verschieden sind. Für $\alpha = 45^0$ erhält man die Parabel mit dem Berührungspunkt zwischen der Fluchtlinie der Ebene und dem Distanzkreis als Bild der Achsenrichtung; für $\alpha < 45^0$ eine Ellipse.

2) Der Ort der Zentra von Kreisen, welche einen festen Kreis orthogonal bez. diametral und eine gegebene Gerade unter vorgeschriebenem Winkel schneiden, ist ein Kegelschnitt, dessen eine Achse in dem zur Geraden normalen Durchmesser des Kreises liegt; im Falle der Berührung mit der Geraden eine Parabel. Der Kosinus des zugehörigen Schnittwinkels gibt die Neigung der Ebene durch die Gerade an, welche sein Original aus dem durch den Kreis bestimmten Netzhyperboloid herausschneidet.

3) Die Potenzlinie zweier Kreise ist die Verbindungslinie ihrer im Endlichen liegenden reellen oder konjugiert imaginären

Schnittpunkte, die Achse ihrer zentrischen Kollineationen (§ 26, 5). Somit ist die Spur der Ebene des Durchdringungskegelschnittes zweier Netzhyperboloide mit parallelen Hauptebenen in einer Normalebene ihrer Achsen stets die Potenzlinie der zugehörigen Spurkreise derselben im Sinne des Textes.

Denkt man die beiden Kreise als Haupt- und Kehlkreise zweier einfachen Netzhyperboloide, so ist jeder Punkt der tafelsymmetrischen gleichseitigen Hyperbel, in der sie sich durchdringen, Schnitt zweier gerader Mantellinien derselben; und da diese 45^0 Linien sind und sich als Tangenten der Kehlkreise auf die Tafel orthogonal projizieren, so erkennt man die Potenzlinie zweier reellen Kreise als den Ort der Punkte, von welchen aus gleichlange Tangenten an dieselben gehen. Die Potenzlinie halbiert also insbesondere die zwischen den Berührungspunkten liegenden Strecken ihrer gemeinsamen Tangenten; die vier Berührungspunkte der äußern, und die vier Berührungspunkte der innern gemeinsamen Tangenten liegen in zwei konzentrischen Kreisen.

4) Die Potenzlinien von drei Kreisen K_1, K_2, K_3 derselben Ebene schneiden sich in einem Punkt. Denn der Durchschnitt der Potenzlinien der Paare K_1, K_2 und K_1, K_3 ist der Mittelpunkt eines Kreises, der K_1, K_2, K_3 orthogonal schneidet, und gehört somit wegen der Orthogonalität zu K_2, K_3 auch der Potenzlinie dieser Kreise an. Jener Kreis ist der gemeinsame Kreis der drei Netze, welche K_1, resp. K_2 und K_3 zu ihren Orthogonalkreisen haben, und der Bildkreis der beiden zur Tafel symmetrischen gemeinsamen Punkte der zugehörigen Hyperboloide. Sind diese Punkte nicht reell, so wird sein Symmetriekreis von den gegebenen Kreisen, als reell vorausgesetzt, im Durchmesser geschnitten. Man erörtere die verschiedenen Fälle der Realität und Nicht-Realität der Kreise; etc. Anderseits bestimmen drei Kreise ein Netz; ihr Orthogonalkreis ist sein Orthogonalkreis, der gemeinsame Kreis der Büschel, welche zu den Büscheln aus ihren Paaren konjugiert sind.

5) Wenn drei Kreise durch denselben Punkt gehen, so ist dieser der gemeinsame Punkt ihrer Potenzlinien in Paaren und zugleich der zu ihnen orthogonale Kreis. Man erhält das Netz aller durch diesen Punkt gehenden Kreise der Ebene, die Grenzform zwischen den Netzen mit Orthogonalkreis und den Netzen mit Scheitelkreis. Es ist das zyklographische Bild des zur Tafel symmetrischen gleichseitigen Rotationskegels um diesen Punkt als Spitze und Mittelpunkt, das konische Netz neben den hyperboloidischen.

6) Wenn der Mittelpunkt des Kreises r zum Anfangspunkt rechtwinkliger Koordinaten x, y, z gewählt wird, deren Achse z zur Tafel normal ist, so entstehen für x, y als Koordinaten des Mittelpunktes vom Kreise R und mit z als dritter Koordinate der durch ihn zyklographisch repräsentierten Raumpunkte wegen $c^2 = x^2 + y^2$

aus den Bedingungen des rechtwinkligen bez. diametralen Schnittes mit r in § (36c)

$$x^2 + y^2 - z^2 = r^2, \quad x^2 + y^2 - z^2 = - r^2$$

die Gleichungen des einfachen bez. zweifachen gleichseitigen Rotationshyperboloids.

Aus der Bedingung des Schneidens unter dem Winkel σ für die Kreise r und R, d. h. $c^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos\sigma$ folgt

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2rz \cos\varphi = r^2,$$

welches durch Ersetzung von z durch $z + r\cos\sigma$ übergeht in

$$x^2 + y^2 - z^2 = r^2 \sin^2\sigma. \quad \text{Vergl. § (36e.)}$$

Die Bedingung des Beispiels im vorigen Art. gibt $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, die Gleichung der Kugel, eigentlich jedoch auch eines Hyperboloids, weil z^2 negativ ist.

Lassen wir durch $c^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos\sigma$ den Winkel zweier Kreise auch dann definiert sein, wenn sie sich nicht reell schneiden, so ist $\cos\sigma > 1$ und somit $1 - \cos^2\sigma$ negativ; das Hyperboloid wird ein zweifaches. Seine zur Hauptebene parallelen Schnitte zwischen den Scheiteln sind Kreise mit rein imaginärem Radius ri und man erhält also aus der Grundformel

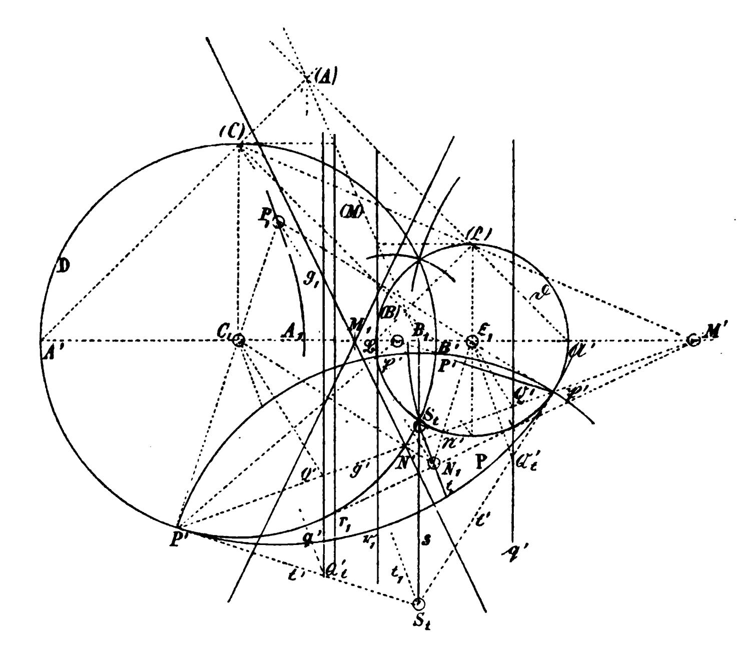
$$x^2 + y^2 = -r^2 + z^2 - 2riz\cos\sigma, \text{ resp. } x^2 + y^2 - z^2 = -r^2 + 2rz\cos\sigma,$$

wenn man $\cos\sigma$ durch $i\cos\sigma$ ersetzt; durch Verschiebung der Ebene um den Betrag $r\cos\sigma$ wird nun $x^2 + y^2 - z^2 = -r^2(1 + \cos^2\sigma)$.

(36^d.) Endlich liefert die **Verbindung von zwei Kreisen eines Büschels mit einem beliebigen Kreise des zu ihm konjugierten Büschels** noch wichtige Resultate, die wir an Figur auf S. 252 anknüpfen können. In derselben bestimmen die Grundkreise D und $\mathfrak{D}$ ein Büschel von der Potenzlinie s und der Zentrale $C_1\mathfrak{C}_1$; jeder Strahl durch den äußern Ähnlichkeitspunkt M' der Kreise markiert in ihnen Punkte P' und $\mathfrak{P}'$, die einander in der Kollineation der Kreise entsprechen und deren Tangenten t' und $\mathfrak{t}'$ sich in einem Punkte S_t der Achse s schneiden als Radien eines Kreises des konjugierten Büschels, dessen beide andere Schnittpunkte P^* und $\mathfrak{P}^{*\prime}$ mit den Kreisen D und $\mathfrak{D}$ ebenfalls in einem äußern Ähnlichkeitsstrahl derselben liegen müssen. Dabei ist das Produkt der Abschnitte $M'P'$ und $M'\mathfrak{P}'$ unveränderlich für alle Ähnlichkeitsstrahlen und die zugehörigen Kreise S_t, weil M' ein Punkt in der Potenzlinie des konjugierten Büschels ist; mit dem Werte der Quadratwurzel aus diesem konstanten Produkt kann daher um M' ein Kreis beschrieben werden, der

alle Kreise des konjugierten Büschels orthogonal schneidet, also zum Originalbüschel der Kreise D, 𝔇 gehört.

Und wenn man aus denselben Grundkreisen, aber als Repräsentanten von Punkten auf entgegengesetzten Seiten der Tafel und somit unter Benutzung ihres innern Ähnlichkeitspunktes den Kegelschnitt — im Falle der folgenden Figur eine Ellipse — konstruiert, so bestimmt der Ähnlichkeitsstrahl durch P' mit t' und S_t denselben Kreis des konjugierten Büschels;



oder er erhält auch $\mathfrak{P}^{*\prime}$, und die Punkte $\mathfrak{P}'$ und $P^{*\prime}$ liegen in einem zweiten Strahl desselben inneren Ähnlichkeitspunktes. Das Produkt der von ihm aus gemessenen Abschnitte bis P', $\mathfrak{P}^{*\prime}$ resp. bis $\mathfrak{P}'$, $P^{*\prime}$ ist konstant, weil der gemeinsamen Potenz aller Kreise S_t des konjugierten Büschels in einem bestimmten Punkte seiner Potenzachse gleich; und der um diesen mit dem Werte seiner Quadratwurzel beschriebene Kreis ist, als orthogonal zu allen Kreisen des konjugierten Büschels, der zugehörige Kreis des Originalbüschels.

Zwei beliebige Kreise derselben Ebene stehen also mit dem aus einem ihrer Ähnlichkeitspunkte beschriebenen Kreise

ihres Büschels in dem Zusammenhange, daß das Produkt der Abschnitte von ihren in der bezüglichen Ähnlichkeit nicht korrespondierenden Punkten eines Ähnlichkeitsstrahls bis zum Ähnlichkeitspunkt gleich dem Radiusquadrat jenes dritten Kreises ist; man nennt ihn den äußeren oder inneren Potenzkreis der beiden ersten und sein Radiusquadrat die gemeinschaftliche Potenz beider Kreise in seinem Mittelpunkte oder dem bezüglichen Ähnlichkeitspunkte.

Und wenn man eine gleichseitige Hyperbel und eine ihrer Achsen durch eine gerade Linie schneidet, so ist der zu diesem Achsenschnittpunkt gehörige Kreis des durch sie bestimmten Büschels mit dieser Achse als Zentrale Potenzkreis der beiden zu den Schnittpunkten mit der Hyperbel gehörigen Kreise desselben Büschels; und zwar der innere oder äußere, je nachdem der Schnittpunkt mit der Achse zwischen den Schnittpunkten mit der Hyperbel liegt oder nicht. Ist die gerade Linie insbesondere einer Asymptote parallel, so ist die zur Zentrale normale Achse der Hyperbel selbst der endliche Teil vom Bildkreis ihres unendlich fernen Schnittpunktes mit der Hyperbel, die Potenzlinie vom Bildkreis des anderen Schnittpunktes mit der Hyperbel und dem zugehörigen Potenzkreis.

Wir betrachten auch diese Korrespondenz der Punkte P' und $\mathfrak{P}'$ eines Ähnlichkeitsstrahles zweier Kreise als eine Abbildung und erkennen, daß die Punkte des zugehörigen Potenzkreises sich selbst entsprechen oder als Originale mit ihren Bildern zusammenfallen. Weil für den Radius des Potenzkreises als Längeneinheit die Abstände entsprechender Punkte von seinem Mittelpunkte das Produkt Eins haben, d. h. zueinander reziprok sind, so hat man diese Abbildung als die Abbildung durch reziproke Radien oder als Inversion benannt; der zugehörige Potenzkreis heißt dann der Grundkreis oder die Direktrix derselben, sein Zentrum also, da er als vom Radius Eins durch dieses allein bestimmt ist, der Anfangspunkt der reziproken Radien. Wir haben in Figur S. 252 den äußern Potenzkreis $\mathbf{P}$ markiert in dem Büschel mit Grundpunkten aus den Bildkreisen für P und P', die Direktrix in Bezug auf welche diese Kreise einander entsprechen. Man sieht, in der Abbildung durch reziproke Radien entspricht einem Kreise, der den Anfangspunkt derselben nicht enthält, stets

wieder ein Kreis, nämlich derjenige Kreis des durch ihn und den Grundkreis bestimmten Büschels, der mit ihm den Anfangspunkt zum Ähnlichkeitspunkt hat; einem durch den Anfangspunkt gehenden Kreise entspricht dagegen seine Potenzlinie mit dem Grundkreis. Irgend zwei Punkte entsprechen einander vertauschbar oder die Verwandtschaft der Inversion ist involutorisch: denn sie sind entsprechend, wenn sie in demselben Ähnlichkeitsstrahle so liegen, daß das Produkt der Abstände vom zugehörigen Ähnlichkeitspunkt dem Radiusquadrat des Grundkreises gleich ist — oder wenn sie potenzhaltend sind. Wenn zwei Kreise und ein Punkt gegeben sind, so bestimmt man den mit ihm potenzhaltenden Punkt auf einem bestimmten durch ihn gehenden Ähnlichkeitsstrahl derselben als seinen zweiten Schnittpunkt mit dem durch ihn gehenden Kreis des zu dem der Kreise konjugierten Büschels. Die Kreise dieses konjugierten Büschels, die auch zu dem Potenz- oder Direktrixkreis der reziproken Radien orthogonal sind, entsprechen somit sich selbst so, daß jedem ihrer Punkte der andere Punkt desselben Kreises entspricht, der mit ihm auf demselben Radius der Direktrix liegt. Denkt man aber irgend zwei Paare potenzhaltender oder entsprechender Punkte auf verschiedenen Ähnlichkeitsstrahlen, so liegen auch sie auf einem sich selbst entsprechenden Kreis, der in den Punkten der ihn berührenden Ähnlichkeitsstrahlen den Direktrixkreis orthogonal schneidet und, wie leicht zu sehen, mit den Grundkreisen gleiche Winkel bildet Die Gesamtheit der sich selbst entsprechenden oder zwei gegebene Kreise gleichwinklig schneidenden Kreise setzt sich also zusammen aus den Kreisen der zwei Netze, welche zu den Potenzkreisen der gegebenen als Orthogonalkreisen gehören.

Denkt man die potenzhaltenden Punkte als zwei Paare entsprechender und unendlich nahe benachbarter auf den gegebenen Kreisen, so berührt der sie enthaltende sich selbst entsprechende Kreis die beiden gegebenen Kreise, d. h. ist ein Kreis von dem System des Kegelschnittes, der mit Benutzung des bezüglichen Ähnlichkeitspunktes aus jenen abgeleitet wird (S. 241, § (36[a]), Fig. auf S. 252). Die Bildkreise der Punkte eines Kegelschnittes sind also orthogonal zu demjenigen Potenzkreis ihrer Grundkreise, der dem

bei der Konstruktion benutzten Ähnlichkeitspunkt entspricht; das bezügliche Netzhyperboloid geht durch den entsprechenden Kegelschnitt im Raum, in welchem sich auch die gleichseitigen Rotationskegel über den Grundkreisen durchdringen, und für welche der bezeichnete Ähnlichkeitspunkt der Durchstoßpunkt der Verbindungslinie der Spitzen in der Basisebene ist.

B. 1) Wenn in einer Verwandtschaft oder Abbildung nach reziproken Radien einander entsprechenden Punkte auf entgegengesetzten Seiten des Anfangspunktes liegen, so ist der Direktrixkreis als imaginär anzusehen und wird wie in § 34, 6 durch einen Symmetriekreis vertreten — wie es die Anschauung der gleichseitigen Hyperbel lehrt, wenn ihre Hauptachse die Zentrale ist. Zwei entsprechende Kreise haben reelle Direktrixen für beide Ähnlichkeitspunkte, wenn sie sich schneiden; sie haben reelle Direktrix für den äußeren Ähnlichkeitspunkt, wenn sie einander ausschließen, und reelle Direktrix für den innern Ähnlichkeitspunkt, wenn der eine den andern umschließt. Die zugehörigen Netze der gleichwinklig schneidenden sind darnach Netze mit Orthogonalkreis im Falle der Realität, sonst Netze mit Diametralkreis; die Kegelschnitte liegen auf einfachem resp. zweifachem Hyperboloid; etc.

2) Dieselben Ergebnisse können als Eigenschaften der elliptischen resp. der hyperbolischen Involution ausgesprochen werden; in einer elliptischen existiert z. B. nicht nur zu zwei beliebigen Paaren ein drittes Paar, welches mit beiden zugleich harmonisch ist (vergl. § 31, 15), sondern auch für jedes Element dieses Paares ein zu ihm symmetrisches Paar; etc.

3) Entsprechende Winkel in Figuren einer Abbildung nach reziproken Radien sind gleich groß.

4) Die beiden Potenzkreise eines Paares von Kreisen halbieren die von diesen Kreisen gebildeten Winkel und stehen aufeinander rechtwinklig — natürlich, wenn sie reell sind, sonst mit den nach § (36^b) erforderlichen Modifikationen.

5) Es ist die Konstruktion der Kreise auszuführen, welche drei gegebene Paare von Kreisen in einer Ebene bez. unter gleichen Winkeln schneiden; insbesondere die der Kreise, welche gleichwinklig sind zu einem Paar und zu einem Tripel von Kreisen.

6) Zu drei Kreisen derselben Ebene gehören vier Büschel gleichwinklig schneidender Kreise, welche ihre Ähnlichkeitsachsen einzeln enthalten; vier Kreise derselben Ebene liefern acht Kreise, welche sie gleichwinklig schneiden.

7) Der Ort der Zentra von Kreisen, welche zwei feste Kreise gleichwinklig schneiden und einen dritten festen Kreis berühren, besteht aus vier Kegelschnitten. Wie sind sie zu konstruieren? Wann degenerieren sie in gerade Linien?

8) In einem Büschel gibt es für einen seiner Kreise als Grundkreis unendlich viele Paare von Kreisen, die einander nach reziproken Radien entsprechen, nach den durch den Mittelpunkt des Grundkreises gehenden Sekanten der Hyperbel; für die beiden den Asymptoten parallelen unter ihnen erscheint als der eine Kreis des Paares die Potenzlinie.

In einem Netze gibt es für einen seiner Kreise als Grundkreis zweifach unendlich viele d. i. ∞^2 Paare von Kreisen, die einander nach reziproken Radien entsprechen. Zweimal im vorigen Falle und einfach unendlich oft hier kommt es vor, daß die beiden Kreise sich decken. Welche Punkte der Büschelhyperbel resp. des Netzhyperboloids sind dadurch bezeichnet?

9) Betrachtet man den Grundkreis und zwei einander entsprechende Kreise als Diametralkreise von Kugeln, so entsprechen die beiden letzten einander nach reziproken Radien für die erste als Grund- oder Direktrixkugel; alle drei haben dieselbe Potenzebene in der Normalebene der Tafel durch die Potenzlinie der drei Kreise, d. h. sie bilden ein Büschel. Einer Kugel, die den Anfangspunkt enthält, entspricht ihre Potenzebene mit der Direktrixkugel; entsprechende Winkel in Figuren, die nach reziproken Radien verwandt sind, sind gleich groß. Sich selbst entsprechende Kugeln schneiden die Direktrixkugel orthogonal. Die gleichwinklig schneidenden Kugeln zu zwei gegebenen sind orthogonal zu der einen oder der andern ihrer Potenzkugeln etc.

10) Wenn von drei Kugeln die zweite aus der ersten und die dritte aus der zweiten durch reziproke Radien abgeleitet wurde, so kann auch die dritte aus der ersten direkt durch reziproke Radien erhalten werden. Denn in der Zentralebene der drei Kugeln bestimmen ihre Schnittkreise ein Netz, und durch das zugehörige Netzhyperboloid erhält man die Direktrixen für den Übergang von 1 zu 2 und von 2 zu 3 ebenso, wie für den direkten Übergang von 1 zu 3. Man erweitert den Satz ohne Schwierigkeit auf beliebige entsprechende Figuren und auf beliebige viele successive Abbildungen durch reziproke Radien.

11) Den Kreisen und überhaupt den Figuren einer Ebene entsprechen die Kreise und Figuren auf einer Kugelfläche mit Gleichheit der entsprechenden Winkel oder mit Ähnlichkeit in den kleinsten entsprechenden Teilen — wie man auch sagt konform — für einen Endpunkt des zur Ebene normalen Durchmessers der Kugel als Zentrum und die um ihn beschriebene Kugel, welche die Ebene zu ihrer Potenzebene mit der gegebenen Kugel hat, als Direktrix reziproker Radien. Es ist die von Hipparch für die Zwecke der Astronomie erfundene stereographische Projektion. Für einen Durchmesser NS als Achse, die ihn enthaltenden größten Kreise als Meridiane, und die Querschnitte mit zu ihm normalen Ebenen als Parallelkreise liefert die stereographische Projektion

der Kugel (für einen beliebigen Punkt auf ihr als Zentrum und die zu seinem Durchmesser normale Diametralebene als Bildebene) die Bilder in Gestalt von zwei konjugierten Kreisbüscheln; das eine die Meridiane abbildende ein Büschel mit reellen Grundpunkten N', S' — das andere, das Bild der Parallelkreise, mit denselben Punkten als reellen Grenzpunkten oder Nullkreisen. Das Bild des durch das Zentrum gehenden Meridians $N'S'$ und das Bild des das Zentrum enthaltenden Parallels sind ihre Potenzlinien.

Allgemein gilt offenbar, daß zwei Kreise auf derselben Kugel immer ein Büschel sphärischer Kreise bestimmen, mit Grenzpunkten oder Grundpunkten, je nachdem die Schnittlinie ihrer Ebenen reelle Tangentialebenen oder reelle Schnittpunkte mit der Kugel hat. Zwei solche Büschel sind orthogonal zueinander und werden konjugiert genannt, wenn die Scheitelkante des einen die Kugel in den Punkten schneidet, wo die Tangentialebenen durch die Scheitelkante des andern sie berühren. Weiter bestimmen drei Kreise einer Kugel ein sphärisches Netz und einen gemeinsamen Orthogonalkreis; die Ebenen aller Kreise des Netzes gehen durch den Mittelpunkt des längs des Orthogonalkreises berührenden Kegels. Es entspringen dreierlei sphärische Netze, nach der Lage dieses Mittelpunktes zur Kugel.

Alle unsere Entwickelungen sind so auf die Kugel übertragbar.

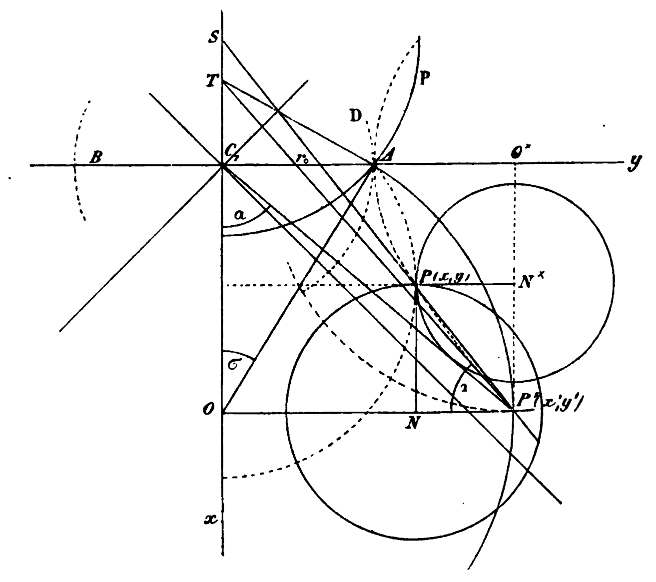
12) Zwei Kreise auf derselben Kugel bestimmen ein Büschel sphärischer Kreise; mit Grenz- oder mit Grundpunkten, je nachdem die Schnittlinie ihrer Ebenen außerhalb der Kugel liegt oder sie schneidet. Wenn die Scheitelkante des einen Büschels die Kugel in den Punkten trifft, in denen ihre Tangentialebenen durch die Scheitelkante des andern sie berühren, so sind die Büschel orthogonal zueinander und heißen konjugiert.

13) Drei Kreise derselben Kugel bestimmen ein sphärisches Netz von Kreisen und einen zu ihnen orthogonalen Kreis. Die Ebenen der Kreise des Netzes gehen durch die Spitze des zu diesem gehörigen Berührungskegels; etc. Man prüfe die Entwickelungen der §§ (36) f. auf ihre Übertragbarkeit auf die Kugel.

14) Wenn man die Gesamtheit der eine Kugel orthogonal (resp. diametral) schneidenden Kugeln ein Netz nennt, so wird die Schar der Kugeln, die zwei gegebene Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden, durch zwei Netze gebildet, die zu den beiden Potenzkugeln der gegebenen als Orthogonalkugeln gehören. Man erläutere die Gesamtheiten von Kugeln, welche zu zwei Paaren, zu drei Paaren und die Konstruktion der sechszehn Kugeln, welche zu vier Paaren gegebener Kugeln gleichwinklig sind; endlich die der Kugeln, welche fünf gegebene gleichwinklig schneiden.

(36^e.) Nachdem Kreisbüschel und Kreisnetze als Hauptanschauungen des betretenen Untersuchungsgebietes hervor-

getreten sind, widmen wir ihnen eine für jetzt letzte Erörterung im Anschluß an die vervollständigte untenstehende Figur von (36d.) Wir haben in ihr die gleichseitige Hyperbel von den Scheiteln A, B und die Punkte P oder (x, y) und P' oder (x', y') nebst den dem letzten entsprechenden Kreisen ihrer beiden konjugierten Büschel, überdies aber, als die Bildkreise des Punktes P in Bezug auf die durch P' normal zu der Achse x bez. der Achse y gelegten Ebenen, die Kreise von den Mittelpunkten N bez. N^*. Bestimmen wir nun die Winkel σ und σ^*, unter welchen die Bildkreise von P aus N bez. N^* die als fest be-



trachteten Kreise durch P' aus O bez. aus O^* durchschneiden, — nach der Definition von § (36c), 6, wonach der Kosinus der Quotient ist aus der um das Quadrat der Zentraldistanz der Kreise verminderten Summe der Quadrate ihrer Radien durch das doppelte Produkt ihrer Radien, — so ergibt sich, daß dieselben für alle Punkte der Hyperbel konstant sind. Denn die Zentraldistanz zwischen den Kreisen aus O und N von den Radien x' und $(y' - y)$ ist x und die zwischen den Kreisen aus O^* und N^* mit den Radien y' und $(x' - x)$ ist y, sodaß man nach der erinnerten Definition erhält resp.

$$\cos\sigma = \frac{x'^2 + (y' - y)^2 - x^2}{2x'(y' - y)}, \quad \cos\sigma^* = \frac{y'^2 + (x' - x)^2 - y^2}{2y'(x' - x)}.$$

Daraus wird, weil für P und P' als Punkte derselben gleichseitigen Hyperbel AP (Figur auf S. 258) von der reellen Halbachse r

$x^2+r^2=y^2$, $x'^2+r^2=y'^2$ und somit $x'^2-x^2=y'^2-y^2$ ist,

$$\cos\sigma=\frac{y'}{x'},\quad \cos\sigma^*=\frac{x'}{y'};$$

die Winkel σ, σ^* sind unabhängig von der Lage von P in der Hyperbel, also konstant, und ihre Kosinus reziprok.

Nach der vorher betrachteten Entstehung der gleichseitigen Hyperbel ist aber der Winkel OAT, unter welchem die Strecke vom Fußpunkt der Ordinate eines Hyperbelpunktes in der Nebenachse bis zum Fußpunkt seiner Tangente in derselben vom Scheitel aus erscheint, ein rechter Winkel. Man hat also auch

$$y':x'=C_1O:OP'=C_1O:OA=OA:OT=OP':OT,$$

oder, für α als den Winkel, den die Tangente der gleichseitigen Hyperbel in P' mit ihrer Hauptachse bildet,

$\cos\sigma=\operatorname{cotan}\alpha$ (vergl. § (7)) und $\cos\sigma^*=\operatorname{cotan}(90^0-\alpha)$.

Hierin liegen die bequemen Mittel zur Konstruktion bei gegebenem Schnittwinkel und Grundkreis, wie nicht näher auszuführen nötig scheint.

Wir sehen, daß die gleichseitige Hyperbel, deren Achsen zur Tafel parallel und bez. rechtwinklig liegen, der Ort von Punkten ist, deren Bildkreise in jener den über der Sehne zwischen ihren Schnittpunkten mit der Tafel als Durchmesser beschriebenen Kreis unter konstantem Winkel schneiden; also auch weiter, daß die schon in § (36^b) betrachteten Oberflächen, die aus der Rotation der Hyperbel um ihre zur Tafel normale Achse entstehen, die Orte aller der Punkte sind, deren Bildkreise jenen festen Kreis, den Spurkreis der bezüglichen Fläche in der Tafel, unter konstantem Winkel schneiden. Nach der Figur ist α stets größer als 45^0, also $\operatorname{cotan}\alpha<1$ und σ somit reell für die Nebenachse der Hyperbel als normal zur Bildebene und das einfache Hyperboloid; dagegen ist α stets kleiner als 45^0, $\operatorname{cotan}\alpha>1$ und σ nicht reell für die Hauptachse der Hyperbel als Rotationsachse und das zweifache Hyperboloid; offenbar kann bei diesem auch der Spurkreis imaginär werden, und läßt man ihn durch seinen Symmetriekreis vertreten sein, so findet

man leicht, daß die Gesamtheit dieser Symmetriekreise, reell im Raume gedacht, die Scheitelberührungskugel des Hyperboloids bildet.

Die Übergangsform der Hyperbel als rechtwinkliges Linienpaar mit den zugehörigen Halbierungslinien als Achsen liefert den gleichseitigen Rotationskegel mit zur Tafel normaler Achse und das System der Kreise, die seinen Spurkreis berühren; $\sigma = 0^0$ oder 180^0 weil $\alpha = 45^0$ wegen $\cot\alpha = \cos\sigma = 1$.

Es ergibt sich leicht der Zusammenhang auch dieser Systeme der gleichwinkligen Kreise mit unserer Theorie der Kegelschnitte aus Kreissystemen in § (36) folg. und damit zugleich der zyklographische Beweis für ein Hauptresultat des § (36c). Durch den Kegelschnitt als Durchdringung zweier parallelachsiger gleichseitiger Rotationskegel sahen wir ein zur Ebene ihrer Spurkreise als Hauptebene gehöriges Netzhyperboloid hindurchgehen, mit der Tafelnormale im Durchstoßpunkt der Verbindungslinie der Kegelspitzen als Achse. Wenn durch eine sich selbst parallele Verschiebung der Tafel, wie in § (36a) die Radien der Basiskreise der Kegel und die der Bildkreise des Kegelschnittes sich um den Betrag der Verschiebung ändern, so ändert sich das zugehörige Netzhyperboloid, in der Art, daß sein Mittelpunkt der nunmehrige Durchstoßpunkt der Verbindungslinie der Spitzen, der Ähnlichkeitspunkt der neuen Spurkreise, und sein Spurkreis der zugehörige Potenzkreis derselben wird. Durch den Kegelschnitt gehen also unendlich viele gleichseitige Rotationshyperboloide, nämlich eines für jede Ebene von der Stellung der Tafel als Hauptebene, mit der geraden Verbindungslinie der Kegelspitzen als Ort ihrer Mittelpunkte. Alle diese Hyperboloide haben miteinander dieselbe Durchdringungskurve gemein, nämlich den unendlich fernen Querschnitt und den Kegelschnitt im Endlichen, den irgend zwei von ihnen bestimmen; man nennt ihre Gesamtheit ein Büschel, durch jeden Punkt des Raumes geht eines von ihnen. Zwei unter ihnen können Kegel sein und diese trennen dann die einfachen Hyperboloide unter ihnen von den zweifachen; zwei bilden ein Paar von Ebenen (eine die unendlich ferne) und dieses gehört zu den zweifachen Hyperboloiden, wenn die Neigung α der Kegelschnittebene zur Grundebene oder Tafel unter 45^0 ist, es gehört zu den einfachen Hyper-

boloiden, wenn der Winkel α größer ist als 45^0, und es ist ein Kegel für $\alpha = 45^0$. In jedem Falle ist der zugehörige Mittelpunkt unendlich fern und damit die Verteilung der Mittelpunkte der einfachen und zweifachen Hyperboloide auf ihrer Geraden vollkommen festgestellt. Eine bestimmte Lage der Tafelebene schneidet aus diesem Büschel von Hyperboloiden ein Büschel der Spurkreise aus, zu welchem die Spur der Ebene des Durchdringungskegelschnittes als der von unendlich großem Radius gehört. Das Bildkreissystem des Kegelschnittes in derselben schneidet den Kehlkreis des Hyperboloids im Büschel, das seinen Mittelpunkt in dieser Tafelebene hat, orthogonal — wenn es ein zweifaches ist, seinen Scheitelkreis diametral —, es schneidet die Spur der Ebene unter einem konstanten Winkel σ_e mit $\cos \sigma_e = \operatorname{cotan} \alpha$ und die Spur jedes andern der Hyperboloide d. h. jeden andern Kreis in dem durch beide vorige bestimmten Büschel, unser einem zugehörigen konstanten Winkel, dessen Kosinus mit der Kotangente des Winkels übereinstimmt, unter welchem ein durch die Achse geführter Querschnitt des Hyperboloids die Tafel schneidet. Wenn die die Achsen der Hyperboloide enthaltende Ebene durch die Hauptachse des Kegelschnittes geht so enthält das Büschel der Hyperboloide zwei reelle Kegel, — von denen im Falle der Parabel einer in ihre Ebene übergeht — und das Kreisbüschel der Spuren zwei Kreise, welche von dem Bildkreissystem des Kegelschnittes berührt werden. Die darstellend geometrische Behandlung dieser Flächen, die im allgemeinen dem zweiten Teile dieses Werkes vorbehalten bleibt, liefert mannigfache Mittel zur Konstruktion der Kegelschnitte aus ihren Bildkreissystemen und zur Lösung von Problemen über die Bestimmung von Kreisen aus Bedingungen.

B. 1) Wenn die Hauptebene eines gleichseitigen Rotationshyperboloids die Distanz d von der Tafel hat, so ist für zwei konzentrische Kreise des Bildkreissystems seiner Punkte, die also den Spurkreis unter dem durch $\operatorname{cotan} \alpha = \cos \sigma$ bestimmten konstanten Winkel schneiden, die Radiendifferenz konstant gleich $2d$.

2) Die Orthogonalprojektionen der Kehlkreise der unendlich vielen einfachen Rotationshyperboloide, die durch einen Kegelschnitt gehen, auf die Tafelebene bilden ein System doppelt berührender Kreise für die Projektion des Kegelschnittes, da sie dieselbe in der Projektion der Durchschnittslinie seiner Ebene

mit der Ebene des Kehlkreises in zwei reellen oder nicht reellen Punkten treffen, ohne von ihr geschnitten werden zu können. Ein Spezialfall definiert: Die Brennpunkte sind doppelt berührende Kreise vom Radius Null, mit nicht reellen Berührungen in den zugehörigen Direktrixen.

3) Denkt man zwei bestimmte unter den Hyperboloiden von 2) und betrachtet einen Punkt ihrer Durchdringung als Schnitt zweier geraden Mantellinien derselben, so erkennt man, weil diese 45^0-Linien zur Tafel sind, daß für die Projektionen der Punkte des Durchdringungskegelschnittes zwischen ihren Hauptebenen die Summe und für die übrigen die Differenz der Längen der Tangenten bis zu den Projektionen ihrer Kehlkreise konstant ist, nämlich gleich dem Abstande der Kehlkreisebenen. Vergl. § (36^c), 3. Die nähere Diskussion in Bd. II.

4) Drei Kegelschnitte, die den nämlichen Kreis doppelt berühren, können als Orthogonalprojektionen von drei Paaren tafelsymmetrischer Querschnitte desselben einfachen Netzhyperboloides betrachtet werden. Da ihre Ebenen vier dreiseitige Ecken mit demselben Spurendreieck bilden, und die Orthogonalprojektionen ihrer Kanten Durchschnittssehnen der Kegelschnitte in der Tafel sind, so gehen diese viermal zu dreien durch einen Punkt und diese vier Punkte liegen in Paaren in sechs Geraden durch die Ecken jenes Spurendreiecks; etc.

5) Zwei beliebige Kugeln durchdringen sich im Endlichen, wenn sie sich treffen, in einem Kreis. Sie haben außer ihm den Querschnitt mit der unendlich fernen Ebene gemein; da nämlich alle ihre ebenen Querschnitte Paare von Kreisen sind, Kegelschnitte also, die durch die absoluten oder Kreispunkte ihrer Ebenen gehen (§ 31, 8), so sind die imaginären Kreispunkte auf allen Ebenen des Raumes ihnen wie allen Kugeln desselben gemein, oder ihre Gesamtheit bildet den Querschnitt der unendlich fernen Ebene mit allen Kugeln des Raumes. Wir werden denselben als den unendlich fernen nicht reellen Kreis aller Kugeln oder, weil er die Basis der geometrischen Maßbestimmungen ist, als den absoluten Kreis oder das Absolute im Raum bezeichnen.

Überblick. In dem hier schließenden Abschnitt haben wir in den ersten Artikeln (24 bis 26) die Kegelschnitte als Zentralprojektionen des Kreises eingeführt und später noch wiederholt Gebrauch von dieser Auffassungsweise gemacht, oder sie doch in Beziehung zu den weiterhin entwickelten Theorien gesetzt (§ 28, 12; § 36). Es wird am Platze sein, sich Rechenschaft darüber zu geben, inwieweit und ob dies überall zulässig ist, d. h. inwieweit unsere Theorie der Kegelschnitte zu-

gleich eine *Theorie* der über ihnen stehenden oder sie aus irgend einem Zentrum *projizierenden Kegel* ist. Die projizierenden Linien ihrer Punkte sind dabei die Mantellinien des projizierenden Kegels und die projizierenden Ebenen der zugehörigen Tangenten die Tangentialebenen desselben, d. h. Ebenen, welche ihn in zwei unendlich nahe benachbarten Mantellinien durchschneiden. Dabei sind die in § 16 erörterten Übertragungen der Doppelverhältniswerte und folglich auch der Doppelverhältnisgleichheit von den Reihen auf ihre projizierenden Strahlbüschel und von den Strahlbüscheln auf ihre projizierenden Ebenenbüschel maßgebend.

Damit liefern aber die Sätze des § 24 für jeden projizierenden Kegel eines Kreises, oder, wie wir sagen wollen, für jeden allgemeinen *Kreiskegel* die folgenden:

Die Ebenen von vier festen Mantellinien nach einer beliebigen fünften Mantellinie desselben bilden ein Ebenenbüschel von unveränderlichem Doppelverhältnis.

Die Schnittlinien von vier festen Tangentialebenen mit einer fünften Tangentialebene desselben bilden ein Strahlenbüschel von unveränderlichem Doppelverhältnis.

Und das Doppelverhältnis von vier festen Mantellinien eines Kreiskegels ist dem Doppelverhältnis ihrer Tangentialebenen gleich. Aus § 25 folgt ebenso:

Der Ort der Schnittlinien aller entsprechenden Ebenenpaare von zwei projektivischen Ebenenbüscheln mit sich schneidenden Scheitelkanten ist eine durch die Scheitelkanten gehende Kegelfläche, welche mit jeder durch den Schnittpunkt der Scheitelkanten gehenden Ebene nur zwei Mantellinien gemeinsam hat; nämlich die sich selbst entsprechenden Strahlen der beiden aus den erzeugenden Ebenenbüscheln durch sie ausgeschnittenen projektivischen Strahlenbüschel (§ 29).

Die Enveloppe der Verbindungsebenen aller entsprechenden Strahlenpaare von zwei projektivischen Strahlenbüscheln mit einerlei Scheitel aber in verschiedenen Ebenen ist eine diese Ebenen berührende Kegelfläche, an welche durch jede den gemeinsamen Scheitel enthaltende Gerade nur zwei Tangentialebenen gehen; nämlich die sich selbst entsprechenden Ebenen der beiden aus ihr über den erzeugenden Strahlenbüscheln gebildeten projektivischen Ebenenbüschel (§ 29).

Sie heißt daher eine Kegelfläche zweiter Ordnung und ist durch fünf Mantellinien bestimmt, von denen keine drei in einer Ebene liegen. Die der gemeinsamen oder Scheitelkantenebene der erzeugenden Büschel entsprechenden Ebenen berühren die Kegelfläche bez. in den Scheitelkanten.

Man erhält dieselbe Kegelfläche, welche zwei der fünf Mantellinien man auch zu Trägern der erzeugenden Ebenenbüschel wählt; denn man hat als eine Form ihrer Konstruktion den Satz vom Pascalschen Sechskant: Sechs Mantellinien eines Kegels zweiter Ordnung bilden in jeder Folge ein Sechskant, für welches die Schnittlinien seiner Gegenflächenpaare in einer Ebene liegen.

Liegen drei der Mantellinien in einer Ebene, so sind die an den beiden übrigen gebildeten Ebenenbüschel in perspektivischer Lage, und der erzeugte Kegel degeneriert in zwei Ebenen — die der Scheitelkanten und die des perspektivischen Durchschnittes.

Sie heißt daher eine Kegelfläche zweiter Klasse und ist durch fünf Tangentialebenen bestimmt, von denen keine drei durch eine Gerade gehen. Die dem gemeinsamen Strahl beider Büschel entsprechenden Strahlen sind die Mantellinien, nach welchen die Ebenen der Büschel den Kegel berühren.

Man erhält dieselbe Kegelfläche, welche zwei der fünf Tangentialebenen man auch zu Trägern der erzeugenden Strahlenbüschel wählt; denn eine Form ihrer Konstruktion ist der Satz vom Brianchonschen Sechsflach: Sechs Tangentialebenen eines Kegels zweiter Ordnung bilden in jeder Folge ein Sechsflach, für welches die Verbindungsebenen seiner Gegenkantenpaare durch eine Gerade gehen.

Gehen drei der Tangentialebenen durch eine Gerade, so sind die in den beiden übrigen gebildeten Strahlenbüschel in perspektivischer Lage, und der erzeugte Kegel degeneriert in zwei sich schneidende Gerade — die Schnittlinie der beiden letzten Ebenen und die der drei ersten.

Analog, wenn die erzeugenden Büschel singulär sind im Sinne von § 22. Man sieht, daß zwei Punkte eine Kurve zweiter Klasse und zwei Ebenen einen Kegel zweiter Ordnung bilden, während zwei sich schneidende Gerade eben-

sowohl eine Kurve zweiter Ordnung als einen Kegel zweiter Klasse bilden, jenes als Reihen von Punkten, diesen als Achsen von Ebenenbüscheln. Mit Ausnahme dieser Degenerationsfälle ist nach § 28, 10 f. jeder Kegel zweiter Ordnung auch ein Kegel zweiter Klasse; man nennt solche Kegel zusammenfassend Kegel zweiten Grades.

Die Schnittpunkte eines Kegels zweiter Ordnung mit einer Geraden erhält man als Doppelpunkte der vereinigten projektivischen Reihen, die seine erzeugenden projektivischen Ebenenbüschel in ihr ausschneiden.

Die Tangentialebenen eines Kegels zweiter Klasse durch einen Punkt erhält man als Doppelebenen der vereinigten projektivischen Ebenenbüschel, welche die den Kegel erzeugenden projektivischen Strahlenbüschel mit jenem bestimmen.

Für die offenbare Weitergeltung dieser Konstruktionen für die in § 11 und in § (36^c) berührten einfachen Hyperboloide ist auf Bd. II zu verweisen.

Nach § 30 bilden die Paare von Mantellinien eines Kegels zweiter Ordnung auf den Ebenen durch einen Strahl aus seinem Zentrum oder seiner Spitze eine Involution, und die Paare der zugehörigen Tangentialebenen schneiden sich in geraden Linien einer Ebene oder in den Strahlen eines Büschels, und umgekehrt; wir nennen jenen Strahl den Polstrahl und diese Ebene die Polarebene der Involution oder kurz Pol und Polare. Die Kegelfläche zweiten Grades ordnet jeder Ebene durch ihr Zentrum einen Polstrahl und jedem Strahl durch dasselbe eine Polarebene zu. Eine Kegelfläche zweiten Grades ist für jeden Strahl durch ihr Zentrum als Zentralstrahl und seine Polarebene als Kollineationsebene mit sich selbst in involutorischer Zentralkollineation und ebenso für jede durch ihr Zentrum gehende Ebene als Kollineationsebene und ihren Polstrahl als Zentralstrahl. Die Polarebenen aller Strahlen in einer Ebene gehen durch den Polstrahl dieser Ebene, und die Polstrahlen aller Ebenen durch einen Strahl liegen in der Polarebene dieses Strahles.

In Bezug auf einen Kegel zweiten Grades ordnen sich alle Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels aus seinem Zentrum in Paare so, daß immer der eine Strahl des Paares in der Polarebene des andern liegt; damit sind zugleich die Ebenen

durch den Polstrahl der Ebene dieses Büschels so in Paare geordnet, daß immer die eine Ebene des Paares durch den Polstrahl der andern geht. Beide Systeme von einfach unendlich vielen Paaren sind Involutionen, die erste die Involution harmonischer Polstrahlen in einer Ebene durch das Zentrum, die zweite die Involution harmonischer Polarebenen um einen Strahl aus dem Zentrum; sie sind in perspektivischer Lage, wenn jene Ebene die Polarebene dieses Strahles ist. Die Doppelstrahlen der ersten liegen in den Doppelebenen der zweiten und sind die Berührungsmantellinien zu diesen Tangentialebenen (§ 32). Ein Strahl als Polstrahl, seine Polarebene und die Involution in dieser oder um jenen bestimmen mit einer Mantellinie oder einer Tangentialebene durch ihren Schnittpunkt alle andern Mantellinien bez. Tangentialebenen des Kegels (§ 32, 13); auch eine Involution harmonischer Polstrahlen und drei Mantellinien durch ihr Zentrum, bez. zwei Involutionen harmonischer Polstrahlen in verschiedenen Ebenen und eine Mantellinie durch ihr gemeinsames Zentrum bestimmen einen Kegel zweiten Grades; ebenso anderseits eine Involution harmonischer Polarebenen und drei Tangentialebenen aus einem Punkt ihrer Scheitelkante, bez. zwei Involutionen harmonischer Polarebenen und eine Tangentialebene durch den Schnittpunkt ihrer Scheitelkanten. Mit der Variation einer Mantellinie unter den Daten in den ersten Fällen erhält man Büschel von Kegeln zweiter Ordnung und mit der Variation einer Tangentialebene unter den Daten in den letzten Fällen Scharen von Kegeln zweiter Klasse — ganz analog der Übersicht in § 33, 24 für die Kegelschnitte. Auch die zweideutigen und vierdeutigen Bestimmungen der Kegelschnitte in § 33, 21 und 22 gehen in derselben Weise auf die Kegel zweiten Grades über. Den Büscheln und Schaaren der Kegel zweiten Grades entsprechen Involutionseigenschaften ihrer Schnitte in Ebenen durch das gemeinsame Zentrum und ihrer Tangentialebenen durch Strahlen aus demselben nach § 25 und, bezüglich der in ihnen auftretenden je drei degenerierten Kegel, Sätze und Konstruktionen über das vollständige Vierkant und bez. Vierflach analog § 25, 5.

Es ist evident, daß in einer Zentralkollineation im Bündel, die immer durch den Zentralstrahl, die Kollineations-

ebene und ihre Charakteristik Δ bestimmt werden kann, einem Kegel zweiten Grades wieder ein Kegel zweiten Grades entspricht; ebenso, daß zwei konzentrische Kegel zweiten Grades, wie in § 26 zwei Kegelschnitte, auf zwölf oder auf vier Arten zentralkollinear mit einander sind. Wenn der Zentralstrahl dem einen Kegel angehört, so gehört er auch zum andern, und beide Kegel haben längs desselben die nämliche Tangentialebene (§ 32, 20). Geht überdies die Kollineationsebene durch den Zentralstrahl (§ 19, 8), so fällt von den zwei übrigen gemeinsamen Mantellinien beider Kegel noch eine mit dem Zentralstrahl zusammen und sie haben außer ihm nur noch eine reelle Mantellinie gemein; man sagt sie berühren einander längs des Zentralstrahles in der zweiten Ordnung oder sie sind in Oskulation miteinander (§ 35). Der oskulierende Kegel zweiten Grades zu einem gegebenen für eine gegebene Mantellinie desselben ist durch zwei andere Mantellinien bestimmt; etc.

Wir wissen schon, daß die Mittelpunkts- und Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte im allgemeinen nicht projektivisch sind (vergl. aber § 36, 20f.) und sich also auch nicht auf ihre projizierenden Kegel übertragen; insbesondere versagt die Untersuchung des § 33 scheinbar der projektivischen Erweiterung, weil es im Bündel unendlich ferne Elemente nicht gibt. Wir werden im zweiten Bande dieses Werkes die drei Hauptachsen und Hauptebenen der Kegel zweiten Grades sowie ihre Kreisschnittebenen mit denen der Flächen zweiten Grades überhaupt kennen lernen; und im dritten Bande auch die Analoga der Brennpunkte und Direktrixen, die Fokalstrahlen und ihre Polarebenen allgemein konstruieren, indem wir diese sämtlichen ausgezeichneten Elemente aus dem durch den Kegel bestimmten und ihn in allen Fällen vertretenden Polarsystem definieren. Diese Betrachtung umfaßt auch die Kegelschnitte in reellen Ebenen und die Kegel zweiten Grades an reellen Scheiteln, welche selbst nicht reell sind. (Vergl. § 34, 4—6.); endlich auch die reellen und die rein imaginären Flächen zweiten Grades.

Hier sei bemerkt, daß eine einfache Symmetriebetrachtung die Achsen des schiefen Kreiskegels zu bestimmen erlaubt, indem man die eine Hauptebene darnach sofort als die zur Ebene der Kreisbasis L normale Ebene erkennt, welche die Spitze und den Mittelpunkt des Basiskreises enthält. Sie schneidet aus

dem Kegel zwei Mantellinien, die als Halbierungslinien ihrer Winkel zwei der Achsen liefern, deren gemeinsame Normale durch M die dritte Achse ist. Dazu gibt die Tangentialebene in M an die Kugel, welche M und den Basiskreis L enthält die Stellung des zweiten Systems der Kreisschnitte für den Kegel an. Zugleich liegen die Endpunkte des zur Ebene von L normalen Durchmessers dieser Kugel in den Achsen.

Endlich erwähnen wir, daß der gerade Kreiskegel (§ 33, 13) als Original der Zentralkollineation für seine Achse als Zentralstrahl auf die reellen Fokalstrahlen und ihre Direktrixebenen führt. Denn die rektanguläre Involution harmonischer Polarebenen um seine Achse ist dann die Polarinvolution um diese Gerade auch für den entstehenden allgemeinen Kegel zweiten Grades; sie wird daher als Fokalstrahl desselben und ihre Polarebene in Bezug auf ihn, d. h. die entsprechende zu ihrer Normalebene im Original, als zugehörige Direktrixebene des Kegels bezeichnet (§ 36). Für seinen Querschnitt mit einer zum Fokalstrahl normalen Ebene liegt in diesem der eine Brennpunkt; die Ebene, die die Hauptachse desselben mit dem Fokalstrahl verbindet, ist die eine Hauptebene des Kegels, aus welcher die Achsen, die anderen Hauptebenen, der zweite reelle Fokalstrahl und seine Direktrixebene leicht zu erhalten sind.

Eine um den Kegelmittelpunkt beschriebene Kugel schneidet den Rotationskegel in zwei gleichen parallelen Kreisen, den allgemeinen in einem sphärischen Kegelschnitt, die Strahlen und Ebenen der Konstruktionsfigur in Paaren von Gegenpunkten und in größten Kreisen und liefert so die sphärische Zentralkollineation und die entsprechende Theorie der sphärischen Kegelschnitte.

Anderseits haben wir in § (36^e) schon gesehen, daß durch die stereographische Projektion oder die Theorie der reziproken Radien die zyklographische Theorie der Kegelschnitte aus Kreissystemen unter Festhaltung der Winkelrelationen auf die Kugel übergeht.

Die Beispiele zeigen eine Bestimmungsaufgabe der Kegel zweiten Grades in Verbindung mit Schließungsproblemen bei den Kegelschnitten.

B. 1) Von einem Kegel zweiten Grades kennt man die ebene Leitkurve **L** — durch fünf ihrer Punkte oder eine äquivalente An-

gabe — und drei Punkte A, B, C seines Mantels — durch ihre Bilder und Spur und Fluchtlinie ihrer Ebene; man soll den Mittelpunkt M des Kegels bestimmen.

Wenn die Mantellinien MA, MB, MC die Ebene der Basis **L** und also die Leitkurve in A^*, B^*, C^* bez. schneiden, so sind die Dreiecke ABC und $A^*B^*C^*$ perspektivisch für M als Zentrum und die Schnittlinie der Ebenen **L** und ABC als Achse, und die Schnittpunkte S_A, S_B, S_C der Geraden BC, CA, AB mit der Ebene **L** sind zugleich die Punkte der Geraden B^*C^*, C^*A^*, A^*B^* in der Perspektivachse. Die vorgelegte Aufgabe kommt also auf die folgende zurück: Man soll auf dem Kegelschnitt **L** drei Punkte A^*, B^*, C^* so bestimmen, daß ihre Verbindungslinien B^*C^*, C^*A^*, A^*B^* bez. durch drei gegebene feste Punkte S_A, S_B, S_C in einer geraden Linie gehen. Wir werden sehen, daß im Allgemeinen zwei solche Punktetripel $A_1^*, ..$ und $A_2^*, ..$ existieren, und es ist evident, daß die Perspektivzentra der Dreiecke $A_1^*B_1^*C_1^*$, $A_2^*B_2^*C_2^*$ mit dem Dreieck ABC die beiden Lagen M_1 und M_2 des Kegelmittelpunktes liefern und daß durch ihre Angabe die beiden nach den Bedingungen möglichen Kegel zweiten Grades vollkommen bestimmt werden. (Vergl. 5) unten.) Die bezeichnete Aufgabe behandeln wir aber zweckmäßig als speziellen Fall der folgenden allgemeineren.

2) Ein Kegelschnitt und drei Punkte seiner Ebene außer ihm sind gegeben; man soll die Dreiecke ermitteln, deren Ecken auf dem Kegelschnitt liegen, während ihre Seiten einzeln durch jene Punkte gehen.

Zu ihrer Bestimmung führt die Erinnerung (§ 30), daß die Paare der Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit den Strahlen eines Büschels in seiner Ebene die Paare einer Involution sind, daß daher die Doppelverhältnisse aus irgend vier unter diesen Schnittpunkten und die gleichgebildeten aus den ihnen in der Involution entsprechenden einander gleich sein müssen.

Ist **L** der Kegelschnitt und sind S_A oder 1, S_B oder 2, S_C oder 3 jene Punkte, so ziehe man durch 1 eine den Kegelschnitt in B und C schneidende Gerade, verbinde C mit 2 und B mit 3, sodaß man als zweite Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit dem Kegelschnitt A bez. A^* erhält; sind dann durch zwei weitere Strahlen aus 1 resp. B' und C', B'' und C'' und aus ihnen durch die Strahlen nach 3 und 2 die Punkte $A^{*\prime}$, $A^{*\prime\prime}$ und A', A'' bestimmt, so hat man $(AA'A''..) = (BB'B''..) = (CC'C''..) = (A^*A^{*\prime}A^{*\prime\prime}..)$ und somit $(AA'A''..) = (A^*A^{*\prime}A^{*\prime\prime}..)$; also auch immer, wenn A und A^* zusammen fallen, eine Lösung A_1^*, A_2^* der Aufgabe, nämlich die erste Ecke eines Dreiecks, welches ihren Bedingungen entspricht. Man findet diese Lösungen also durch die Doppelpunkte von zwei projektivischen Reihen in dem Kegelschnitt; also entweder zwei reelle und verschiedene oder zwei nicht reelle Lösungen, im

besondern Falle zwei reelle und vereinigte, — die ersten Ecken stets gelegen in der Pascal-Linie des Sechsecks $AA^*A'A^{*'}A''A^{*''}$, nämlich in ihren Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt **L**. Ist derselbe nicht gezeichnet, sondern nur durch fünf Punkte bestimmt, so wählt man drei derselben als B, B', B'', ermittelt nach dem Pascalschen Satze wie in § 27, 1 die Punkte C, C', C'' in den Geraden aus ihnen nach 1, und ebenso A, A', A'' auf den Geraden von diesen nach 2 und $A^*, A^{*'}, A^{*''}$ auf den Geraden von $B, B'B''$ nach 3; endlich die Schnittpunkte der Pascalschen Linie mit dem Kegelschnitt **L** mittels eines Hilfskreises wie in § 29.

3) Man sieht sofort, daß die dualistische Übersetzung des vorigen, d. h. die Benutzung der Polare der Involution von Tangenten an Stelle des Pols der Involution von Punkten des Kegelschnittes, also schließlich die Verwendung des Brianchonschen Satzes § 28, 1 zur Konstruktion der neuen Tangenten des Kegelschnittes durch Punkte schon bekannter und die des Brianchon-Punktes (§ 29) vom umgeschriebenen Sechsseit $aa^*a'a^{*'}a''a^{*''}$ das Problem löst: Man soll einem durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnitt ein Dreiseit umschreiben, dessen Ecken auf drei in seiner Ebene gegebenen Geraden liegen — mit den analogen allgemeinen und speziellen Resultaten.

4) Weil aber der Schluß in 2) auf die Projektivität des ersten und letzten Gliedes einer Kette von Gruppen, deren benachbarte projektivisch sind, durch die Zahl der Glieder nicht gestört wird, oder, weil ebenso wie dort $(AA'..) = (A^*A^{*'}..)$ aus

$$(AA'..) = (BB'..) = (CC'..) = (DD'..) = \ldots = (XX'..) = (A^*A^{*'}..)$$

folgt, so haben wir damit auch die Lösung der allgemeinen Aufgaben von der Konstruktion eines dem Kegelschnitt eingeschriebenen Vielecks, dessen Seiten durch beliebig in seiner Ebene gegebene Punkte gehen, und eines dem Kegelschnitt umgeschriebenen Vielseits, dessen Ecken auf ebenso vielen in seiner Ebene willkürlich gegebenen Geraden liegen. Auch diese Probleme haben also zwei Lösungen, wenn die Reihenfolge der festen Punkte bez. der festen Geraden als Enveloppen der benachbarten Seiten bez. Orte der benachbarten Ecken gegeben ist. Ist diese Reihenfolge frei wählbar, so entsprechen $2.3\ldots(n-1)$ Polygone, bez. n Ecke und n Seite, den Bedingungen.

5) Wenn insbesondere die Drehpunkte $1, 2, \ldots n$ in derselben geraden Linie liegen, bez. die Ortsgeraden $I, II, \ldots$ durch einen Punkt gehen, so entspringen verschiedene Spezialitäten, je nachdem ihre Zahl ungerade oder gerade ist. Bei ungerader Anzahl derselben, also für das eingeschriebene Dreiseit, Fünfseit, etc. und das umgeschriebene Dreieck, Fünfeck, etc., bilden die in der Verbindungsgeraden liegenden beiden Punkte des Kegelschnittes, bez. die durch den Schnittpunkt gehenden Tangenten desselben, ein sich vertauschungsfähig entsprechendes Paar in der Projektivität der $AA'A''\ldots$ und $A^*A^{*'}A^{*''}\ldots$ oder der $aa'a''\ldots$ und $a^*a^{*'}a^{*''}\ldots$,

und dieselbe ist daher Involution und somit durch ein einziges Paar außer dem genannten bestimmt; ihr Pol ist für $n = (2k - 1)$ Drehpunkte der Schnittpunkt ihrer Geraden mit der Sehne jenes zweiten Paares, und die Schnittpunkte seiner Polare mit dem Kegelschnitt, also die Berührungspunkte der von ihm aus an diesen gehenden Tangenten, sind die A_1^*, A_2^* der beiden Lösungen; für $(2k - 1)$ Ortsgerade ist die Verbindungslinie ihres Schnittpunktes mit dem Schnittpunkt des einen neuen Paares die Polare der Involution, und die Tangenten in ihren Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt oder durch ihren Pol an denselben bilden a_1^*, a_2^* der beiden Lösungen.

So also auch in dem Falle des eingeschriebenen Dreiseits, von welchem in 1) diese Erörterungen ausgingen; man bestimmt wie in 2) das Paar A, A^* und hat im Schnitt der Verbindungslinie mit der Geraden 123 den Pol der Involution und in den Berührungspunkten der von ihm an den Kegelschnitt gehenden Tangenten die Punkte A_1^* und A_2^* der beiden Lösungen. (Vergl. die Bemerkung in § 32 über die Tripel harmonischer Pole.)

In betreff der Bestimmung der beiden Lagen des Kegelschnittpunktes in 1) ist noch zu bemerken, daß die Fluchtlinie der Ebene ABC in der Lösung nicht gebraucht wird, sondern daß dieselbe nur von ihrer Spur in der Ebene **L** abhängt. Jede der Lösungen umfaßt dann auch bei gegebenem Distanzkreis noch unendlich viele Fälle, und man kann z. B. die Fluchtlinie der Ebene ABC so bestimmen, daß die beiden gefundenen Kegel insbesondere Zylinder zweiten Grades oder die Dreiecke ABC und $A^*B^*C^*$ zentrisch affin statt perspektivisch sind.

6) Im Falle der geraden Anzahl $n = 2k$ ist dagegen für die Lage der Drehpunkte in derselben Reihe oder der Ortsgeraden in demselben Büschel die $k$mal mit ihren beiden Schnittpunkten im Kegelschnitt gezählte gerade Reihe selbst bez. der $k$mal mit seinen beiden Tangenten an den Kegelschnitt gezählte Scheitel des Büschels selbst, und zwar immer für jedes der bezeichneten beiden Elemente als erstes, eine Lösung, sodaß damit im allgemeinen die möglichen Lösungen erschöpft sind. Wenn dann ein nicht in die Reihe fallendes $2k$Seit existiert, dessen Ecken auf dem Kegelschnitt liegen, während seine Seiten durch jene Punkte gehen. so existieren deren unendlich viele; jeder Punkt des Kegelschnittes ist Anfangsecke eines solchen; etc.

7) Statt der Involution auf dem Kegelschnitt wird die Fundamentaleigenschaft der Projektivität in analoger Weise gebraucht bei der Lösung der Aufgaben:

Zu einem nEck, dessen benachbarte Seitenpaare n feste Kegelschnitte berühren, soll man ein neues nEck bestimmen, dessen

Zu einem nSeit, dessen benachbarte Eckenpaare in n festen Kegelschnitten liegen, soll man ein neues nSeit bestimmen, dessen

Ecken der Reihe nach in den Seiten des ersten liegen, während seine Seiten der Reihe nach jene Kegelschnitte berühren.

Seiten der Reihe nach durch die Ecken des ersten gehen, während seine Ecken der Reihe nach in jenen Kegelschnitten liegen.

Auch sie enthalten viele Spezialfälle.

8) Es hat keine Schwierigkeit, auch diese Probleme mit ihren Lösungen auf Kegel und Zylinder zweiten Grades zu übertragen.

9) Man bezeichne und modifiziere die Sätze des § 36 und seiner Beispiele, welche Fokaleigenschaften der Kegel zweiten Grades geben.

10) Wenn von einem Kegel zweiten Grades vier Mantellinien und die Tangentialebene der einen bez. vier Tangentialebenen und die Mantellinie der einen gegeben sind, so konstruiert man die Tangentialebenen in den drei andern Mantellinien bez. die Mantellinien der drei andern Tangentialebenen mit den in §§ 27, 6 und 28, 4 enthaltenen Mitteln. Der dortigen Terminologie gemäß sprechen wir von einem dem Kegel eingeschriebenen Vierkant mit seinem Diagonaldreikant und dem zugehörigen ihm umgeschriebenen Vierflach mit seinem Diagonaldreiflach und fassen damit die Konstruktion in den Satz: Ein dem Kegel eingeschriebenes Vierkant und das zugehörige ihm umgeschriebene Vierflach haben dasselbe Diagonaltripel; in diesem hat jede Kante die Gegenfläche zur Polarebene und jede Fläche die Gegenkante zum Polarstrahl. (§ 32.)

Die Schnittpunkte seiner Geraden mit dem Kegel zweiten Grades (S. 265) sind nun die Doppelpunkte der Involution harmonischer Pole auf ihr, also durch die Schnittpunkte der Polarebene von zwei ihrer Punkte mit ihr bestimmt; ebenso die Tangentialebenen durch einen Punkt als Doppelebenen der Involution harmonischer Polarebenen an der Geraden die ihn mit der Spitze verbindet.

11) Wenn der Kegel durch seine Spitze S und fünf Punkte oder fünf Tangenten seiner Leitkurve in einer die Spitze nicht enthaltenden Ebene L dargestellt ist, so werden alle diese Konstruktionen durch Eintragung des Distanzkreises der Spitze S in Bezug auf die Ebene L in diese an der Leitkurve ausführbar weil sie projektivisch sind. Man erläutere dies im Anschluß an § 32, 1 und an den Konstruktionen in 11) bis 15) ebenda.

12) Man erläutere die Konstruktionen der Kegel zweiten Grades, bei denen unter den Daten ein Fokalstrahl mit oder ohne zugehörige Direktrixebene ist; man wird etwa den Kegelmittelpunkt zum Zentrum C und den Fokalstrahl als CC_1 wählen.

C. Die zentrische Kollineation räumlicher Systeme als Theorie der Modellierungsmethoden.

37. Wenn ein Zentrum C der Projektion und eine nach drei Dimensionen ausgedehnte Originalfigur beliebig gegeben sind, so kann man auf allen durch das Zentrum gehenden Ebenen, welche dieselbe schneiden, die Beziehung der zentrischen Kollineation ebener Systeme in der Weise hergestellt denken, daß jedem Punkte P des Originals ein Punkt P_1 des Abbilds oder Modells, und umgekehrt, entspricht, und ebenso jeder Geraden g eine Gerade g_1, also auch jeder Ebene $\mathbf{E}$ eine Ebene $\mathbf{E}_1$. Entsprechende Punktepaare liegen auf einerlei Strahl aus dem Zentrum, entsprechende Paare von Geraden auf einerlei Ebene durch dasselbe. In jeder von diesen Ebenen liegen die sich selbst entsprechenden, vom Zentrum verschiedenen Punkte in einer geraden Linie, der zugehörigen Kollineationsachse s. Denken wir durch denselben Strahl aus dem Zentrum ein Büschel von Ebenen gelegt, so haben die Achsen s derselben notwendig alle den Punkt jenes Strahls gemein, welcher mit seinem entsprechenden zusammenfällt; d. i. die Achsen s auf allen Ebenen durch das Zentrum bilden ein System von Geraden, von denen je zwei einander schneiden, ohne daß sie alle durch einen Punkt gehen, und somit nach S. 130, B. 3, da nicht alle durch einen Punkt gehen, eine Ebene. Sie ist die Ebene der sich selbst entsprechenden Punkte und Geraden und wir nennen sie die Kollineationsebene $\mathbf{S}$ des Systems.

Denken wir ebenso in jeder Ebene durch das Zentrum die beiden Gegenachsen q_1, r der ihr entsprechenden zentrischen Kollineation, so bilden die ersten aus gleichen Gründen — weil dem unendlich entfernten Punkte jedes Strahls durch das Zentrum ebenso als Bild wie als Original nur ein bestimmter Punkt Q_1, bez. R entsprechen kann — eine zur Kollineationsebene parallele Ebene $\mathbf{Q}_1$ und die letzten eine ihr parallele

Ebene **R**; es sind die Gegenebenen des Systems, welche beide nach § 9 S. 35 so liegen, daß die Mitte zwischen ihnen auf jedem Strahl durch das Zentrum auch die Mitte ist zwischen Zentrum und Kollineationsebene auf demselben Strahl.

Der Parallelismus der Gegenebenen zur Kollineationsebene kann auch direkt wieder erwiesen werden, indem man drei Richtungen oder unendlich ferne Punkte Q_1, Q_2, Q_3 des Originalraums betrachtet, die nicht derselben Stellung angehören; denselben entsprechen drei Punkte Q_{11}, Q_{21}, Q_{31}, welche nicht in einer Geraden liegen, und die Geraden $Q_{11}Q_{21}$, $Q_{21}Q_{31}$, $Q_{31}Q_{11}$ müssen der Kollineationsebene parallel sein, weil sie sich mit den entsprechenden unendlich fernen Geraden Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_1 in ihr schneiden müssen. Ist dann Q_4 ein beliebiger unendlich ferner Punkt, und Q_{41} sein Abbild, so sind auch $Q_{11}Q_{41}$, $Q_{21}Q_{41}$, $Q_{31}Q_{41}$ der Kollineationsebene parallel, d. h. den unendlich fernen Punkten des Originalraums entsprechen die Punkte einer bestimmten der Kollineationsebene parallelen Ebene $\mathbf{Q}_1$ des Bild- oder Modellraums. Aus denselben Gründen entsprechen den unendlich fernen Punkten R_1 des Bildraums die Punkte einer zur Kollineationsebene parallelen Ebene **R** des Originalraums.

38. Alle einander im Originalraume und im Bildraume entsprechenden Punktreihen, Strahlenbüschel und Ebenenbüschel, Strahlenbündel, Ebenenbündel und ebenen Systeme sind zueinander perspektivisch, d. h. sie sind Schnitte oder Scheine des nämlichen Elementargebildes. So sind z. B. die entsprechenden geraden Punktreihen Schnitte desselben Strahlenbüschels aus dem Zentrum mit entsprechenden Geraden, die entsprechenden Ebenenbüschel Scheine desselben Strahlenbüschels in der Kollineationsebene aus entsprechenden Punkten, etc. Die entsprechenden Elementargebilde erster Stufe haben somit gleiches Doppelverhältnis. Insbesondere liegen in jedem Strahl aus dem Zentrum zwei projektivische Reihen entsprechender Punkte A, A_1, etc., welche das Zentrum C und den der Kollineationsebene angehörigen Punkt S zu Doppelpunkten haben; durch jede in der Kollineationsebene liegende Gerade s gehen zwei projektivische Büschel entsprechender Ebenen $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$, etc., in denen die Kollineationsebene **S** und die Ebene **C** nach dem Zentrum die Doppelebenen sind; die entsprechenden Strahlen a, a_1, etc. aus

einem Punkt der Kollineationsebene ordnen sich in Paare projektivischer Büschel in einerlei Ebene durch das Kollineationszentrum mit dem der Kollineationsebene angehörigen Strahl s und dem nach dem Zentrum gehenden Strahl c als Doppelstrahlen. Man hat (vergl. § 19)

$$(CSAA_1) = (CSBB_1) = (\mathbf{CSAA}_1) = (\mathbf{CSBB}_1) = (csaa_1) = (csbb_1) = \varDelta$$

und nennt diese Konstante das **charakteristische Doppelverhältnis der zentrischen Kollineation der Räume.**

Für die Gegenpunkte Q_1, R eines Strahls aus dem Zentrum hat man insbesondere

$$\varDelta = (CSAA_1) = (CS\infty Q_1) = (CSR\infty), \text{ d. h. } \varDelta = \frac{SQ_1}{CQ_1} = \frac{CR}{SR};$$

und hieraus folgt durch Subtraktion der Einheit auf beiden Seiten $CQ_1 = RS$. (Vergl. § 19; 1 u. f.)

B. 1) Eine zentrische Kollineation räumlicher Systeme ist durch ihre Charakteristik $\varDelta$, das Zentrum und die Kollineationsebene oder eine Gegenebene bestimmt; ebenso durch das Zentrum, die Kollineationsebene und eine der Gegenebenen; endlich durch das Zentrum, die Kollineationsebene und ein Paar entsprechender Punkte, Strahlen oder Ebenen derselben.

2) Wenn die Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 und A_1', A_2', A_3', A_4' von zwei Tetraedern in Paaren A_i, A_i' auf vier Geraden aus einem Zentrum C liegen, so schneiden sich die Paare der entsprechenden Ebenen derselben in vier Geraden s_{ik} auf einer Ebene $\mathbf{S}$ und umgekehrt. (Vergl. § 19, 11.) Denn je zwei entsprechende Kanten A_iA_k und $A_i'A_k'$ liegen in einer durch C gehenden Ebene und schneiden sich daher in einem Punkte; die vier genannten Geraden s_{ik} sind also die geraden Verbindungslinien von sechs Punkten oder sie schneiden sich paarweise, ohne durch einen Punkt zu gehen und müssen daher in einer Ebene liegen. Der umgekehrte Satz, wonach die Ecken von zwei Tetraedern, deren Flächen $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{A}_i'$ paarweis durch vier Gerade derselben Ebene $\mathbf{S}$ gehen, in vier Geraden aus einem Punkte C liegen, folgt aus der nach dem Prinzip der Dualität entsprechenden Überlegung, daß die entsprechenden Kanten $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_k$, $\mathbf{A}_i'\mathbf{A}_k'$ der Tetraeder, als in einem Punkte auf $\mathbf{S}'$ sich schneidend, je in einer Ebene liegen, die also auch das Paar der Verbindungslinien der zugehörigen entsprechenden enthält; daß also diese Kanten, weil sie nicht alle vier in derselben Ebene liegen können, durch einen und denselben Punkt C gehen müssen. **Zwei perspektivische Tetraeder bestimmen eine zentrische Kollineation der Räume;** die Parallelebenen $\mathbf{A}_i^*$ bez. $\mathbf{A}_i^{*\prime}$ vom Zentrum zu den Flächen $\mathbf{A}_i'$, $\mathbf{A}_i$ des einen Tetraeders schneiden die entsprechenden Flächen des andern in vier

geraden Linien auf der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ bez. **R** der beiden Räume. (Vergl. § 19, 11.)

3) Die Ebene **S** ist bereits durch die Schnittlinie eines Paares der entsprechenden Ebenen und den Durchschnittspunkt zweier von den gegenüberliegenden Ecken ausgehenden entsprechenden Kanten bestimmt, und man kann daher die beiden andern in jenen Ebenen gelegenen Eckenpaare auf Strahlen aus C beliebig bewegen, ohne die Ebene **S** zu ändern oder ihre Eigenschaft aufzuheben. Man gelangt also zu $n$seitigen perspektivischen Pyramiden und, wenn man will, zu perspektivischen Kegeln; die Grundflächen derselben liegen in einem dritten Kegel, dessen Spitze in der Verbindungslinie der beiden ersten enthalten ist, und sie durchdringen sich in einer ebenen Kurve, deren Ebene die Schnittlinie der Grundflächenebenen enthält.

Aus zwei perspektivischen Zylindern folgt ein dritter und die Richtungen der drei sind derselben Ebene parallel.

39. Wir nennen das Abbild einer gegebenen Raumfigur, das man so erhält, zur Unterscheidung von der Projektion auf die Ebene, die wir bisher betrachteten, das Modell derselben, genauer das zentrisch kollineare Modell, und besprechen zunächst die Art der Ableitung entsprechender Elemente auseinander. Ist g eine Gerade des Originalsystems, so erhält man durch ihren Schnittpunkt S mit der Kollineationsebene als ihrem sich selbst entsprechenden Punkt einen Punkt ihres Bildes g_1; ihr Schnittpunkt R mit der Gegenebene **R** gibt durch den nach ihm gehenden Strahl aus dem Zentrum die Richtung des Bildes, und der zu g parallele Strahl aus dem Zentrum gibt im Schnittpunkt Q_1 mit der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ den Gegenpunkt des Bildes g_1, sodaß man dasselbe durch drei Punkte bestimmt hat; man bedarf zu seiner Konstruktion somit z. B. nur der einen Gegenebene. Aus l_1 erhält man umgekehrt das Original l durch den Schnittpunkt S mit der Kollineationsebene, den Schnitt R des zu l_1 parallelen Strahls aus dem Zentrum in **R** und durch die Richtung des Kollineationsstrahls nach dem Durchschnitt Q_1 von l_1 mit der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$.

Zu einem Punkte A in g oder B_1 in l_1 findet man den entsprechenden A_1 bez. B im Durchschnitt des nach ihm gehenden Strahls aus dem Zentrum mit der entsprechenden Geraden g_1 bez. l. Zu einer Ebene **A** durch g oder $\mathbf{B}_1$ durch l_1 ergibt sich die entsprechende $\mathbf{A}_1$ bez. **B** als Verbindungsebene ihrer Spur s in der Kollineationsebene mit g_1 bez. l. Die

entsprechenden zu denjenigen Geraden oder Ebenen, welche der Kollineationsebene parallel sind, bestimmen sich durch einen ihrer Punkte, weil sie der gegebenen Geraden oder Ebene selbst parallel sind. Für die der Kollineationsebene parallelen Ebenen steht das Verjüngungsverhältnis der Ähnlichkeit zwischen Original und Bild δ zur Charakteristik der Zentralkollineation $\varDelta$ im Verhältnis ihrer Abstände von der Kollineationsebene.

B. 1) Zu einer Ebene **A** bestimmt man die entsprechende $\mathbf{A}_1$, indem man ihre Schnittlinie s mit der Kollineationsebene, die Schnittlinie q_1 der ihr parallelen Ebene aus dem Zentrum mit der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ und die unendlich ferne Gerade der Ebene vom Zentrum nach der Schnittlinie r von **A** mit der Gegenebene **R**, d. h. die Stellung von $\mathbf{A}_1$ angibt; diese drei liegen in $\mathbf{A}_1$.

Man konstruiere auf demselben Wege die entsprechende Ebene **B** zu einer gegebenen Ebene des Bildraums $\mathbf{B}_1$.

2) Man erläutere die Konstruktion der entsprechenden Elemente in den den Grenzwerten $+1$, 0, ∞ von $\varDelta$ entsprechenden Fällen. Man hat $\varDelta = +1$ für $SQ_1 = CQ_1$, $CR = SR$ oder das Zentrum in der Kollineationsebene, also die Gegenebenen äquidistant von ihr.

Dagegen ist $\varDelta = 0$ für $SQ_1 = CR = 0$, d. h. wenn **S** mit $\mathbf{Q}_1$ zusammenfällt und daher C in **R** liegt; und $\varDelta = \infty$ für $CQ_1 = SR = 0$ oder C in $\mathbf{Q}_1$ und **S** als mit **R** vereinigt, sodaß durch Vertauschung von $\mathbf{Q}_1$ mit **R** beide Fälle ineinander übergehen.

Schließlich wird $\varDelta$ unbestimmt, wenn $\mathbf{Q}_1$, **R** und **S** in einer durch C gehenden Ebene vereinigt sind. Im Falle $\varDelta = 0$ entsprechen einer als Original g resp. Modell h_1 betrachteten Geraden im Raume der Strahl g_1 in $\mathbf{SQ}_1$, welcher sie und ihren Parallelstrahl von C aus scheidet, resp. der Strahl h aus C_1 der sie in **S** trifft; also den Strahlen eines Bündels von g aus einem Punkte von **S** die des Büschels in **S** um diesen Punkt, und denen eines ebensolchen Bündels von h_1 der eine Strahl nach ihrem Scheitel; etc. Nicht der Raum ist mehr bestimmt, sondern nur die Ebene mit den Modifikationen, wie sie die Zentralprojektion benutzt. (Vergl. § 19, 8.) Es entspringen singuläre Raumkollineationen wie in § 22, f, g ebene. Den besondern Fall $\varDelta = -1$ besprechen wir weiterhin für sich.

3) Die Systeme entsprechender Punkte und Strahlen in zwei entsprechenden Ebenen **A**, $\mathbf{A}_1$ sind zentrisch kollinear für ihre gemeinsame Schnittlinie s mit der Kollineationsebene als Kollineationsachse und für ihre resp. Schnittlinien r, q_1 mit den Gegenebenen **R**, $\mathbf{Q}_1$ als Gegenachsen; alle diese zentrischen Kollineationen haben Charakteristiken $\varDelta_E$, die größer oder kleiner sind als die Charakteristik $\varDelta$, welche den projizierenden Ebenen zukommt. Für jede bestimmte

Neigung α der Originalebene gegen **S** nehmen sie von ∞ bis Δ ab, während diese von unendlicher Entfernung bis zum Zentrum heranrückt (vergl. § 19, 5); dann sinken sie weiter bis zu der Ebene, deren Bild zur Kollineationsebene senkrecht ist, mit dem Werte $\Delta_E = \Delta \sin\alpha$; endlich wachsen sie wieder von da durch Δ bis ∞.

Denn für den Querschnitt von **S**, $\mathbf{Q}_1$, **E** und $\mathbf{E}_1$ mit einer zu s normalen Ebene durch C hat man bei S als dem Schnitt mit s die Winkel α und α_1 der Ebenen **E** und $\mathbf{E}_1$ mit **S**, und erhält mit Q_1 als Schnitt der Geraden q_1, sowie mit S_1 als Schnitt der Spur der projizierenden Parallelebene Cq_1, für die Charakteristiken der projizierenden Ebenen oder der Kollineation der Räume und die Charakteristik der Kollineation der ebenen Systeme **E**, $\mathbf{E}_1$ die Werte

$$\Delta = S_1Q_1 : CQ_1, \quad \Delta_E = SQ_1 : CQ_1$$

oder

$$\Delta : \Delta_E = S_1Q_1 : SQ_1 = \sin\alpha_1 : \sin\alpha.$$

4) Für welche entsprechenden ebenen Systeme findet symmetrische Kongruenz statt? Man hat für A, A_1 als Punkte derselben

$$CQ_1 = RS = AR, \quad CR = Q_1S = A_1Q_1;$$

man erhält sie also wie in § 15, 4 die entsprechenden symmetrisch gleichen Reihen durch ihre Schnitte auf einem Kollineationsstrahl; sie sind also auch die zur Kollineationsebene in Bezug auf die Gegenebenen symmetrischen Ebenen **T**, $\mathbf{T}_1$.

Natürlich liegen die symmetrisch gleichen Reihen t, t_1 aller entsprechenden ebenen Systeme in diesen Ebenen **T**, $\mathbf{T}_1$.

Betrachtet man speziell den zu **S** normalen Strahl durch C, so erkennt man die zum Zentrum in Bezug auf die Gegenebenen symmetrischen Punkte T, T_1 desselben als Scheitel entsprechender symmetrisch gleicher Bündel. Die Scheitel T, T_1 der symmetrisch gleichen entsprechenden Büschel in entsprechenden Ebenen sind Schnitte entsprechender Strahlen dieser Bündel mit den Ebenen.

Mit $\Delta = -1$ (§ 42) vereinigen sich jene in der Parallelebene **V** zu **S** durch C (5), diese fallen im Fußpunkt der Normale vom Zentrum auf **S** zusammen.

5) Für die durch das Zentrum gehende Parallelebene **V** zur Kollineationsebene findet Ähnlichkeit und ähnliche Lage der entsprechenden Systeme nach dem Verjüngungsverhältnis Δ statt.

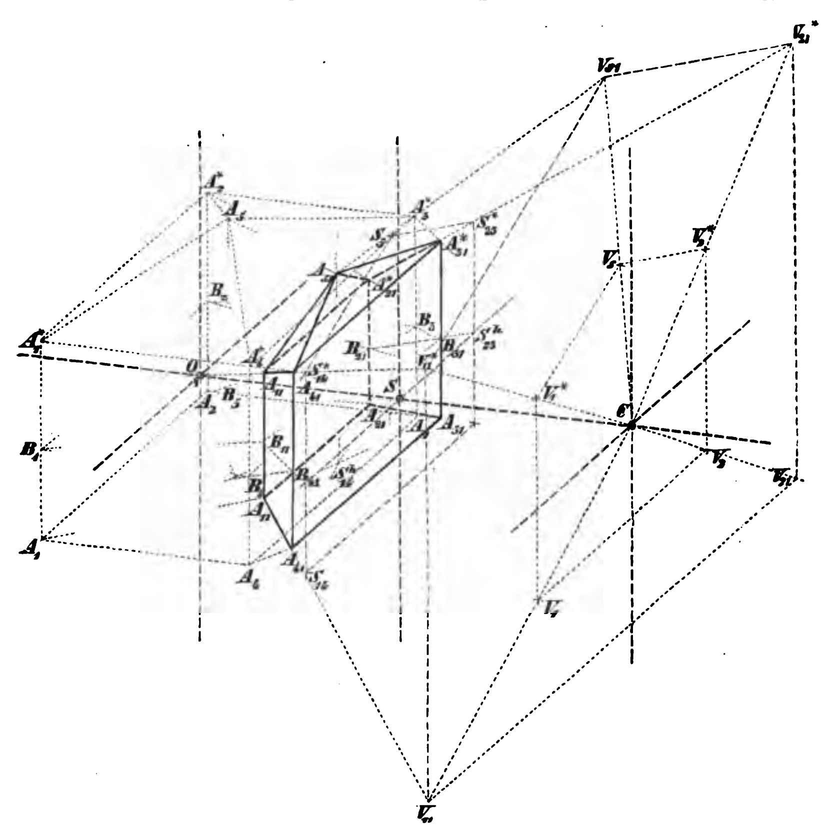
6) Man bestimme die Region des Bildes von A auf seinem Kollineationsstrahl gegen Zentrum, Kollineationsebene und Gegenebene **R** aus der Lage von A gegen dieselben Elemente. (Vergl. § 4.)

7) Man erörtere die Formen, welche einem gegebenen Tetraeder je nach seinen verschiedenen Lagen in Beziehung zur Gegenebene seines Systems entsprechen können. (Vergl. § 14; 2, 3.)

8) Man bestimme in einer gegebenen zentrischen Kollineation räumlicher Systeme die Ebenen, denen eine bestimmte Bildbreite sq_1 zukommt. Ihre r in **R** sind äquidistant vom Zentrum.

9) Von den entsprechenden gleichen Strecken in Reihen und den entsprechenden gleichen Winkeln in Strahlbüscheln und Ebenenbüscheln aus können auch in der zentrischen Kollineation der Räume entsprechende kongruente Dreiecke und Tetraeder gebildet werden.

40. Wenn wir die räumlichen Systeme in zentrischer Kollineation als Systeme von Punkten fassen — von Punkten A_1, A_2, ... des Originals und entsprechenden Punkten A_{11},



A_{21}, ... des Bildes — so kann die Konstruktion des einen aus dem andern zurückgeführt werden auf die Konstruktion des zentrisch kollinearen ebenen Systems zu einem gegebenen System in derselben Ebene.

Wir denken eine durch das Kollineationszentrum gehende Ebene und die Schnittpunkte B_1, B_2, ... derselben mit den Parallelen p_1, p_2, ... insbesondere solchen, die man zu einer festen Geraden p der Kollineationsebene aus den Punkten

A_1, A_2, ... des Originalsystems gezogen hat. Bilden wir dann zu dem System der B_i das zentrisch kollineare System in seiner Ebene für C als Zentrum und die Schnittlinien derselben mit **S**, $\mathbf{Q}_1$ und **R** als Kollineationsachse s und Gegenachsen q_1 und r, also das System B_{11}, B_{21}, ..., so sind die den p_i entsprechenden Geraden p_{i1} die durch B_{11}, B_{21}, ... gezogenen Strahlen nach dem Gegenpunkte Q_1 der p_i, insbesondere die durch sie gehenden Parallelen zu p. Die Punkte A_{i1} liegen in den nach den entsprechenden Punkten A_i gehenden Kollineationsstrahlen da, wo dieselben die p_{i1} durchschneiden.

In der Figur auf S. 279 ist für das Polyeder der Ecken $A_1 A_2 A_3 A_4 A_4{}^* A_1{}^* A_2{}^* A_3{}^* A_5$ mit Hilfe der Normalen zu der durch das Zentrum C gehenden Horizontalebene als der p_i durch die Punkte B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 und ihre entsprechenden B_{11}, B_{21}, B_{31}, B_{41}, B_{51} in der zentrischen Kollineation auf dieser Ebene das System der p_{i1} und damit die zentrisch kollineare Raumfigur $A_{11} A_{21} A_{31} A_{41} A_{41}^* A_{11}^* A_{21}^* A_{31}^* A_{51}$ anschaulich dargestellt.

Die Punkte S und Q_1 und die durch sie gehenden Parallelen zu den durch C gelegten rechtwinkligen Achsen bezeichnen die Lage der Kollineationsebene **S** und der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$.

Ist die bezeichnete Ebene parallel der Kollineationsebene, so sind die Systeme der B_i und B_{i1} ähnlich und in ähnlicher Lage für das Zentrum C als Ähnlichkeitspunkt; dafür aber kann das System der p_i nicht mehr aus Parallelen zu einer Geraden p der Kollineationsebene und das System seiner Bilder p_i also nicht mehr aus Parallelen bestehen. In der Figur auf S. 279 sind so die Fußpunkte V_1, V_2, $V_2{}^*$, V_5, $V_1{}^*$ der Normalen von den Originalpunkten auf jene Parallelebene **V** benutzt, indem ihre entsprechenden V_{11}, V_{21}, ... konstruiert sind.

Ist dann das System der A_i durch seine orthogonalen Parallelprojektionen A_i', A_i'' auf zwei zueinander rechtwinklige Ebenen der Achsen x, y und x, z dargestellt, die entweder beide zur Kollineationsebene **S** rechtwinklig sind oder von denen die eine x, z zu ihr parallel ist, so kann man das System der projizierenden Linien jeder von diesen Ebenen im ersten Falle (Figur auf S. 282), im zweiten Falle (Figur auf S. 283) das der projizierenden Linien der Ebene x, y als das System der p_i und die Normalebene dieser Projizierenden durch das Zentrum als Ebene der B_i und B_{i1} betrachten. Man bildet

das zentrisch kollineare zu dem System der zugehörigen Projektionen von A_i für die gleichnamige Projektion von C als Zentrum, die gleichnamige Spur von **S** als Achse der Kollineation und die gleichnamigen Spuren von $\mathbf{Q}_1$ und **R** als Gegenachsen q_1 und r derselben, und erhält damit die gleichnamigen Projektionen der A_{i1}; man findet endlich die andern Projektionen der letzteren in denen der p_{i1} mittelst der gleichnamigen Projektionen der durch das Zentrum gehenden Strahlen nach den A_i, auf welchen sie liegen müssen.

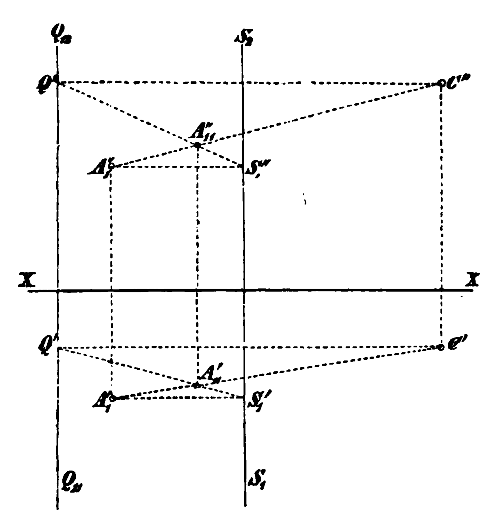
Wählt man als das System der p_i die Normalen zur Kollineationsebene aus den A_i, so kann das System ihrer Bilder durch Benutzung der Ähnlichkeit mit dem Verhältnis $\varDelta$ in der Ebene **V** bestimmt werden, sodaß die Konstruktion des Abbildes auf die Durchführung dieses speziellen Falles der Kollineation ebener Systeme reduziert ist. (Figur auf S. 283.)

B. 1) Man kann durch die Punkte A_i des Originalsystems ein Strahlenbündel aus einem Punkte R der Gegenebene **R** legen, welches sich in ein Parallelenbündel von der Richtung von CR im Bilde verwandelt; die Strahlen desselben gehen dann durch die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen des ersten in der Kollineationsebene. Auch die Beziehung der Ähnlichkeit und ähnlichen Lage in der Ebene **V** ist zweckmäßig zu benutzen.

2) Welche Methode der Konstruktion des Bildsystems ist die zweckmäßigste, wenn die Kollineationsebene als zusammenfallend mit der einen der Projektionsebenen (x, z) vorausgesetzt wird?

41. Wenn die Gegenebenen $\mathbf{Q}_1$ und **R** auf entgegengesetzten Seiten der Kollineationsebene **S** und also auch des Zentrums C gelegen sind, und zwar $\mathbf{Q}_1$ näher als **R** bei **S**, — die Charakteristik $\varDelta$ ist dann ein positiver echter Bruch —, so wird der ganze unendliche Raum auf der dem Zentrum entgegengesetzten Seite der Kollineationsebene in dem zwischen der Kollineationsebene **S** und der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ gelegenen Raume so abgebildet, daß die vom Zentrum entfernteren Punkte des Originals auch im Bilde die entfernteren sind. Die entsprechenden projektivischen Reihen auf Strahlen aus C, etc. sind gleichlaufende, die Doppelelemente S_1 liegen also zwischen den Gegenebenen. Nur dies letzte entspricht den B e d i n g u n g e n d e s S e h p r o z e s s e s, das Gegenteil ist im Widerspruch mit denselben. Die gedachte Anordnung vorausgesetzt, kann also — da ja alle entsprechenden Systeme in dem zentrisch kollinearen räumlichen Systeme

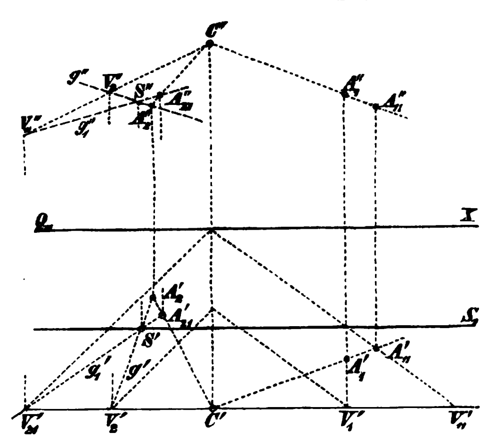
in der Beziehung der Zentralprojektion zueinander stehen — das zentrisch kollineare System einer als gegeben gedachten Raumform für ein im Zentrum befindliches Auge ebenso vollkommen täuschend diese Raumform selbst ersetzen, wie dies bei der Perspektive ebener Systeme geschehen kann — sobald nur den übrigen Bedingungen des Sehprozesses genügt wird; insbesondere denen vom Sehkegel, wonach die darzustellenden Punkte ganz innerhalb eines aus dem Zentrum als Spitze und mit der Normalen zur Kollineationsebene als Achse beschriebenen geraden Kreiskegels von beschränktem Öffnungswinkel auf derselben Seite seiner Spitze gelegen sein müssen. (Man mag etwa $1/_3$ als Tangente des halben Öffnungswinkels wählen.) Sowie die Zentralprojektion dann Perspektive genannt wird, so nennt man in diesem Falle die Konstruktion räumlicher zentrisch kollinearer Systeme gemeiniglich Relief-Perspektive, nach ihrer Anwendung auf die Konstruktion der Reliefs in der plastischen Kunst. Die Charakteristik $\varDelta$ ist für diese ein kleiner positiver Bruch, z. B. $1/_{10}$.



Aber sie ist darauf nicht beschränkt; sie kann täuschende Modelle gegebener Raumgestalten für jedes Zentrum konstruieren, von dem aus ein ruhendes Auge sie sehen könnte. Man kann auch die Wirkungen der Beleuchtung an den Originalen täuschend nachahmen, indem man das Modell durch eine Lichtquelle beleuchten läßt, deren Standort dem der Lichtquelle im Original in der Kollineation entspricht; also für Sonnenbeleuchtung des Originals — auf die allein sich unsere Beobachtungen gemeiniglich beziehen — aus dem der Lichtrichtung entsprechenden Punkte der Gegenebene Q_1. Die Schatten des

Modells erscheinen dann dem Auge im Zentrum täuschend wie Sonnenschatten des Originals, das es zu sehen glaubt, und unterstützen die Täuschung in hohem Grade. Bei Reliefs, die in einer Wandfläche stecken, ist eine solche Beleuchtung freilich nicht möglich, man tut gut, sie in diffusem Licht zu betrachten.

Nach denselben Grundsätzen sind aber außer den Reliefs der Skulptur die szenischen Darstellungen der Schaubühne — die Vorhangsebene als Kollineationsebene **S**, die Hinterwand der Bühne als Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ —, und die Konstruktionen der dekorativen Kunst überhaupt, sei es in der Architektur oder in der höheren Garten-Kunst, zu entwickeln. Für die Bühne ist Δ ein positiver Bruch zwischen $^1/_3$ und $^1/_2$. Ist er zu klein, hat die Bühne zu wenig Tiefe, so macht sich der Gegensatz zwischen den in unverkürzten Tiefendimensionen erscheinenden Personen zu den Umgebungen mit stark verminderten bei jeder Entfernung derselben von der Vorhangsebene zu sehr bemerklich, der Boden bekommt zu starke Neigung u. s. w.



Was die Lichtwirkungen auf der Bühne betrifft, so widerspricht offenbar die Beleuchtung aus der Vorhangebene der plastischen Wirkung immer, wo es sich in der Szene um Tages-, also Sonnenbeleuchtung handelt; bei den seltenen Gelegenheiten, wo einmal die Bühne von hinten beleuchtet werden muß, wird der Unterschied jedem aufmerksamen Zuschauer deutlich.

Bei der Vielfachheit der Standpunkte, für welche eine Theaterdekoration wirken soll, und ebenso für die großen nicht auf einmal zu übersehenden Skulpturwerke der Reliefkunst liegt der Gedanke nahe, sie in Regionen zu teilen und aus den richtigen Einzeldarstellungen derselben für entsprechende Standpunkte einen Ausgleich zu bilden.

Auch die Bilder in den sphärischen Hohlspiegeln und in den Linsenkombinationen stehen zu den Originalen in der Beziehung der zentrischen Kollineation. (Vergl. § 21, 10.) Sie hat also, abgesehen von ihrer geometrischen Bedeutung, ein ausgedehntes Feld interessanter praktischer Anwendungen.

B. 1) In den Anordnungen der Figuren im Text soll man zu einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene in einfachster Weise die entsprechende Ebene konstruieren.

2) Man konstruiere die zentrisch kollinearen Formen zu Würfeln, Prismen, Pyramiden in verschiedenen Stellungen hinter der Kollineationsebene.

3) Man erläutere die Art, wie auf Grund der entwickelten Gesetze die Verteilung und Anordnung der Kulissen einer Dekoration von vorgeschriebener Wirkung zu machen ist.

4) Man sieht leicht, daß zwei zentralkollineare Kegel zweiten Grades im Sinne des Überblicks zum vorigen Abschnitt zueinander zentrisch kollinear im hier entwickelten Sinne sind für ihre Kollineationsebene als Kollineationsebene und für einen beliebigen Punkt ihres Zentralstrahls als Zentrum der Kollineation; ebenso wie zwei zentralkollineare Kegelschnitte einer Ebene für ihr Kollineationszentrum und eine durch ihre Kollineationsachse gehende Ebene als Kollineationsebene. Mit welcher Spezialität im Falle ihrer Oskulation?

5) Dem geraden Kreiszylinder von schräg zur Kollineationsebene liegender Achse entspricht im allgemeinen ein Kegel vom zweiten Grade; in welchem Falle wird derselbe ein gerader Kreiskegel?

6) Das Relief einer Kugel ist eine geschlossene Fläche mit elliptischen ebenen Querschnitten (in Parallelebenen zur Kollineationsebene speziell kreisförmigen) — denn im Falle des Reliefs wird die Kugel von der Gegenebene **R** nicht getroffen.

Wenn man drei zueinander senkrechte Durchmesser der Kugel zieht, die sie in den Punkten A und B, C und D, E und F bez. schneiden, so liegen die in diesen an die Kugel gehenden Tangentialebenen **A** und **B**, **C** und **D**, **E** und **F** paarweise parallel und bilden einen der Kugel umgeschriebenen Würfel. Man nennt die Ebenen ACE, ADE, AFE, AFC, ADF; BDE, BCE, BFC, BDF die Polarebenen der Punkte **ACE**, ..., d. h. Ebenen der Berührungspunkte der von diesen ausgehenden Tangentialebenen; ebenso sind $ABCD$, $CDEF$, $ABEF$ die Polarebenen von **ABCD**, ... den Richtungen von EF, AB, CD bez. etc. Der Geraden zwischen zwei Polen entspricht die Schnittlinie ihrer Polarebenen, also den AB, CD, EF die Ebenen $CDEF$, ... bez., ebenso den AC, AD, AE, AF die Geraden **AC**, **AD**, ..., DE ... die **DE**, ... und (**ACE**, **BDF**) etc. (ACE, BDF) etc. die Stellungen ihrer Normalebenen. (Vergl. § 26, S. 146.)

So wie die Ecken des der Kugel umgeschriebenen Würfels viermal zu vier Paaren in Strahlen aus einem Punkte liegen, — nämlich aus den Richtungen von AB, CD, EF und aus dem Schnittpunkte M dieser Verbindungslinien der Berührungspunkte seiner Paare paralleler Ebenen, — so liegen die Ecken der entsprechenden Modellfigur viermal in vier Paaren in Strahlen aus drei Punkten der Gegenebenen $\mathbf{Q}_1$ der zentrischen Kollineation und aus dem Modell M_1 des Mittelpunktes; die Berührungspunkte A_1, B_1, etc. ihrer Ebenen mit dem Relief der Kugel liegen paarweise in den Geraden von ihm nach jenen drei Punkten. Alle zu $ABCD$, etc. parallelen Schnitte liefern Modellschnitte von derselben Fluchtlinie und haben in ihr dieselbe Involution harmonischer Pole (§ 32 f.). Weil die Parallelstrahlen von AB, CD, EF zueinander rechtwinklig sind, so bilden die zugehörigen Fluchtpunkte die Ecken und die vorbenannten Fluchtlinien die Seiten eines Dreiecks in der Ebene $\mathbf{Q}_1$, das den Fußpunkt der Normale aus C zu ihr zum Höhenschnitt und die Länge derselben zum geometrischen Mittel der Abschnitte der Höhen hat (§ 10, 15).

7) Wenn man aus drei geraden Linien der Ebene $\mathbf{R}$ an die Kugel die Paare der Tangentialebenen legt, so bilden dieselben ein ihr umgeschriebenes Sechsflach mit acht dreiseitigen Ecken, für das der Pol von $\mathbf{R}$ in der Kugel der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden zwischen den Berührungspunkten der Paare und zugleich derjenigen zwischen den Eckenpaaren ist. Man sieht leicht, daß dasselbe sich in ein der entsprechenden Modellfläche umgeschriebenes Parallelepiped verwandelt, und daß diese Geraden Durchmesser werden und ihr Schnittpunkt zum Mittelpunkt der Modellfläche wird (§ 33, 3). Wenn das von den Geraden in der Ebene $\mathbf{R}$ gebildete Dreieck den Fußpunkt des Perpendikels aus C auf $\mathbf{R}$ zum Höhenschnitt und seine Länge zum geometrischen Mittel der Höhenabschnitte hat, so wird das der Modellfläche umschriebene Parallelepiped rechtwinklig; etc. Man erläutere die harmonischen Gruppen von Punkten, Strahlen und Ebenen in diesem wie im vorigen Falle.

8) Wenn die Kugel die Gegenebene $\mathbf{R}$ berührt oder schneidet, so ist die zentrisch kollineare Fläche in einer Richtung oder in den Richtungen aller Strahlen eines Kreiskegels unendlich ausgedehnt; ihre ebenen Querschnitte sind Ellipsen und Parabeln bez. Ellipsen und Hyperbeln, speziell die parallel den Tangentialebenen jenes Kegels Parabeln; sie heißt bez. das zweifache oder elliptische Hyperboloid und das elliptische Paraboloid.

9) Dieselben Flächen wie in 6) und 8) lassen sich auch als zentrisch kollineare Modelle des zweifachen gleichseitigen Rotationshyperboloids (siehe § (36[a])) erzeugen, wenn dasselbe die Gegenebene $\mathbf{R}$ bez. nicht trifft, berührt oder reell schneidet.

Das einfache gleichseitige Rotationshyperboloid (siehe § (36[c]))

mit seinen zwei Scharen von geraden Linien liefert durch zentrische Kollineation nur wieder Flächen mit zwei Schaaren reeller gerader Linien und mit Kegelschnitten als Querschnitten. Und da dasselbe von der Gegenebene **R** nur entweder in einem Kegelschnitt geschnitten oder berührt d. h. nach § (36^c) in zwei geraden Linien geschnitten werden kann, so liefert die zentrische Kollineation der Fläche im allgemeinen, also im ersten Fall, einfache oder hyperbolische Hyperboloide d. h. geradlinige Flächen mit elliptischen und hyperbolischen, in den Stellungen der Tangentialebenen eines Kegels vom zweiten Grade speziell mit parabolischen Querschnitten; und im zweiten Falle hyperbolische Paraboloide, Flächen, welche nur hyperbolische und einer gewissen Richtung parallel parabolische Querschnitte liefern.

So entspringen aus den beiden elementaren Formen, die wir kennen, die fünf Arten der Flächen zweiten Grades.

10) Nach § (36^e) und nach Beisp. 5) desselben kann man sagen: Zwei Flächen zweiten Grades, welche einen ebenen Querschnitt gemein haben, durchdringen sich noch in einem zweiten ebenen Querschnitt. Und zwei zentrisch kollineare Flächen zweiten Grades durchdringen einander außer der Kollineationsebene noch in einem anderen ebenen Querschnitt.

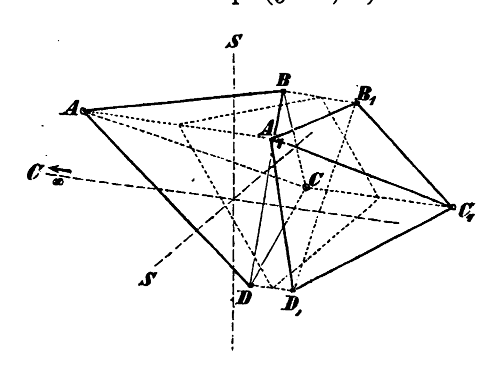
42. Ein theoretisch wichtiger Spezialfall der zentrisch kollinearen räumlichen Systeme, aber ohne den Charakter der Bildlichkeit oder der Fähigkeit, Täuschung hervorzurufen, ist der der involutorischen oder harmonischen Kollineation mit dem charakteristischen Doppelverhältnis $\Delta = -1$. Dann sind die Gegenebenen $\mathbf{Q}_1$, **R** in der Mitte zwischen Zentrum und Kollineationsebene vereinigt und — wie die Konstruktion und das Doppelverhältnis gleichmäßig ergeben — die Punkte, Geraden und Ebenen beider Systeme entsprechen einander vertauschungsfähig. Die große Bedeutung dieses Falles für das Studium der Raumformen tritt bei den weiteren Spezialisierungen sofort hervor.

Ist das Zentrum einer räumlichen Kollineation unendlich fern, so sind es die Gegenebenen auch, da die Kollineationsstrahlen unendlich ferner Punkte ganz im Unendlichen liegen; d. h. parallelen Strahlen und Ebenen des einen Systems entsprechen parallele Strahlen und Ebenen des andern; entsprechende Gerade sind ähnlich geteilt, weil $\Delta = SA_1 : SA$ ist. (Vergl. § 22, a.)

Man nennt solche Systeme (Figur auf S. 287) affin in zentrischer oder perspektivischer Lage. Ist insbesondere $\Delta = -1$,

somit $SA_1 = -SA$, also die perspektivische Affinität involutorisch, so erhält man die Symmetrie der räumlichen Systeme in Bezug auf eine Ebene, die Kollineationsebene; man wird bei derselben eine schräge und eine orthogonale Symmetrie unterscheiden können. (Vergl. § 22, b.)

Ist die Kollineationsebene einer zentrischen Kollineation räumlicher Systeme unendlich fern, so sind es auch die Gegenebenen; man erhält $\varDelta = CA : CA_1$ (§ 22, c). Entsprechende Gerade und entsprechende Ebenen sind einander parallel und die in denselben gelegenen Systeme ähnlich und in ähnlicher Lage nach dem Verjüngungsverhältnis $\varDelta$. Solche räumliche Systeme nennt man ähnlich in perspektivischer oder ähnlicher Lage. Die Beziehung der Ebene V in § 39, 5 findet nun auf allen Ebenen statt, die das Zentrum enthalten. Für $\varDelta = -1$ unter der Voraussetzung der unendlich fernen Kollineationsebene ist Ähnlichkeit mit Involution verbunden; man erhält $CA = -CA_1$, die Reihen entsprechender Punkte in den Kollineationsstrahlen sind symmetrisch gleich, die entsprechenden Systeme in entsprechenden Ebenen symmetrisch kongruent. Es ist die Symmetrie der räumlichen Systeme in Bezug auf ein Zentrum.



Endlich entspricht der gleichzeitigen unendlich fernen Lage des Zentrums und der Kollineationsebene die einfache Kongruenz der räumlichen Systeme bei paralleler Lage.

Es ergibt sich also, daß die Involution die Quelle aller Symmetrieverhältnisse und der Metrik so im Raume wie in der Ebene ist, oder daß die Involutionsgestalten die allgemeinen Formen der symmetrischen Gestalten jeder Art sind. Sowie ferner im ebenen System die Involution sich eng verbunden gezeigt hat mit der Theorie der Kurven zweiter Ordnung und Klasse, als die Quelle der mannigfaltigen Symmetrien derselben, so zeigt sie sich im Raume als gleich wichtig

für die Theorie der Flächen zweiter Ordnung und Klasse, als Quelle aller ihrer Symmetrien. (Vergl. die Entwicklung im II. Teil d. W.)

Endlich sind alle die üblichen Darstellungsmethoden räumlicher Formen durch räumliche Formen, d. i. die Modellierungsmethoden, als Fälle der Lehre von den zentrisch kollinearen räumlichen Systemen hervorgetreten und damit der darstellenden Geometrie organisch angeschlossen; von ihnen dient die allgemeine des § 41 ganz besonders künstlerischen Zwecken, die besondere der Ähnlichkeit hat vorzugsweise technische Verwendung im engeren Sinne.

B. 1) Das gleichseitige zweifache Rotationshyperboloid und seine Scheitelberührungskugel (§ ($36^{b,c}$)) sind in involutorischer Zentralkollineation miteinander für jeden Scheitel des ersten und seine Tangentialebene im andern Scheitel als Zentrum und Ebene der Kollineation.

2) Bei der Projektion der Kugel und ihres Modells nach der Anordnung von S. 282 wird man die zur Kollineationsebene **S** normale Diametralebene der Kugel, die durch das Zentrum C geht, als Ebene xz oder ihr parallel setzen, weil sie offenbar auch für das Modell eine Ebene orthogonaler Symmetrie bleibt. Die zur Ebene **S** parallelen Kreisschnitte der Modellfläche erscheinen dann in xz als vertikale Gerade, parallele Sehnen ihres Umrißkegelschnittes, und die Modellfläche wird am einfachsten durch diese dargestellt; denn auch die zu den Endpunkten der Sehnen gehörenden Tangenten erhält man sofort.

3) Der besondere Fall der Lage von C im Unendlichen der Kollineationsebene ($\varDelta = +1$) gibt eine durch die Gleichheit der entsprechenden Volumina charakterisierte Affinität der Räume. Eine solche ist durch die Kollineationsebene **S** und ein Paar entsprechender Punkte A, A_1 in einer zu derselben parallelen Geraden bestimmt; man erhält B_1 aus B in der Parallelen zu AA_1 durch B mittelst der von A_1 nach dem Durchschnitt von AB mit der Ebene **S** gezogenen Geraden. Sind A^*, B^*, ... die in Bezug auf **S** orthogonal-symmetrischen der A, B, ..., so ist die Kollinearfigur A_1, B_1, ... schiefsymmetrisch zur Figur der A^*, B^*, ... in Bezug auf dieselbe Ebene; und die Richtung der Affinität und die der schiefen Symmetrie liegen in einerlei Normalstellung zur Ebene **S**. (Vergl. S. 113 f. die Flächengleichheit.)

4) Man konstruiert nach dem Vorigen das Ellipsoid von einer gegebenen Stellung der Kreisschnittebenen durch zwei Punkte A_1, B_1, deren mit ihnen in parallelen Geraden AA_1, BB_1 gelegene entsprechende A, B auf seiner Originalkugel man kennt, wenn verlangt ist, daß sein Volumen dem dieser Kugel gleich ist. Die Ebene **S** geht mit der gegebenen Stellung durch den Schnittpunkt von AB mit A_1B_1.

5) Wie sind symmetrische Raumformen in der zentrisch kollinearen Modellierung zu behandeln?

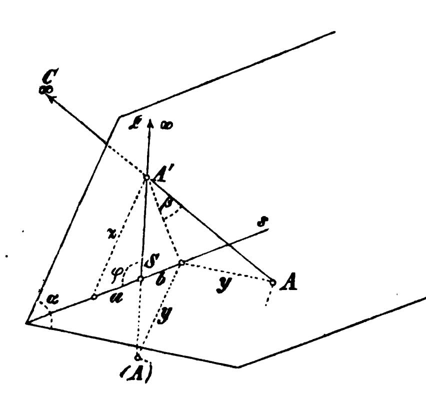
Die allgemeine Antwort lautet: Mit Berücksichtigung bez. Benutzung ihrer Involutionseigenschaften. Wir erläutern das an den Fällen a) einer planaren, b) einer zentrischen Symmetrie; c) bei zwei planaren Symmetrien, speziell orthogonalen; d) bei drei orthogonalen planaren, also zugleich einer zentrischen Symmetrie.

Wir denken dazu die Symmetrieebenen durch Σ und die Symmetrierichtungen durch $\mathfrak{S}$ bezeichnet und haben also im Falle a) ein Σ und ein $\mathfrak{S}$; bei b) unendlich ferne Ebene $\mathbf{Q}$ als Σ und ein endliches Zentrum $\mathfrak{S}$; bei c) zwei Symmetrieebenen $\Sigma^{(1)}$ und $\Sigma^{(2)}$ und zwei Richtungen bez. $\mathfrak{S}^{(1)}$ und $\mathfrak{S}^{(2)}$ in den Stellungen von $\Sigma^{(2)}$ bez. $\Sigma^{(1)}$; bei d) drei zueinander orthogonale Symmetrieebenen $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, $\Sigma^{(3)}$ mit den gemeinsamen Richtungen der beiden andern jeweilen als Zentren $\mathfrak{S}^{(1)}$, $\mathfrak{S}^{(2)}$, $\mathfrak{S}^{(3)}$; zugleich ist der Schnittpunkt der Symmetrieebenen ein Symmetriezentrum $\mathfrak{S}$ mit der unendlich fernen Ebene $\mathbf{Q}$ als Kollineationsebene Σ.

Von dem zentrisch kollinearen Modell ist zu sagen, daß es im Falle a) mit sich selbst involutorischkollinear (§ 42) sein muß für Σ_1 als Kollineationsebene und den zur Richtung $\mathfrak{S}$ entsprechenden Punkt von $\mathbf{Q}_1$ als Zentrum, sodaß jedes seiner Elemente ein zweites ihm entsprechendes bestimmt. Im Falle b) muß es involutorisch sein mit $\mathbf{Q}_1$ als Kollineationsebene und dem Zentrum $\mathfrak{S}_1$ unter gleicher Folge. Im Falle d) ist das Modell dreifach involutorisch für die Ebenen $\Sigma_1^{(1)}$, $\Sigma_1^{(2)}$, $\Sigma_1^{(3)}$ und bez. den Punkt von $\mathbf{Q}_1$ in der Schnittlinie der beiden andern als Zentrum; zugleich infolgedessen involutorisch für das Zentrum $\mathfrak{S}_1$ und die Ebene $\mathbf{Q}_1$, sodaß aus einem Oktanten des Modells die sieben andern ableitbar sind. Man wende dies auf die Modellierung der Kugel in 2) an.

43. Die Methoden der Abbildung auf einer Ebene, welche die darstellende Geometrie verwendet, sind endlich die äußersten Spezialfälle der Konstruktion zentrisch kollinearer räumlicher Systeme. Fallen die Kollineationsebene $\mathbf{S}$ und die Gegenebene $\mathbf{Q}_1$, welche die entsprechenden der unendlich fernen Punkte des Originalraums enthält, in eine Ebene zusammen (§ 39, 2), so geht die andere Gegenebene $\mathbf{R}$ durch das Zentrum oder fällt in die Ebene $\mathbf{V}$. Man erhält die Bestimmungsweise der Zentralprojektion für die Gerade und die Ebene wieder, von welcher die Entwicklung ausging, wenn man die Elemente des Raumes als die Originale, die entsprechenden der Ebene $\mathbf{S}\mathbf{Q}_1$ als ihre Bilder ansieht. Die Kollineationsebene wird zur Bildebene, die Gegenebene $\mathbf{R}$ zur Verschwindungsebene.

Eine Gerade durch das Zentrum erscheint als ein Punkt, eine Ebene durch dasselbe als eine Gerade, etc. — die Zentralprojektion eines Objekts ist anzusehen als das in der Richtung der Kollineationsstrahlen auf die Tiefe Null reduzierte zentrisch kollineare Abbild desselben. Zur Bestimmung einer Zentralprojektion gehört somit die Angabe der Bildebene, der Verschwindungsebene — die Distanz bestimmt diese aus jener — und des Zentrums in dieser — der Hauptpunkt C_1 leistet dies vollends.



Wenn beim Zusammenfallen der Ebenen **S** und $\mathbf{Q}_1$ die Gegenebene **R** und das Zentrum C unendlich fern liegen, so erhält man als Spezialfall der zentrischen Kollineation räumlicher Systeme eine ebene Parallel-Projektion des Originalraums, als das in der Richtung der Kollineationsstrahlen auf die Tiefe Null reduzierte — unendlich dünne — perspektivisch affine Abbild desselben. Für die Bilder seiner ebenen Systeme gelten die Gesetze § 22, a.

Wenn die Originalebene die Bildebene in s (vorstehende Figur) unter dem Winkel α schneidet und A' das Bild eines Punktes A, (A) aber die Umlegung desselben mit der Originalebene in die Bildebene ist, so hat man für die Charakteristik der Affinität in derselben, mit den Bezeichnungen y und z für die senkrechten Abstände von A und A' zur Achse s und x für das zwischen ihnen enthaltene Stück derselben, $\Delta = \frac{SA'}{S(A)} = \frac{z}{y}$ und $\tan\varphi = \frac{y+z}{x}$. Also insbesondere für $x = 0$ oder $\mathfrak{C}$ in der Normalebene zu s $\varphi = 90^0$; dann ist auch $\Delta = \frac{z}{y} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ oder entwickelt $\Delta = \sin\alpha\cot\beta + \cos\alpha$; also für $\beta = 90^0$ oder die projizierenden Strahlen rechtwinklig zur Bildebene, kurz $\Delta = \cos\alpha$, (auch direkt nach § 19, 5, wegen $\beta = 90^0$, $\gamma = 90^0 - \alpha$) und somit für alle Projektionsebenen dieselbe Einfachheit der Beziehung

$$F : F' : F'' : F''' = 1 : \cos\alpha_1 : \cos\alpha_2 : \cos\alpha_3 .$$

Dies ist die Quelle für die Vorzüge der gewöhnlichen orthogonalen Parallelprojektion.

Bei jeder gewöhnlichen Parallelprojektion bestimmt ein Punkt der Bildebene die durch ihn gehende projizierende Linie und jede Gerade der Bildebene ihre projizierende Ebene. Zu einer Geraden g liefert der Schnittpunkt mit der Bildebene **S** ihren Durchstoßpunkt S, durch welchen auch ihr Bild gehen muß, und die projizierende Linie eines anderen Punktes von g bestimmt dasselbe. Die zur Geraden g parallele projizierende Linie liegt, als Verbindungslinie von zwei unendlich fernen Punkten C und Q, ganz in unendlicher Ferne und trifft daher auch die Bildebene in einem unendlich fernen Punkte Q', d. i. die Fluchtpunkte aller in derselben projizierenden Ebene und ihren parallelen möglichen Geraden fallen ununterscheidbar in den unendlich fernen Punkt ihrer Schnittlinie mit der Bildebene zusammen. Soll umgekehrt von dem Bilde einer Geraden zu ihrem Original übergegangen werden, so erweist sich die Angabe des Durchstoßpunktes S und der Richtung der projizierenden Linien nur als hinreichend zur Bestimmung der projizierenden Ebene, in welcher es liegen, und des Strahlenbüschels in derselben, dem es angehören muß; aber die Richtung des Strahls, welcher als Original zu betrachten ist, bleibt unbestimmbar, weil die Gerade $Q'C$ als ganz im Unendlichen liegend oder als die Stellung der projizierenden Ebene die Richtungen aller in ihr liegenden Geraden enthält, daher keine Einzelne unter ihnen bestimmt. Infolgedessen ist auch kein Punkt der Geraden g durch sein Bild im Bilde der Geraden g' bestimmt, sondern nur der entsprechende projizierende Strahl in der projizierenden Ebene von g.

Das ganz analoge Ergebnis erhält man bei der Frage nach der Bestimmung der Ebene in diesem Falle. In allem also: Durch eine Parallelprojektion in der Ebene ist eine Gerade, ein Punkt und eine Ebene infolge der Ununterscheidbarkeit der Fluchtelemente von Geraden und Ebenen nicht bestimmbar, solange man die unendlich ferne Ebene als die zweite Fixebene benutzt. Wir haben in (§ 6*) gesehen, wie leicht diese Schwierigkeit zu heben und die Bestimmung mittelst einer Parallelprojektion zu

erlangen ist, wenn man von der geraden Linie als Grundelement ausgeht.

Ohne jene Einführung einer zweiten Fixebene im Endlichen wird der Zweck der Bestimmung der räumlichen Formen mit Hilfe der ebenen Parallelprojektionen durch die Kombination von zwei Parallelprojektionen mit verschiedenen Richtungen der projizierenden Strahlen erreicht. Es ist der Grundgedanke von Monges „Géometrie descriptive“, hierzu zwei orthogonale Parallelprojektionen auf zwei zueinander rechtwinkligen Projektionsebenen zu verbinden, wie dies aus den Elementen bekannt ist. Eine orthogonale und eine schräge Parallelprojektion auf dieselbe Projektionsebene reichen zur Bestimmung auch aus, wenn die Richtung der letzteren bekannt ist; dies kommt vor in der Form der Schlagschatten, und liefert für unter 45° einfallendes Licht bequeme Bestimmungen, etc. In beiden Fällen findet die nämliche Überbestimmung statt, sodaß je eine Relation zwischen den erhaltenen Projektionen eines Punktes besteht; nämlich bei der Kombination von zwei Orthogonalprojektionen die Lage in demselben Perpendikel zur Projektionsachse (siehe § 46) und bei zwei Parallelprojektionen auf dieselbe Ebene die Lage in geraden Linien von einerlei Richtung.

B. 1) In Bezug auf das erste Kriterium des § 41 können alle ebenen zentralprojektivischen Abbildungen als bildlich bezeichnet werden, und man hat nur das zweite des Sehkegels zu beachten, um gute perspektivische Bilder zu erhalten. Man kann im Bilde die Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit unterscheiden, indem man die Bildebene als vielfach und ihre Lagen als in derselben Ordnung vom Zentrum als einander folgend und einander verdeckend ansieht, wie die Flächen des abgebildeten Objekts: Das zentralprojektivische Bild als ein unendlich dünnes Relief.

2) In der Parallelprojektion muß die Seite der Bildebene bezeichnet werden, auf welcher in unendlicher Ferne das Zentrum gedacht werden soll, um die gegenseitige Verdeckung der Flächen des Originals im Bilde zu bestimmen (vergl. § 55). Dann gelten die vorigen Bemerkungen.

3) Der von allen Sehstrahlen normal geschnittenen Kugelfläche der Netzhaut entspricht die ebene Bildfläche der orthogonalen Parallelprojektion; diese — die orthogonale — hat unter den Parallelprojektionen am meisten den Charakter der Bildlichkeit. Die Entwicklung darf sich im allgemeinen auf sie beschränken, da die

allgemeinen Charaktere aller Parallelprojektionen in der Lehre von der Affinität doch gegeben sind.

Für den Zeichner bietet die Anwendung schiefer Parallelprojektionen besondere Vorteile (§ 61), die Wahrung der Bildlichkeit des Dargestellten steckt ihr jedoch sehr enge, obwohl nicht im allgemeinen, sondern nur im speziellen Fall bestimmbare Grenzen.

4) Wenn die Punkte des Raumes durch gerade Strahlen aus zwei festen Punkten auf eine Ebene projiziert werden, die keinen derselben enthält, so liegen die beiden Bilder desselben Punktes immer in einer Geraden mit dem Durchstoßpunkt der Verbindungslinie der Zentra; die Projektionen eines Dreiecks sind perspektivisch für diesen Punkt als Zentrum und die Spur seiner Ebene als Achse; etc. Man kann die Ebenen des Raumes mittelst ihrer Schnittlinien in zwei festen Ebenen und diese mittelst ihrer Verbindungsebenen mit einem in keiner von beiden gelegenen festen Punkte bestimmen, speziell an einem unendlich fernen Punkte; immer bilden die beiden bestimmenden Ebenen derselben Ebene ein Büschel mit der von ihm nach ihrer Schnittlinie gehenden Ebene. (Vergl. oben den Schluß des Überblicks am Ende des Abschnittes A.)

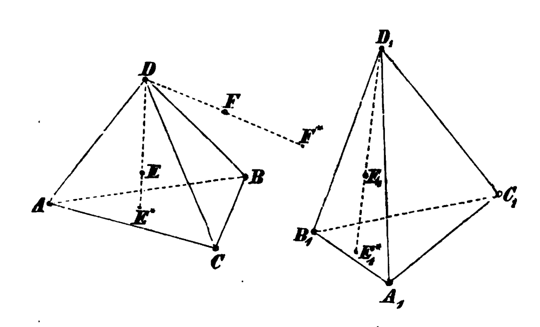
5) Man entwickle die Bestimmung aus dem Aufriß und dem Schlagschatten auf die Aufrißebene für Punkte, gerade Linien etc., wenn das Licht unter 45^0 zur Aufrißebene so einfällt, daß die Aufrisse der Lichtstrahlen vertikal sind. (Vergl. § 47, 10 und 16 und die Theorie der Normalelemente zu den Halbierungsebenen $\mathbf{H}_{x'}$, etc.)

44. Die zentrisch kollinearen räumlichen Systeme sind **projektivisch kollineare räumliche Systeme** in besonderer, nämlich **perspektivischer Lage**, wenn man als projektivische **kollineare Systeme** allgemein diejenigen definiert, welche dem Gesetze genügen, daß **jedem Punkte ein Punkt und jeder Geraden eine Gerade** im andern System entspricht. Den geradlinigen Reihen, den ebenen Strahlenbüscheln und den Ebenenbüscheln des einen Systems entsprechen projektivische Reihen, Strahlenbüschel und Ebenenbüschel des andern. (Vergl. § 38.)

Eine solche Beziehung zweier Räume ist vollkommen bestimmt durch fünf Punkte A, B, C, D, E des einen, von denen keine vier in einer Ebene liegen, und die fünf entsprechenden Punkte A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 des andern (Figur auf S. 294). Denn ist F ein sechster Punkt des ersten Systems, so bestimmt derselbe mit drei Kanten des Tetraeders $ABCD$, welche nicht in einer Ecke zusammenstoßen, Ebenen, die nur ihn gemein haben und deren entsprechende im andern System somit den

entsprechenden Punkt F_1 bestimmen. Diese aber konstruiert man nach der Bemerkung, daß die beiden Ebenenbüschel $(AB\,.\,CDEF)$ und $(A_1B_1\,.\,C_1D_1E_1F_1)$, ebenso $(BC\,.\,ADEF)$, $(B_1C_1\,.\,A_1D_1E_1F_1)$ und $(CA\,.\,BDEF)$, $(C_1A_1\,.\,B_1D_1E_1F_1)$ zueinander projektivisch sind (vergl. § 23), mit Hilfe von dreimaliger Anwendung der einfachen Mittel der §§ 17 und 18. In derselben Weise konstruiert man durch Wiederholung oder direkt entsprechende Ebenen und entsprechende Gerade beider Systeme. Den unendlich fernen Punkten Q des einen Systems entsprechen die Punkte Q_1 der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ des andern und den unendlich fernen Punkten R_1 in diesem die Punkte R der Gegenebene $\mathbf{R}$ in jenem System, welche beide man somit ebenfalls leicht ermittelt.

Ist dann im System des Bildraums $\mathbf{E}_1$ eine zur Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ parallele Ebene, so wird die entsprechende Ebene $\mathbf{E}$ des Originalraums zu $\mathbf{R}$ parallel und die in beiden Ebenen enthaltenen Systeme werden zueinander affin sein; den Richtungen der einen entsprechen also Richtungen der andern, ohne daß jedoch allgemein die Richtungsunterschiede hier den entsprechenden Richtungsunterschieden dort gleich sein werden. Dies letztere ist aber der spezielle Charakter, welchen entsprechende ebene Systeme von der Stellung der Gegenebene in zentrisch kollinearen Räumen besitzen, weil ihre unendlich ferne Gerade zugleich ihre Kollineationsachse ist, d. h. Punkt für Punkt sich selbst entspricht. Damit ist erwiesen, daß kollineare räumliche Systeme im allgemeinen nicht in zentrische oder perspektivische Lage übergeführt werden können (vergl. § 23), daß vielmehr diese Möglichkeit von besonderen Eigenschaften derselben abhängt. Die Darstellungsmethoden haben es stets nur mit zentrisch kollinearen Systemen zu tun.



Reziproken räumlichen Systemen (vergl. den Überblick S. 131 f.) werden wir später begegnen. Sie sind im all-

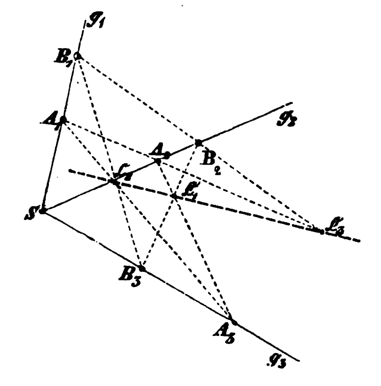
gemeinen Falle auch durch fünf Punkte der einen und die fünf entsprechenden Ebenen des andern Raumes bestimmt, wenn keine vier von jenen in einer Ebene liegen und also keine vier von diesen durch einen Punkt gehen. Auch hier erfordert die Konstruktion des entsprechenden zu einem gegebenen Element die dreimalige Wiederholung der Elementarkonstruktion des vierten Elements in projektivischen Gebilden erster Stufe.

B. 1) Wenn zwei kollineare räumliche Systeme ein ebenes System entsprechend gemein haben, so haben sie auch ein Strahlenbündel entsprechend gemein und umgekehrt. Man erläutere insbesondere den Zusammenhang dieses Satzes mit dem in § 38, 2.

2) Die Bestimmung der zentrisch kollinearen räumlichen Systeme durch Zentrum und Ebene der Kollineation und eine der Gegenebenen ist eine spezielle Form der Bestimmung durch fünf Paare entsprechender Punkte. Das Zentrum und drei Punkte der Kollineationsebene, welche sie bestimmen, repräsentieren vier Paare; die Gegenebene ist durch einen weiteren Punkt bestimmt, dessen entsprechender die Richtung des durch ihn gehenden Strahls aus dem Zentrum ist. Es ist analog, wenn die Gegenebene durch ein Paar von entsprechenden Punkten A, A_1 ersetzt wird.

3) Wenn zwei Systeme mit einem und demselben dritten System kollinear sind, so sind sie es auch untereinander; wenn in einer Reihe von Systemen jedes mit dem folgenden kollinear ist, so ist auch das erste mit dem letzten und jedes mit jedem kollinear. Ebenso für ähnliche und affine Systeme.

45. Von wichtigen Folgen ist der Satz: **Wenn von drei räumlichen Systemen je zwei mit einander zentrisch kollinear sind, so liegen die drei Kollineationszentra in einer geraden Linie.** Denn die Systeme, die wir als erstes, zweites, drittes System bezeichnen wollen, haben paarweise miteinander eine Kollineationsebene, etwa das erste und zweite die Ebene $\mathbf{s}_3$, das zweite und dritte die Ebene $\mathbf{s}_1$, das dritte und erste die Ebene $\mathbf{s}_2$, und diese drei Ebenen haben mindestens



einen Punkt S miteinander gemein. Nun entspricht aber (die vorstehende Figur) jeder durch S gehenden Geraden g_1 des

ersten Systems mit zwei Punkten A_1, B_1 eine auch durch S gehende Gerade g_2 des zweiten mit den entsprechenden Punkten A_2, B_2 und eine durch S gehende Gerade g_3 des dritten mit den Punkten A_3, B_3, und es schneiden sich die Geraden $A_1 A_2, B_1 B_2$ im Kollineationszentrum $\mathfrak{C}_3$, $A_2 A_3, B_2 B_3$ im Zentrum $\mathfrak{C}_1$ und $A_3 A_1$, $B_3 B_1$ in $\mathfrak{C}_2$. Die Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ haben also ihre Ecken paarweise auf Strahlen aus einem Punkt S, und ihre entsprechenden Seitenpaare schneiden sich daher in drei Punkten einer Geraden (§ 19, 11.) Aber man sieht weiter, daß die drei Kollineationsebenen S_1, S_2, S_3 alle Punkte gemein haben oder sich decken müssen, wenn $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ drei verschiedene Punkte sind. Denn man findet A_3 aus A_1, A_2 als Schnitt der Geraden $A_1 \mathfrak{C}_2, A_2 \mathfrak{C}_1$; also daß für einen in $\mathbf{S}_3$ gelegenen Punkt P oder P_1, P_2 als identisch auch P_3 mit ihm vereinigt ist oder derselbe Punkt auch zu $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ gehört.

Die duale Übersetzung des Beweises (S. 130f., 263f.) liefert den dualen Satz: Wenn von drei räumlichen Systemen je zwei miteinander für ein und dasselbe Zentrum kollinear sind, so gehen ihre drei Kollineationsebenen durch eine Gerade.

Damit ist zugleich der speziellere Satz bewiesen: Wenn drei ebene Systeme paarweise zentrisch kollinear sind und ihre Kollineationsachsen gemein haben, so liegen ihre Kollineationszentra in einer Geraden, und dual. (Vergl. § 23, 6.) Und der noch speziellere: Sind zwei ebene Systeme einem dritten ebenen System ähnlich und zu ihm in perspektivischer Lage, so sind sie beides auch untereinander und die drei Ähnlichkeitszentra liegen in einer Geraden. Denn dann haben die Geraden $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ als einander parallel einen unendlich fernen Punkt gemein.

B. 1) Wenn ein zentrisch kollineares Modell von einem andern als dem ihm zugehörigen Zentrum aus betrachtet wird, so kann unter Festhaltung der in der Kollineationsebene gelegenen Elemente das ihm entsprechende System des Originalraums konstruiert werden, und es muß dem ursprünglichen Originalsystem zentrisch kollinear sein für ein Zentrum in der Verbindungslinie der beiden benutzten. Bei einer Verlegung beider Gegenebenen (natürlich parallel sich selbst) ändert sich dies nicht; nur würde eine parallelepipedische Figur des ersten Originals in eine solche mit nicht mehr parallelen Flächenpaaren des zweiten übergehen. Darstellungen krummflächig

begrenzter, organischer, speziell beweglicher Formen lassen darin eine ziemlich große Freiheit.

Man spezialisiere den Satz für die perspektivischen Bilder, etc.

2) Je zwei Kreise derselben Ebene (oder in parallelen Ebenen) sind **ähnlich** und in **perspektivischer** Lage für ihren innern Ähnlichkeitspunkt J und den äußern Ähnlichkeitspunkt A. Sind die Ähnlichkeitspunkte von drei Kreisen K_1, K_2, K_3 in parallelen Ebenen oder in derselben Ebene A_{12}, J_{12} für K_1 und K_2, A_{23}, J_{23} für K_2 und K_3 und A_{31}, J_{31} für K_1 und K_1, so liegen dieselben viermal zu dreien in einer Geraden — nämlich $A_{12}A_{23}A_{31}$, $J_{12}A_{23}A_{31}$, $A_{12}J_{23}A_{31}$, $A_{12}A_{23}J_{31}$ — und bilden also ein vollständiges Vierseit. Vergl, die ganz andere Ableitung in § (7).

Jede der Ähnlichkeitsachsen bestimmt ein zweifach unendliches System von Kreisen aus den gegebenen — jeden Kreis aus seinem Zentrum und dem Ähnlichkeitspunkt mit einem der gegebenen Kreise.

Je zwei Kreise derselben Ebene sind auch **zentrisch kollinear** für dieselben beiden Punkte A und J als Zentra und für die Gerade s, welche man Chordale, Potenzlinie oder Radikalachse derselben nennt, als Kollineationsachse (§ 26, 5). Die Kollineationsachsen oder Potenzlinien s_{12}, s_{23}, s_{31} von drei Kreisen derselben Ebene gehen durch einen Punkt.

3) Zwei **Kugeln** sind einander ähnlich in perspektivischer Lage für ihren innern und ihren äußern Ähnlichkeitspunkt J und A und sie sind zueinander zentrisch kollinear für dieselben Punkte als Zentra und die Ebene **S**, welche man Chordal- oder Radikal- oder Potenz-Ebene nennt, als Kollineationsebene. Von den sechs Ähnlichkeitspunkten von drei Kugeln liegen viermal drei in einer Geraden in der Ebene ihrer Zentra und ihre drei Kollineationsebenen schneiden sich in einer zur Ebene der Zentra normalen Geraden.

4) Vier Kugeln 1, 2, 3, 4 bilden auf acht Arten sechs Paare von ähnlichen Figuren in perspektivischer Lage; von den Ähnlichkeitspunkten liegen achtmal je sechs in einer Ebene, die kein Tripel der Zentra enthält; während sie nach dem Vorigen zu drei in viermal vier in den Ebenen durch drei Zentra enthaltenen Ähnlichkeitsachsen liegen. Die sechs Kollineationsebenen $\mathbf{S}_{ik}$ schneiden sich in einem Punkt, dem Potenz- oder Chordalpunkt der Kugeln. Von den vorher erwähnten acht Ähnlichkeitsebenen enthält eine nur äußere Ähnlichkeitspunkte der Kugeln in Paaren; drei enthalten je vier innere und zwei äußere und die vier letzten je drei innere und drei äußere. Jede der Ähnlichkeitsebenen bestimmt ein dreifach unendliches System von Kugeln aus den gegebenen — jede Kugel aus ihrem Zentrum und dem Ähnlichkeitspunkt mit einer der gegebenen Kugeln.

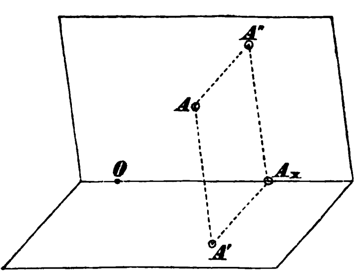
5) Man erörtere die Eigenschaften der zentrisch kollinearen Modelle solcher Kugelsysteme.

D. Die Grundgesetze der orthogonalen Parallelprojektion, ihre Transformationen und die Achsonometrie.

46. Von der Bestimmung der Raumelemente durch eine Orthogonalprojektion war schon in § 6* die Rede und wir werden mit Beispielen darauf zurückkommen. (Vergl. § 54*.) Sie hat ein ausgedehntes Anwendungsgebiet bei der kartographischen Darstellung kleiner Teile der Erdoberfläche (topographische oder Terrainfläche) in großem Maßstabe, wo eine gemeinsame Horizontalebene sich als natürliche Projektionsebene darbietet und die projizierenden Linien die Schwerlinien ihrer Punkte sind. (Vergl. Bd. II, § 28.)

Die Verwendungsform, von der wir zunächst und hauptsächlich handeln wollen, ist die der Kombination der Orthogonalprojektionen auf zwei zueinander rechtwinklige Projektionsebenen; bei der also die projizierenden Linien der einen in ihrer wahren Länge in der andern erscheinen und als Perpendikel zur Durchschnittslinie beider.

Durch zwei solche, sagen wir konjugierte orthogonale Projektionen können die Raumformen im allgemeinen bestimmt werden; unter Festsetzung eines Anfangspunktes O in der Durchschnittslinie x der Projektionsebenen (nebenstehende Figur) können sie nach gegebenen Maßen eingezeichnet werden, nämlich jeder Punkt A aus der Angabe seiner Abstände AA', AA'' von jenen beiden Ebenen und aus der des Abstandes von O bis zu der durch A gelegten Normalebene $AA'A_xA''$ zur Achse x. Indem wir den Anfangspunkt O als Schnittpunkt mit einer dritten zu den beiden ersten normalen Ebene bestimmt denken, erhalten wir (Figur S. 299) drei Grund- oder



Projektionsebenen XOY, XOZ, YOZ, drei zueinander normale Schnittlinien derselben oder Projektionsachsen OZ, OY, OX zur Angabe der Richtungen der projizierenden Linien, welche zu den Projektionsebenen XOY, XOZ, YOZ bez. gehören. Es entstehen drei orthogonale Parallelprojektionen jeder Raumfigur, nämlich auf XOY, XOZ, YOZ, die wir als erste, zweite, dritte Projektion bez. benennen und durch Beifügung von einem Strich, von zwei oder drei Strichen oben rechts am Zeichen des Originals voneinander und von diesem unterscheiden wollen.

In dieser Weise gefaßt ist die Bestimmungsweise der darstellenden Geometrie mittelst der orthogonalen Parallelprojektionen identisch mit derjenigen der Koordinatengeometrie des Raumes für rechtwinklige Parallelkoordinaten; sie hat daher auch mit ihr gewichtige Vorzüge für die Anwendungen gemein. Wir nennen die geradlinige Strecke von der ersten Projektion A' eines Punktes A bis zu ihm selbst die Koordinate z, die von der zweiten Projektion A'' zu ihm selbst die Koordinate y, und die von der dritten Projektion A''' zu ihm die Koordinate x, weil dieselben bezw. den Achsen OZ, OY, OX parallel sind. Wir unterscheiden in jeder der Achsen, vom Anfangspunkt O ausgehend, den positiven und negativen Sinn der Bewegung und nennen jede Koordinate positiv oder negativ, je nachdem sie von der entsprechenden Projektionsebene aus im positiven oder negativen Sinn der dazu normalen Achse verläuft.

Jeder Punkt ist durch Angabe seiner Koordinaten nach Größe und Sinn bestimmt, d. h. der Größe und des Sinnes der Strecken, welche auf seinen projizierenden Geraden zwischen der Projektion und ihm selbst enthalten sind.

Die projizierenden Linien x, y, z eines Punktes A bestimmen paarweise drei Ebenen, nämlich yz parallel YOZ, zx parallel ZOX, xy parallel XOY, und diese schneiden die Achsen OX, OY, OZ bez. in je einem Punkte A_x, A_y, A_z. Diese drei Ebenen um-

schließen mit den drei Projektionsebenen ein rechtwinkliges Parallelepiped, welches wir als das **projizierende Parallelepiped des Punktes** bezeichnen; seine Flächen sind in Paaren parallel und kongruent: $OA_xA'A_y$, $A_zA''AA'''$; $OA_yA'''A_z$; $A_xA'AA''$; $OA_zA''A_x$, $A_yA'''AA'$; seine Ecken sind in Paaren entgegengesetzt: O, A; A_x, A'''; A_y, A''; A_z, A'; seine Kanten zu vieren parallel und gleich: $OA_z, A_xA'', A'A, A_yA'''$ $(=z)$, $OA_y, A_zA''', A''A, A_xA'$ $(=y)$; $OA_x, A_yA', A'''A, A_zA''$ $(=x)$.

Setzt man: $OA=l$, $OA'=l'$, $OA''=l''$, $OA'''=l'''$ und $\angle(l,l')=\beta_1$, $\angle(l,l'')=\beta_2$, $\angle(l,l''')=\beta_3$, die **Neigungswinkel der Geraden** l **gegen die Projektionsebenen**, so gelten die Relationen

$$l^2=l'^2+z^2=l''^2+y^2=l'''^2+x^2=x^2+y^2+z^2;$$

$$\cos^2\beta_1=\frac{l'^2}{l^2}=\frac{x^2+y^2}{l^2},\ \cos^2\beta_2=\frac{l''^2}{l^2}=\frac{x^2+z^2}{l^2},\ \cos^2\beta_3=\frac{l'''^2}{l^2}=\frac{y^2+z^2}{l^2};$$

$$\sin^2\beta_1=\frac{z^2}{l^2}\qquad,\ \sin^2\beta_2=\frac{y^2}{l^2}\qquad,\ \sin^2\beta_3=\frac{x^2}{l^2};$$

also $\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3=2$, $\sin^2\beta_1+\sin^2\beta_2+\sin^2\beta_3=1$

oder $$\sum_{i=1}^{i=3}\cos^2\beta_i=2,\quad \sum_{i=1}^{i=3}\sin^2\beta_i=1;$$

also auch unter Ausschluß von $i=k$

$$\beta_i+\beta_k\leqq 90^0.$$

Die folgenden Beispiele sind geeignet, die im Vorigen entwickelten Anschauungen zu vervollständigen.

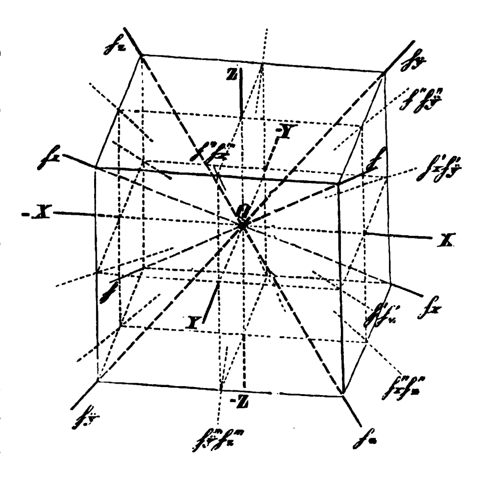
B. 1) Bezeichnen wir den Punkt von den Koordinaten $x=a$, $y=b$, $z=c$ kurz durch (a, b, c), so bedeutet $(0, 0, 0)$ den Anfangspunkt O; $(0, 0, c)$ jeden beliebigen Punkt der Achse OZ; $(0, b, 0)$ jeden Punkt der Achse OY; $(a, 0, 0)$ jeden in der Achse OX.

2) Ebenso bezeichnet $(0, b, c)$ einen beliebigen Punkt der Koordinaten- oder Projektionsebene YOZ, $(a, 0, c)$ einen solchen in XOZ, $(a, b, 0)$ einen in XOY. In welcher Weise fallen die Ecken der projizierenden Parallelepipede solcher Punkte in Paaren zusammen?

3) Alle Punkte, deren Koordinaten x und y von **gleicher Länge** sind, verteilen sich in zwei durch die Achse OZ gehende und die Winkel zwischen den anstoßenden Projektionsebenen **halbierende Ebenen**, deren eine $\mathbf{H}_z$ die Punkte $(\pm a, \pm a, c)$ mit **gleichem Sinn** der x und y, und die andere $\mathbf{H}_z'$ die $(\pm a, \mp a, c)$ mit **verschiedenem Sinn** der x und y enthält.

Ebenso liegen die Punkte $(a, \pm b, \pm b)$, $(a, \mp b, \pm b)$ in zwei Ebenen $\mathbf{H}_x$, $\mathbf{H}_{x'}$, die durch die Achse OX gehen und die Winkel der anliegenden Projektionsebenen halbieren; endlich die Punkte $(\pm a, b, \pm a)$, $(\pm a, b, \mp a)$ in zwei Ebenen $\mathbf{H}_y$, $\mathbf{H}_{y'}$. Wir nennen diese Ebenen die sechs Halbierungsebenen des Projektionssystems. (Vergl. § 10, 6.) Sie können als Diagonalebenen spezieller projizierender nämlich zwei quadratische Flächen besitzender Parallelepipede aus den Achsen angesehen werden.

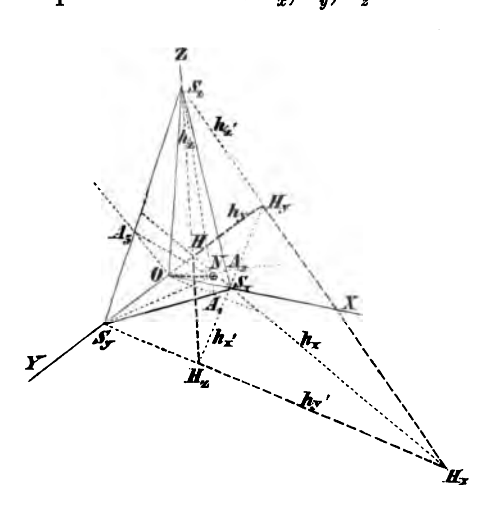
4) Die Punkte (a, a, a) von gleichen Koordinaten mit übereinstimmendem Sinn, liegen in einer Geraden $\mathfrak{h}$, welche von O ausgeht, mit den Projektionsachsen und -Ebenen gleiche Winkel macht und die gemeinschaftliche Schnittlinie der Ebenen $\mathbf{H}_z$, $\mathbf{H}_x$, $\mathbf{H}_y$ ist, weil $x = y = z = a$ die Relationen $x = y = a$, $y = z = a$, $z = x = a$ einschließt. Ebenso liegen die Punkte $(-a, a, a)$ in der Geraden $\mathfrak{h}_x$, in welcher die Ebenen $\mathbf{H}_{z'}$, $\mathbf{H}_x$, $\mathbf{H}_{y'}$ sich schneiden; die Punkte $(a, -a, a)$ in der Schnittlinie $\mathfrak{h}_y$ der Ebenen $\mathbf{H}_{z'}$, $\mathbf{H}_{x'}$, $\mathbf{H}_y$ und die Punkte $(a, a, -a)$ in $\mathfrak{h}_z$ auf den Ebenen $\mathbf{H}_z$, $\mathbf{H}_{x'}$, $\mathbf{H}_{y'}$. Die sechs Halbierungsebenen schneiden sich außer paarweise in den Projektionsachsen viermal zu dreien in vier Geraden aus O, welche mit den Projektionsachsen und -Ebenen gleiche Winkel einschließen, daher als die vier Halbierungsachsen des Systems bezeichnet werden dürfen. Sie können als Diagonalen projizierender Würfel angesehen und daher als die vier Würfelpunktlinien des Projektionssystems bezeichnet werden; in der vorstehenden Figur sind acht solche zu einem Würfel vereinigt, die Ebenen $\mathbf{H}_x$, $\mathbf{H}_{x'}$; $\mathbf{H}_y$, $\mathbf{H}_{y'}$; $\mathbf{H}_z$, $\mathbf{H}_{z'}$ sind die Ebenen der Paare von Geraden $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_x$, $\mathfrak{h}_y\mathfrak{h}_z$; $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_y$, $\mathfrak{h}_x\mathfrak{h}_z$; $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_z$, $\mathfrak{h}_z\mathfrak{h}_y$. (Vergl. § 10, 10; § 49, 5.)



5) Wie groß sind die Winkel β_i für die Halbierungsachsen?

47. Eine beliebige Ebene erzeugt mit den drei Projektionsebenen Durchschnittslinien, die wir die Spuren s_i derselben nennen und als erste, zweite und dritte Spur so unterscheiden, daß s_1 in der Ebene XOY, s_2 in XOZ, s_3 in YOZ gelegen ist; sie bilden das Spurendreieck der Ebene,

dessen Ecken mit S_x, S_y, S_z bezeichnet werden können nach ihrer Lage in den bez. Achsen. Die Ebene schneidet ferner das System der sechs Halbierungsebenen $\mathbf{H}_i$ und der vier Halbierungsachsen $\mathfrak{h}_i$ in den sechs Seiten — schreiben wir h_x, $h_{x'}$, h_y, $h_{y'}$, h_z, $h_{z'}$ — und vier Ecken — H, H_x, H_y, H_z — eines vollständigen Vierecks, für welches die drei Ecken des Spurendreiecks S_x, S_y, S_z die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare $h_x, h_{x'}$; $h_y, h_{y'}$; $h_z, h_{z'}$ oder die Diagonalpunkte, die drei Spuren s_1, s_2, s_3 also die drei Diagonalen sind.



Fällt man vom Anfangspunkt O auf die Ebene eine Normale n und bezeichnet ihren Fußpunkt durch N, so erkennt man denselben als den Durchschnittspunkt der drei Höhenperpendikel des Spurendreiecks $S_x S_y S_z$. weil die Normalebenen zur gegebenen Ebene durch OZ, OX, OY bez. sich in ON durchschneiden (vergl. § 10, 21). Sind die Winkel dieser Normale mit den Projektionsebenen (§ 46) β_1, β_2, β_3, so sind die Neigungswinkel der Ebene α_1, α_2, α_3 gegen dieselben Projektionsebenen ihre Komplemente und man hat folglich

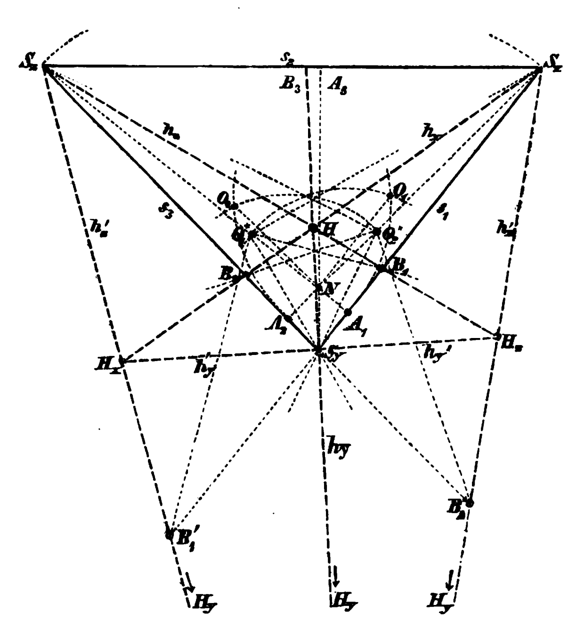
$$\sum_{i=1}^{i=3} \cos^2 \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{i=3} \sin^2 \alpha_i = 2; \quad \alpha_i + \alpha_k \geqq 90^0$$

für i und k als verschieden unter den Zahlen 1, 2, 3; oder auch $\Sigma \Delta_i^2 = 1$ nach § 43. Die Schnittlinien der Ebenen n, OZ; n, OY; n, OX mit den Projektionsebenen XOY, XOZ, YOZ bez. sind die drei Projektionen n', n'', n''' der Normale n, und weil die bezeichneten Ebenen zu den bez. Spuren s_1, s_2, s_3 normal sind, so sind auch n', n'', n''' bez. normal zu s_1, s_2, s_3. Da endlich alle Normalen derselben Ebene und alle Normalebenen derselben Geraden einander parallel und die gleichnamigen Projektionen paralleler Geraden und Spuren paralleler Ebenen selbst parallel sind, so gilt der Satz: Die Projektio-

nen jeder Normale einer Ebene sind normal zu den gleichnamigen Spuren der Ebene — und der umgekehrte: Die Spuren der Normalebenen zu einer Geraden sind normal zu den gleichnamigen Projektionen der Geraden.

Wir erläutern diese Anschauungen durch die folgenden Übungen.

B. 1) Wenn das Spurendreieck $S_x S_y S_z$ einer Ebene (untenstehende Figur) gegeben ist, so kann man mittelst des Höhenschnittpunktes N desselben die Längen OS_x, OS_y, OS_z oder die Achsenabschnitte der Ebene, und die Geraden h_i, also auch die Punkte H_i derselben verzeichnen. Ein Kreis über der Höhe $S_z A_1$ als Durchmesser schneidet auf der durch N gezogenen Parallele zu $S_x S_y$ den Punkt O_1 so an, daß NO_1 die normale Entfernung der Ebene vom Anfangspunkt ist, und die Abtragung von $A_1 O_1$ auf die Höhe $A_1 S_z$ gibt (vergl. nebenstehende Figur) in $O_1{}^*$ die Umlegung von O mit $S_x S_y O$ in die Ebene. Die Halbierungslinien des rechten Winkels $S_x O_1{}^* S_y$ geben in $S_x S_y$ zwei Schnittpunkte B_1, B_1', welche mit S_z verbunden die Geraden $h_z, h_{z'}$ bestimmen; und zwar gibt bei gleichem Sinne der Achsenabschnitte OS_x, OS_y der innere, bei ungleichem Sinne derselben der äußere Punkt die Linie h_z. Verfährt man ebenso mit den Seiten $S_y S_z$, $S_z S_x$ des Spurendreiecks, so erhält man die Geraden $h_x, h_{x'}$; $h_y, h_{y'}$, und durch ihre vier Schnittpunkte zu dreien (§ 46, 4) die Punkte H, H_x, H_y, H_z. Da die Konstruktion nur die Länge, aber nicht den Sinn der Achsenabschnitte der Ebene bestimmt, so entsprechen acht Lagen der Ebene den durch die Projektionsebenen erzeugten Oktanten des Raumes in demselben Spurendreieck. Man charakterisiere die bezügliche Unterscheidung der Vierecke der H_i.



2) Man entnehme der vorigen Konstruktion die Neigungswinkel α_i der Ebene. Ebenso die Winkel der Ebene zu den Projektionsachsen.

Die Figur enthält bereits die Elemente der orthogonalen Achsonometrie in § 60; denn NS_x, NS_y, NS_z sind die Orthogonalprojektionen der drei Koordinatenachsen $OS_x, \ldots$ auf die schräge Ebene $S_xS_yS_z$, die Längen O_1S_z, O_2S_x sind die wahren Längen von OS_z, OS_x und liefern also die Maßstäbe für die Auftragung der bezüglichen Koordinaten in den Achsenprojektionen. Wenn die Schnittpunkte einer andern Ebene mit den Koordinatenachsen in S_x^1, S_y^1, S_z^1 auf die Ebene $S_xS_yS_z$ orthogonal projiziert wären, so hat man ohne weiteres ihre Durchschnittslinie d mit dieser. Für die Konstruktion ihres Neigungswinkels φ mit ihr, die Umklappung ihres Spurendreiecks in sie, etc. muß man § 60 vergleichen.

3) Die Punkte B_i, $B_{i'}$ in den Seiten des Spurendreiecks liegen viermal zu dreien in einer Geraden. (Siehe § 51.)

4) Welches ist der besondere Charakter des Vierecks der H_i für eine Ebene mit gleichseitigem Spurendreieck, und wie groß sind die Neigungswinkel α_i derselben?

5) Jede projizierende Ebene hat zu ihrem Spurendreieck einen rechtwinkligen Parallelstreifen, dessen unendlich ferne Ecke der zu ihr parallelen Achse angehört. Das Viereck $HH_xH_yH_z$ ist dann ein gleichschenkliges Paralleltrapez, dessen parallele Seiten von der Richtung der beiden parallelen Spuren sind, und dessen nicht parallele Seiten mit der letzten Spur gleiche Winkel bilden.

6) Als erste ausgezeichnete Grenzlage der projizierenden Ebene kann ihr Parallelismus mit einer Projektionsebene betrachtet werden; dann ist eine Spur unendlich fern, das Viereck $HH_xH_yH_z$ ein Quadrat.

7) Die zweite ausgezeichnete Grenzlage gibt die projizierende Ebene parallel einer Halbierungsebene; dann liegen zwei der Ecken des Vierecks der H_i und also eine seiner Seiten unendlich fern, die beiden andern Ecken aber in der Mitte zwischen den parallelen Spuren und symmetrisch zur letzten Spur der Ebene.

8) Man erörtere die scheinbare Unbestimmtheit des Normalenfußpunktes N in 6) und die speziellen Lagen desselben in den Fällen 4) u. 7).

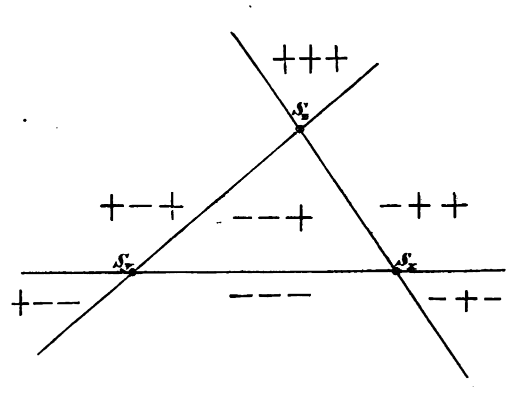
9) Wenn eine Ebene zu einer der Halbierungsachsen parallel ist, so fällt eine der Ecken des Vierecks der H_i ins Unendliche und die drei zugehörigen h_i werden einander parallel.

10) Eine Ebene ist zu einer der Halbierungsebenen normal, wenn sie zwei Projektionsebenen gleich geneigt ist oder wenn zwei ihrer Achsenabschnitte gleich sind (vergl. § 10, 9); man charakterisiere das Viereck der H_i in diesem Falle. Die Normalebenen der Halbierungsachsen (§ 46, 4) sind gleich geneigt zu den Projektionsebenen (4).

11) Als weitere Spezialfälle der Lage einer Ebene sind bezüglich des Dreiecks der Spuren und des Vierecks der H_i die Fälle

zu charakterisieren, wo die Ebene eine Projektionsachse bez. eine Halbierungsachse enthält.

12) Aus dem Sinne der Koordinaten der drei Achsenschnittpunkte S_x, S_y, S_z der Ebene bestimmt sich der Sinn der Koordinaten aller ihrer Punkte aus ihrer Lage gegen das Spurendreieck. Alle Punkte innerhalb des Spurendreiecks haben ihre Koordinaten vom nämlichen Sinne, wie die Achsenschnittpunkte selbst, sagen wir beispielsweise $+, +, +$ oder $(+, -, +)$; der Durchgang durch eine Spur markiert den Wechsel des Sinnes der zugehörigen, d. i. zu ihrer Projektionsebene normalen, Koordinate, sodaß die Außenwinkelflächen des Spurendreiecks an s_1 bez. durch $++-$ $(+--)$, an s_2 durch $+-+$ $(+++)$, an s_3 durch $-++$ $(--+)$ charakterisiert sind; endlich die Scheitelwinkelräume an S_x, S_y, S_z bez. die Zeichenfolgen $+--$ $(++-)$, $-+-$ $(---)$, $--+$ $(-++)$ erhalten. Die nebenstehende Figur gibt einen dritten Fall. Eine Ebene geht im allgemeinen durch sieben der acht Oktanten, in welche die Projektionsebenen den Gesamtraum teilen. Durch welchen geht sie nicht? (Nicht durch $++-$ im Falle der Figur). Welche Ebenen gehen durch sechs und welche durch vier Oktanten?



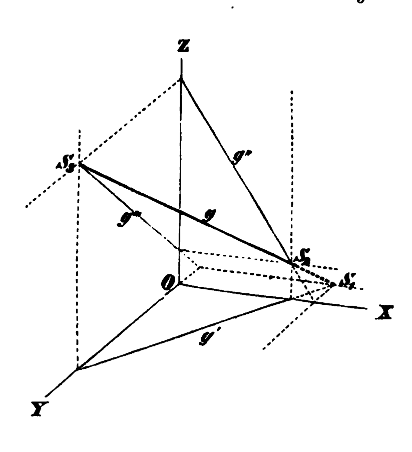
13) Man erörtere die in den vorher bezeichneten Spezialfällen der Lage der Ebene eintretenden Besonderheiten der Diskussion in 12), und füge die Untersuchung der Verteilung der Punkte von besonderen Koordinatenverhältnissen nach § 46, 1—4 hinzu. Der Gesamtraum wird durch die Projektions- und Halbierungsebenen in 48 Winkelräume (dreiseitige Ecken) zerlegt, von denen jede Ebene im allgemeinen 33 durchsetzt.

14) Man gebe die speziellen Relationen zwischen den Winkeln α_i für die projizierenden und die den Projektions- oder Halbierungsebenen parallelen Ebenen an; dazu die Lage ihrer Normalen.

15) Wenn der eine Schenkel eines rechten Winkels einer Projektionsebene parallel ist, so ist die betreffende Projektion desselben selbst ein rechter Winkel.

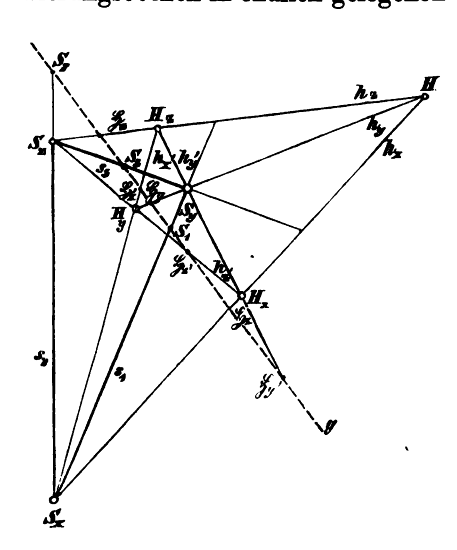
16) Der Abstand eines Punktes von der Halbierungsebene $H_{x'}$ ist der Diagonale eines Quadrats gleich, das die halbe (algebraische) Summe seiner Koordinaten y und z zur Seite hat. Wie lautet die Regel für H_x? Wie für H_z, $H_{z'}$, und H_y, $H_{y'}$?

48. Eine Gerade g bestimmt mit den Richtungen der drei Projektionsachsen OZ, OY, OX drei projizierende Ebenen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3$, von denen jede zwei zueinander parallele Spuren und eine zu diesen rechtwinklige Spur hat; die letzten sind die drei Projektionen der Geraden g', g'', g'''.



Die Gerade schneidet die drei Projektionsebenen, also die Spuren der projizierenden Ebenen in drei Punkten, die wie ihre Durchstoßpunkte nennen und mit S_1, S_2, S_3 bezeichnen wollen, nach den Projektionsebenen XOY, XOZ, YOZ, in welchen sie liegen. Jeder derselben liegt in den drei Ebenen $\mathfrak{G}_i$ und in einer Projektionsebene, ist also der Durchschnittspunkt der drei gleichnamigen Spuren von jenen. (Obenstehende Figur.)

Dieselbe Gerade schneidet im allgemeinen die sechs Halbierungsebenen in endlich gelegenen und verschiedenen Punkten, die wir als ihre Punkte $\mathfrak{H}$, bezeichnen wollen nach den Indizes der betreffenden Halbierungsebenen. Diese Punkte sind die Durchschnittspunkte von g mit den Seiten aller der Vierecke, welche die durch g gehenden Ebenen mit dem System der Projektions- und der Halbierungsebenen bilden (nebensteh. Figur); sie gehören also (§ 25, 5) der nämlichen Involution an, als drei Paare derselben; $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_{x'}$; $\mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_{y'}$; $\mathfrak{H}_z, \mathfrak{H}_{z'}$.



Die speziellen Lagen der Geraden charakterisieren sich einfach durch ihr Verhalten zum System der Projektions-

und Halbierungsebenen; sie kann einer Projektionsebene parallel sein, sodaß der entsprechende Durchstoßpunkt unendlich fern ist; sie kann zwei Projektionsebenen parallel sein oder einer Projektionsachse. Eine Gerade kann zu einer Halbierungsebene parallel sein, oder zu zwei oder zu drei solchen, d. h. zu einer Projektionsachse bez. einer Halbierungsachse. Sie kann eine Projektionsachse oder auch zwei Projektionsachsen schneiden, und sie kann ebenso eine Halbierungsachse oder zwei Halbierungsachsen und damit eventuell auch eine Projektionsachse schneiden. Es ist nützlich, für diese Fälle die Lagen der projizierenden Ebenen und die Besonderheiten der Systeme der S_i und $\mathfrak{H}_i$ zu verzeichnen.

Die in jeder Geraden liegende Reihe von unendlich vielen Punkten (§ 4) hat ihre Projektionen in den gleichnamigen Projektionen der Geraden, und die durch die Gerade gehenden unendlich vielen Ebenen (§ 7) haben Spuren, welche durch die gleichnamigen Durchstoßpunkte der Geraden gehen.

B. 1) Die Durchstoßpunkte S_i der Geraden sind die Punkte derselben mit einer verschwindenden Koordinate $(x, y, 0)$; $x, 0, z)$; $(0, y, z)$. (Vergl. § 46, 2.)

2) Man bezeichne die Spuren von G_1, G_2, G_3, welche sich in S_i durchschneiden.

3) Die Durchstoßpunkte S_1, S_2 sind zu $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_{x'}$; S_2, S_3 zu $\mathfrak{H}_z, \mathfrak{H}_{z'}$; S_3, S_1 zu $\mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_{y'}$ konjugiert harmonisch (§ 16, 14); wenn einer von ihnen unendlich fern ist, so ist der andere der Mittelpunkt des betreffenden Paares.

4) Durch wie viele und welche der acht Koordinatenräume geht eine Gerade g im allgemeinen) Welches sind die entsprechenden Zeichenwechsel der Koordinaten ihrer Punkte? (§ 47, 12.)

5) Man charakterisiere eine Gerade g, die zu einer Projektionsebene parallel ist, nach den hervorgetretenen Gesichtspunkten.

6) Man zeige, daß für die zu zwei Projektionsebenen parallele Gerade g die Involution der $\mathfrak{H}_i$ eine symmetrische ist, welche den vorhandenen Durchstoßpunkt zum endlichen Doppelpunkt hat.

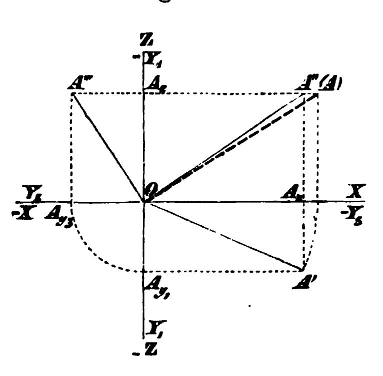
7) Man bezeichne den Zentralpunkt der Involution der $\mathfrak{H}_i$ für eine Gerade g, die zur Halbierungsachse $\mathfrak{h}_z$ parallel ist.

8) Man erläutere die harmonische Relation der $\mathfrak{H}_i$ auf einer Geraden g, die in einer Projektionsebene liegt.

9) Man spezialisiere die Involution der $\mathfrak{H}_i$ und die Lage der S_i für eine Gerade, die einer Halbierungsebene parallel ist.

10) Man untersuche, ob die Relationen der Winkel β_i für einige dieser Spezialfälle besondere Ergebnisse liefern.

49. Die drei Projektionsebenen, in welchen alle die gewonnenen Bestimmungselemente enthalten sind, werden zum Zwecke der Darstellung in eine Ebene, die Zeichnungsebene, gebracht. Wir denken eine derselben, die wir als Ebene XOZ nehmen wollen und vertikal voraussetzen, mit der Zeichnungsebene vereinigt und führen die beiden andern XOY — wir denken sie horizontal — und YOZ, die auf ihr normal stehen, durch Drehung um die Achsen OX und OZ bez. in sie über. Wir wollen festsetzen, es geschehe dies in der Weise, daß die positive Achse OY durch die Drehung um OX auf die negative Achse OZ, in OY_1 (nebenstehende Figur), und daß dieselbe positive Achse OY durch die Drehung um OZ auf die negative Achse OX falle in OY_3. Dann sind alle Koordinaten y sowohl auf die horizontale, wie auf die vertikale Achse aufzutragen in einerlei Sinn derselben. Wir setzen auch fest, es sei der positive Sinn der x der nach rechts und der positive Sinn der z der nach oben, also der positive Sinn der y nach unten und nach links bez. in XOY und YOZ.



Von den Flächen des projizierenden Parallelepipeds eines Punktes A erscheinen drei, nämlich (obensteh. Figur) $OA_x A' A_y$, $OA_z A''' A_y$, $OA_z A'' A_x$; sie enthalten jede der Koordinaten dreimal (y viermal?) und haben paarweise je eine Seite nach Richtung und Länge, somit die anstoßenden Seitenpaare der Richtung nach, gemein: Je zwei Projektionen desselben Punktes A liegen in demselben Perpendikel zur zwischenliegenden Projektionsachse, nämlich bez. $A' A_x A''$, $A'' A_z A'''$, $A''' A_{y_3} A_{y_1} A'$. Die Entfernung des Punktes A (x, y, z) vom Anfangspunkte O ergibt sich als Hypotenuse in jedem der rechtwinkligen Dreiecke aus den bez. Kathetenpaaren OA', z; OA'', y; OA''', x. Der von ihr mit der Projektion eingeschlossene Winkel ist der zugehörige Winkel β_i. (§ 46.)

B. 1) Man trage die Projektionen eines Punktes aus seinen Koordinaten auf und zwar mit allen Veränderungen des Sinnes, welche möglich sind. Acht Punkte entsprechen den acht Zeichenkombinationen $\pm, \pm, \pm;\ \pm, \pm, \mp;\ \pm, \mp, \pm;\ \mp, \pm, \pm$.

2) Man entnehme aus den gegebenen Projektionen eines Punktes auf die Ebenen XOY, XOZ seine drei Koordinaten und bestimme seine Lage im Raum und seine Projektion auf YOZ.

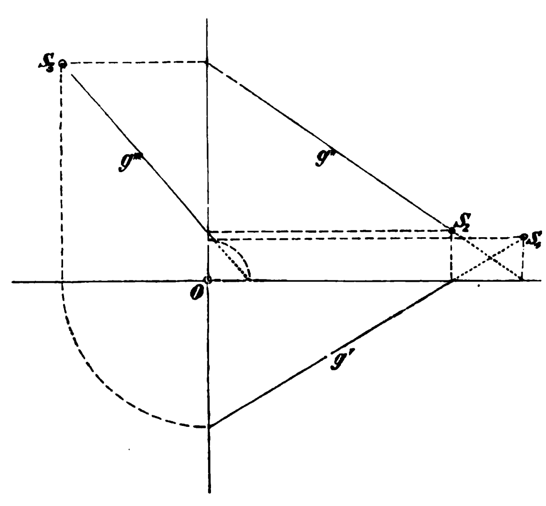
3) Man bestimme aus A', A''' bez. aus A''', A'' die fehlende Projektion A'', bez. A'.

4) Man verzeichne die Projektionen von Punkten in allen den speziellen Koordinatenverhältnissen der Aufgaben des § 46 und erörtere insbesondere die Charaktere der in den Projektionsebenen gelegenen Punkte.

5) Die Punkte der Halbierungsebenen $\mathbf{H}_{x'}$, $\mathbf{H}_{y'}$(?) und $\mathbf{H}_{z'}$ haben je ein Paar zusammenfallender Projektionen; die entsprechenden Projektionen der Punkte der Ebenen $\mathbf{H}_x$, $\mathbf{H}_y$, $\mathbf{H}_z$ sind symmetrisch zur zwischenliegenden Projektionsachse; eine ihrer Projektionen liegt stets in einer der Halbierungslinien der Achsenwinkel bei O.

6) Gibt es Punkte, für welche alle drei Projektionen sich decken und wo liegen sie und ihre Projektionen? Diese in der 45° Linie durch O von oben rechts nach unten links.

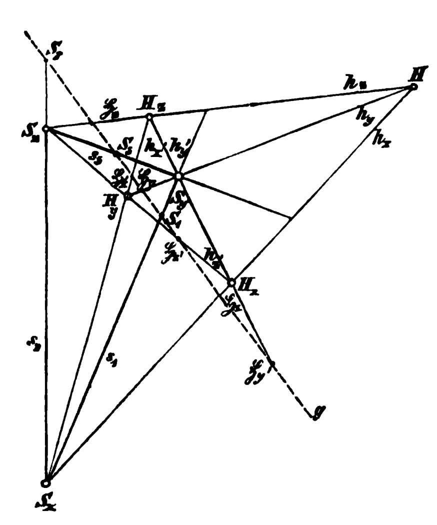
50. Eine gerade Linie ist durch zwei ihrer Projektionen g_i (nebensteh. Figur) bestimmt, wenn die zu denselben gehörenden projizierenden Ebenen $\mathbf{G}_i$ sich schneiden; sie ist nicht bestimmt, wenn diese sich decken, d. i. wenn jene Projektionen in demselben Perpendikel zur zwischenliegenden Projektionsachse enthalten sind. In diesem Falle ist die Gerade zur letzten Projektion parallel und wird durch zwei Projektionen nur bestimmt, wenn eben diese unter denselben ist. Im All-



gemeinen genügen somit zwei Projektionen zur Bestimmung der Objekte und die dritte kann weggelassen werden. (§ 49, 2.)

Nehmen wir zwei Punkte $A(x_1, y_1, z_1)$ und $B(x_2, y_2, z_2)$ als durch ihre Projektionen gegeben an, so sind die Projektionen ihrer geraden Verbindungslinie AB die geraden Verbindungslinien $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ ihrer gleichnamigen Projektionen. Die wahre Länge von AB bildet mit der Länge der Projektion $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ und der algebraischen Differenz der zugehörigen projizierenden Linien $z_1 - z_2$, $y_1 - y_2$, $x_1 - x_2$ bez. als Katheten je ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem sie mit der ersteren den zugehörigen Winkel β_1, β_2, β_3 bez. einschließt. Man hat also $A'B' = AB \,.\, \cos\beta_1$, etc.

Oder: Da die Punktreihe in AB zu ihrer Parallelprojektion perspektivisch ähnlich ist, so ist das Verkürzungsverhältnis $A'B' : AB =$ const., es ist nämlich $= \cos\beta_1$, etc. Für $\beta_1 = 0$ entsteht die Gleichheit der entsprechenden Reihen, für $\beta_1 = 90^0$ wird die Horizontalprojektion der Geraden ein Punkt.



Die Durchstoßpunkte S_1, S_2, S_3 der Geraden (nebenstehende Figur) fallen mit ihren gleichnamigen Projektionen zusammen und liegen somit in den gleichnamigen Projektionen der Geraden und in den Perpendikeln, welche man auf den zugehörigen Achsen in ihren Schnittpunkten mit den benachbarten Projektionen errichten kann. (Vergl. Figur auf S. 306 oben.)

Die Schnittpunkte der Geraden mit den Halbierungsebenen haben je eine ihrer Projektionen in den Halbierungslinien der Achsenwinkel, nämlich (vorstehende Figur) $\mathfrak{H}_z$, $\mathfrak{H}_{z'}$ die erste, $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_{x'}$ die dritte und $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_{y'}$ die zweite, und sind dadurch bestimmt.

B. 1) Man konstruiere die gerade Entfernung von zwei Punkten, deren erste Projektionen nebst den Koordinaten $z_1 = 5$,

$z_2 = -3$ gegeben sind; dazu die Winkel β_i der Verbindungslinie.

2) Man projiziere eine Gerade aus der Angabe von zweien ihrer Durchstoßpunkte.

3) Man lege durch einen Punkt P die Geraden, welche mit zwei Projektionsebenen vorgeschriebene Winkel β_i bilden (§ 46), z. B. β_1 und β_2. Man trage β_1 so an x (in S) an, daß der schräge Schenkel P'' enthält und die Länge der Geraden von P bis zum ersten Durchstoßpunkt ist, während die in x liegende Kathete SP_x den Radius des Kreises aus P' liefert, auf dem der horizontale Durchstoßpunkt S_1 der Geraden liegen muß. Legt man dann bei P'' an SP'' den Winkel β_2 an und fällt von S die Normale ST zum neuen Schenkel, so ist $P''T$ der Vertikalprojektion jener Länge SP'' gleich: Ein Kreis mit ihr als Radius um P'' schneidet in x die Fußpunkte der möglichen Vertikalprojektionen der Geraden aus. Die in ihnen auf x errichteten Normalen schneiden jenen Ortskreis des ersten Durchstoßpunktes S_1 in den möglichen Lagen desselben und bestimmen so zu jeder der zwei Vertikalprojektionen g'', $g^{*''}$ zwei Horizontalprojektionen g_1', g_2' bez. $g_1^{*'}$, $g_2^{*'}$.

4) Parallele Gerade haben parallele gleichnamige Projektionen und gleiche Verkürzungsverhältnisse; die Projektionen der Parallelen zu Geraden $\mathfrak{h}_i$ liegen also unter 45^0 zu den Achsen. Wodurch unterscheiden sich die von Parallelen zu $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_x$, $\mathfrak{h}_y$, $\mathfrak{h}_z$ voneinander?

5) Man projiziere zu drei Punkten einer durch ihre Projektionen gegebenen Geraden den oder die vierten harmonischen. (§ 16, 14.)

6) Man bestimme aus zwei Projektionen einer Geraden die dritte Projektion derselben und ihre drei Durchstoßpunkte.

7) Man verzeichne die Projektionen von Geraden, welche zu einer Projektionsachse bez. Projektionsebene parallel sind, oder eine solche Achse schneiden bez. in einer solchen Ebene liegen.

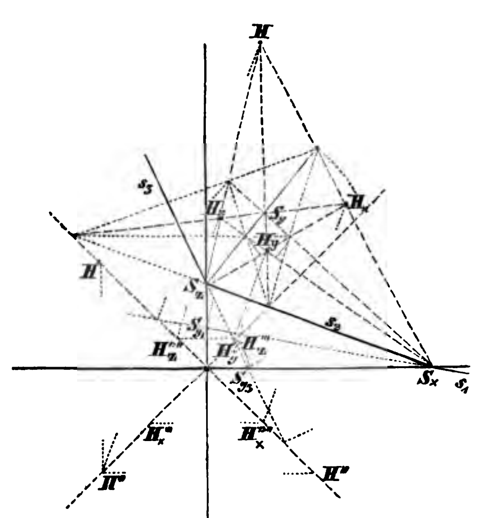
8) Wenn zwei Projektionen einer Geraden mit der zwischenliegenden Achse gleiche Winkel einschließen, so ist die Gerade zu einer der Halbierungsebenen parallel; wodurch unterscheiden sich dabei die Halbierungsebenen $\mathbf{H}_z$, $\mathbf{H}_{z'}$, etc.?

Wodurch charakterisieren sich die Projektionen einer Geraden, die in einer Halbierungsebene liegt? Insbesondere wenn sie zur zugehörigen Projektionsachse parallel geht?

9) Man zeichne durch einen in einer Geraden g gegebenen Punkt P die Parallelen zu den Halbierungsebenen, welche mit ihr eine Projektion gemein haben. Ist p eine solche Parallele, so gibt die Halbierungsebene, zu der sie parallel sein soll, diejenige ihrer Projektionen, welche unter 45^0 zu den Achsen liegt; aus dieser und der in die gleichnamige Projektion von g fallenden anderen Projektion ist p bestimmt. Welche zwei der gesuchten Geraden haben einen Punkt zur Projektion?

10) Können alle drei Projektionen einer Geraden einander parallel sein, und wie liegt eine solche Gerade? (§ 49, 6.) Parallel der Geraden $\mathfrak{h}_y$, sodaß durch jeden Punkt eine derselben geht.

51. **Die Spuren** s_1, s_2, s_3 **einer Ebene** schneiden sich paarweise in der jedesmal zwischenliegenden Projektionsachse (nachstehende Figur). Von den Spuren der **Halbierungsebenen** fallen zwei in die bezügliche Projektionsachse, die letzte in eine der Halbierungslinien der von den beiden anderen Projektionsachsen gebildeten Winkel. Von jeder der **sechs Geraden** h_i der Ebene ist also eine ihrer Projektionen, nämlich von h_z, $h_{z'}$ die erste, von h_y, $h_{y'}$ die zweite, und von h_x, $h_{x'}$ die dritte Projektion gegeben. Dies bestimmt die Projektionen der h_i und somit auch die der Punkte H_i.



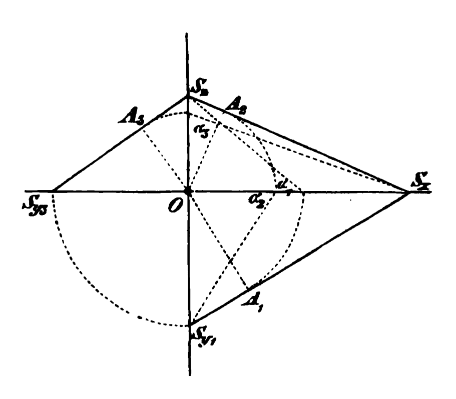
Verzeichnet man das Spurendreieck aus seinen drei Seiten durch Umlegung um die eine derselben, etwa s_2 (also Bestimmung von S_y), in wahrer Größe, so erhält man durch Beachtung der Schnittpunkte der h_i mit den Seiten desselben **die wahre Figur der** h_i **und** H_i **der Ebene** (vorstehende Figur). **Die Schnittpunkte der** h_i **mit den Spuren liegen viermal zu dreien in einer Geraden**; denn (vergl. Figuren auf S. 301, 302 u. 303) **die Halbierungspunkte der zwölf Kanten eines Würfels liegen viermal zu sechs mit dem Mittelpunkte desselben in einer Ebene.**

Alle Geraden dieser Art liegen folglich in vier festen Ebenen, welche die Halbierungslinien der Achsenwinkel zu ihren Spuren haben und daher nach § 47 und dem folgenden zu den Halbierungsachsen $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_x$, $\mathfrak{h}_y$, $\mathfrak{h}_z$ **bez. normal sind.**

Jene Geraden sind die Polaren h_n, h_{nx}, h_{ny}, h_{nz} von H, H_x,

H_y, H_z in dem Orthogonalsystem, welches für O als Zentrum und für N als Hauptpunkt in der betrachteten Ebene bestimmt wird. (Überblick S. 131 f.; § 34, 4 u. f.) Jene Ebenen sind als Hauptkreis- oder Diametralebenen den Halbierungsachsen als ihren Poldurchmessern in jeder Kugel vom Mittelpunkt O konjugiert. (Vergl. Bd. II und III dieses Werkes.)

Die Normalen, die man vom Anfangspunkt O auf die drei Spuren s_1, s_2, s_3 fällen kann, sind die Projektionen n', n'', n''' der Normale n von O auf die Ebene (nachstehende Figur); sie sind auch Spuren und zwar erste, zweite, dritte Spur bez. der Ebenen n, OZ; n, OY; n, OX, deren andere Spuren je in der bezüglichen Projektionsachse vereinigt sind. Nennen wir die Fußpunkte dieser Perpendikel in den Spuren bez. A_1, A_2, A_3, so enthalten die bei O rechtwinkligen Dreiecke OA_1S_z, OA_2S_y, OA_3S_x, die man leicht in ihrer wahren Gestalt darstellt — vergleiche die Figur — bei A_1, A_2, A_3 bez. die Winkel α_1, α_2, α_3.



Wenn von einer Ebene ein Punkt P und ihre Winkel α_i, α_k mit zweien der Projektionsebenen gegeben sind, so ist ihre Bestimmung durch die Beziehung der α_i zu den β_i ihrer Normalen

$$\beta_i = 90^0 - \alpha_i$$

auf die in § 50, 3 gezeigte Bestimmung ihrer Normalen in P zurückgeführt.

Liegt auf der Ebene $S_xS_yS_z$ eine Figur von beliebiger Begrenzung und von der Fläche F und denken wir sie durch äquidistante Parallelen zu einer der Spuren und zur zugehörigen Höhe des Spurendreiecks in gleiche sehr kleine Rechtecke geteilt, so zeigt die Projektion der Parallelensysteme, welche der besagten Spur entspricht, daß die Projektionen der Rechtecke in ihr dieselbe Grundlinie, wie im Original haben und daß ihre Höhen im Verhältnis $1 : \cos\alpha_i$ verjüngt sind. Wir schließen daraus, daß die Flächen der Projektion und des Origi-

nals einer ebenen Figur in dem Verhältnis $\cos\alpha_i : 1$ stehen, d. i. für $F', \ldots$ als Flächen der Projektionen

$$F : F' : F'' : F''' = 1 : \cos\alpha_1 : \cos\alpha_2 : \cos\alpha_3 = 1 : \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3$$

nach § 43.

Zwei beliebige Ebenen schneiden einander in einer Geraden, welche die Durchschnittspunkte der gleichnamigen Spuren derselben zu ihren Durchstoßpunkten und offenbar ebenso die Durchschnittspunkte der gleichnamigen h_i derselben zu ihren $\mathfrak{H}_i$ Punkten hat; dies gibt Mittel zur Angabe der Projektionen der Schnittlinie von zwei Ebenen und des Durchschnittspunktes von drei Ebenen.

B. 1) Man bestimme aus zwei Spuren einer Ebene ihre fehlende Spur.

2) Man trage die Spuren der nach ihrem Spurendreieck in Aufg. 1, § 47 bestimmten Ebenen nach ihren möglichen Lagen in den acht Oktanten ein — natürlich mittelst der durch die Umlegungen von O bestimmten Achsenabschnitte mit den möglichen Wechseln des Sinnes.

3) Man bestimme die sämtlichen Projektionen der Geraden h_i der Ebene **S** aus den Spuren derselben; damit auch die Projektionen des Vierecks der H_i. Die Durchstoßpunkte der h_i liegen in den Spuren von **S** und den Halbierungslinien der Achsenwinkel; sie liegen auch zu dreien in den geraden Linien, in denen die Ebene **S** von den Normalebenen der Würfelpunktlinien $\mathfrak{h}_1$ oder $\mathbf{H}_n$, $\mathbf{H}_{nx}$, $\mathbf{H}_{ny}$, $\mathbf{H}_{nz}$ geschnitten werden — nämlich S_1, S_2, S_3 von $h_{x'}, h_{y'}, h_{z'}$ in der Schnittlinie mit $\mathbf{H}_n$, von $h_{x'}, h_y, h_z$ in der mit $\mathbf{H}_{nx}$, etc.

4) Dasselbe insbesondere für die speziellen Fälle in 4 bis 7 des § 47.

5) Man verzeichne die Spuren der drei projizierenden Ebenen einer Geraden, welche durch zwei ihrer Projektionen oder zwei Durchstoßpunkte bestimmt ist.

6) Man bestimme aus einer Projektion einer Geraden g in gegebener Ebene **S** die andern Projektionen derselben, indem man sie als die Schnittlinie der Ebene **S** mit der durch jene Projektion bestimmten projizierenden Ebene betrachtet.

7) Parallele Ebenen haben parallele gleichnamige Spuren.

Wenn die gleichnamigen Spurenpaare von zwei Ebenen sich verkehrt decken, so ist ihre Durchschnittslinie die zugehörige gemeinsame Gerade h_i, z. B. für s_1 als mit $s_2{}^*$ und s_2 mit $s_1{}^*$ in Deckung die Gerade $h_{x'}$, etc.

8) Wenn in 6) die gegebene Projektion der Geraden g der gleichnamigen Spur der Ebene **S** parallel ist, so sind ihre beiden andern Projektionen den anliegenden Projektionsachsen parallel.

Eine Parallele zu einer Projektionsebene hat für alle durch sie gehenden Ebenen den Charakter einer gleichnamigen Spurparallele.

Solcher Spurparallelen oder Hauptlinien gehen drei durch jeden Punkt der Ebene; zwei von ihnen bestimmen sie und dienen wie in 11) unten die Spuren selbst zur Konstruktion ihres Schnittpunktes mit einer Geraden, wie ihrer Schnittlinie mit einer andern Ebene (vergl. § 52), etc. Für ihre Benutzung zur Umlegung vergl. § 54.

9) Man verzeichne zu einem Punkte A in gegebener Ebene $\mathbf{S}$, von welchem eine Projektion bekannt ist, die beiden andern Projektionen — indem man durch jene eine Gerade zieht, die man als gleichnamige Projektion einer Geraden in der Ebene betrachtet (6); speziell eine Parallele zu einer Spur der Ebene (8).

10) Man verzeichne die Projektionen der Geraden A_1S_z, A_2S_y, A_3S_x (Figur S. 313) einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene und damit die Projektionen des Fußpunktes N der Normale vom Anfangspunkt O auf die Ebene, so wie die wahre Länge von ON.

11) Man bestimme die Projektionen des Durchschnittspunktes D der durch zwei Projektionen bestimmten Geraden g mit einer durch zwei ihrer Spuren bestimmten Ebene $\mathbf{S}$ — indem man eine Projektion von g als gleichnamige Projektion einer in $\mathbf{S}$ gelegenen Geraden g^* ansieht und den Schnittpunkt von g mit g^* ermittelt; oder indem man eine beliebige von den durch g gehenden Ebenen so benutzt, wie hier ihre bezügliche projizierende Ebene.

12) Man lege durch eine aus g' und g'' bestimmte Gerade g die drei Ebenenpaare, welche je mit zwei Projektionsebenen gleiche Winkel machen. Man bestimmt die Durchstoßpunkte S_1, S_2, S_3 der Geraden und zieht durch jeden derselben die Parallelen zu den Halbierungslinien der Achsenwinkel als die s_1 des ersten, die s_2 des zweiten und die s_3 des dritten Ebenenpaares, aus denen die jedesmal andern Spuren sich ergeben. Die gefundenen Ebenen sind die Normalebenen zu den Ebenen $\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_{x'}, \ldots$, welche durch die Gerade gehen. (Vergl. § 10, 10.)

13) Man bestimme zu drei durch dieselbe Gerade g gehenden Ebenen die vierte harmonische Ebene bei bestimmter Zuordnung, oder die drei vierten harmonischen Ebenen; z. B. die zu den drei projizierenden Ebenen der Geraden.

Eine Involution von Ebenen ist durch zwei Paare von entsprechenden Ebenen, bez. deren Spuren, gegeben; man bestimme zu einer gegebenen fünften Ebene derselben die entsprechende. (§ 20, 14 f. § 25, 5. § 31, 1.)

14) Man verzeichne die vom Punkte A ausgehende Normale einer durch ihre Spuren bestimmten Ebene $\mathbf{S}$ und bestimme den Abstand der Ebene von A mittelst ihres Schnittes B mit der Normale.

15) Die gleichnamigen Spuren von drei Ebenen, welche eine trirektanguläre Ecke bilden, sind die Seiten eines Dreiecks, welches die gleichbenannte Projektion ihres Schnittpunktes zum Höhenschnittpunkt hat. (Vergl. § 10, 21. § 47, 1.)

16) Man verzeichne die Spuren der Ebene, welche durch zwei parallele oder zwei sich schneidende Gerade bestimmt ist.

17) Man konstruiere die Spuren der durch einen gegebenen Punkt B gehenden Normalebene zu einer durch ihre Projektionen bestimmten Geraden g, (§ 47) — mit Hilfe der durch B gehenden Parallele zu einer Spur dieser Normalebene; analog die Parallelebene durch B zu einer gegebenen Ebene.

18) Man verzeichne durch die Gerade g die Normalebene zu der durch ihre Spuren s_1, s_2 bestimmten Ebene, — mit Hilfe der Normale aus einem Punkte von g auf die Ebene.

19) Man lege durch eine Gerade g die Parallelebene zu einer andern gegebenen Geraden l — mittelst einer Parallelen zu l aus einem Punkte von g.

20) Man konstruiere die Projektionen und die wahre Länge der kürzesten Entfernung n von zwei durch ihre Projektionen gegebenen Geraden g und l. (Vergl. § 10, 20.)

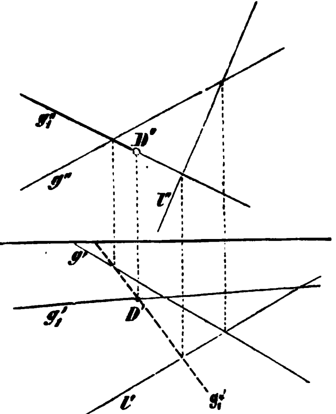
Man kann auch aus den Projektionen der gemeinsamen Normale n und den Horizontalprojektionen der beiden Geraden g, l ihre Vertikalprojektionen bestimmen, etc.

Speziell ermittele man die kürzeste Gerade zwischen zwei Geraden, von denen die eine in xy, die andere in xz liegt.

52. Die Bestimmung einer Ebene durch ihre Spuren oder Achsenschnittpunkte ist ein Spezialfall ihrer allgemeineren Bestimmung durch drei Punkte A, B, C oder durch zwei sich schneidende Gerade g, l. Daher ist die Konstruktion

a) des Schnittpunktes D der Ebene mit einer nicht in ihr liegenden Geraden g_1 und

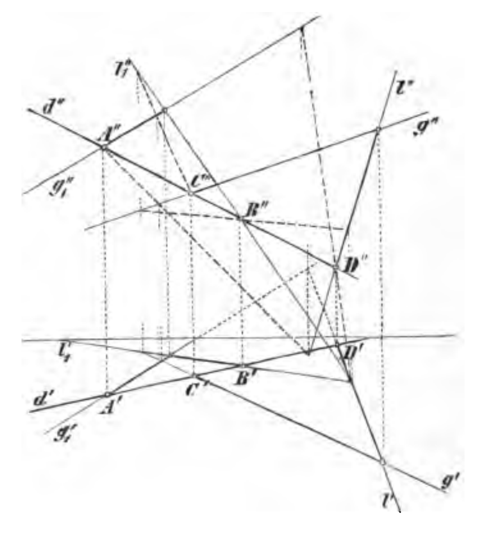
b) der Schnittlinie d von zwei Ebenen g, l; g_1, l_1 miteinander ohne Vermittelung der Spuren möglich.



Um D zu konstruieren, betrachtet man z. B. (nebenstehende Figur) g_1'' als zweite Projektion einer in der Ebene gl gelegenen Geraden g_1^* — also als $g_1^{*\prime\prime}$ — und bestimmt $g_1^{*\prime}$ durch Berücksichtigung ihrer Schnittpunkte mit g und l; dann ist der Schnittpunkt von $g_1^{*\prime}$ mit g' die erste Projektion D' von D. In ganz analoger Weise findet man D'', D''' direkt durch Betrachtung z. B. der ersten Projektion; sonst ergeben sie sich aus D'.

Man konstruiert sodann d, indem man (nachstehende Figur) die Punkte A, B bestimmt, in welchen g_1 und l_1 die Ebene gl, oder die Punkte C, D, in welchen g und l die Ebene $g_1 l_1$ schneiden, — also durch zwei-, drei- oder vierfache Wiederholung des vorigen Verfahrens. Unter den zur Benutzung stehenden vier Punkten liefern diejenigen (A, D in der Figur) das genaueste Resultat, welche den größten Abstand voneinander haben.

Sind die Ebenen durch zwei Dreiecke von den Seitenlinien $g, l, h; g_1, l_1, h_1$ bestimmt und dargestellt, so liefert auf demselben Wege jede der Seiten des einen Dreiecks einen Schnittpunkt mit der Ebene des andern und man erhält die Schnittlinie der Ebenen durch zwei gut gewählte unter ihnen. Dies liefert die zweckmäßigen Mittel zur Bestimmung der Durchschnittslinien begrenzter ebener Flächen; es ist offenbar, daß eine solche Durchschnittslinie nur in der Figur erscheint, soweit sie innerhalb der beiden begrenzten Flächen zugleich liegt — in unserer Figur, in der h und h_1 nur durch d vertreten sind, die Strecke zwischen B und C.



Die Aufgabe, das Parallelepiped zu projizieren, das drei durch ihre Projektionen gegebene windschiefe Gerade g_1, g_2, g_3 zu Kanten hat (vergl. § 8, 10 f.), bildet ein gutes Beispiel für die Konstruktion ohne Spuren. Man konstruiert zuerst die Schnittlinie l_1 der zu g_1 parallelen Ebenen durch g_2 bez. g_3, d. i. die zu g_1 parallele und gegenüberliegende Kante; dann ebenso l_2 die zu g_2 parallele als Schnittlinie der zu g_2 parallelen Ebenen durch g_3 bez. g_1. Damit sind die Ecken $g_1 l_2$, $g_3 l_2$, $g_3 l_1$, $g_2 l_1$ oder sagen wir 12, 32, 31, 21 gefunden und wir erhalten durch das Ziehen von Parallelen die

übrigen vier, nämlich zuerst die fehlenden Ecken der Parallelogramme 12, 32, 31 und 32, 31, 21, endlich die Ecken 13, 23 — alles mit scharfen Genauigkeitsproben.

B. 1) Man konstruiere den Durchschnittspunkt D der Dreiecksebene ABC mit der Geraden zwischen den Punkten E und F.

2) Man zeichne die Projektionen der Durchschnittslinie d der Dreiecksebenen ABC und DEF.

3) Man bestimme in der durch zwei sich schneidende oder zwei parallele Gerade g, l gehenden Ebene Parallelen zu den Spuren s_1 und s_2 derselben durch einen beliebigen in ihr gelegenen Punkt A und damit die Normale n der Ebene in diesem Punkte.

4) Man entscheide, ob ein durch seine Projektionen gegebener Punkt A in der Ebene der Geraden g, l liegt, und eventuell in welchem Sinne und Betrag er, in der Richtung x, y oder z gemessen, von ihr entfernt ist.

5) Man zeichne die Geraden h_i einer durch zwei Gerade g, l bestimmten Ebene — indem man wie in § 51 die in den Halbierungslinien der Achsenwinkel gelegenen Projektionen derselben benutzt.

6) Man konstruiere die Projektionen der Geraden $h_{z'}$, $h_{x'}$ in der Ebene gl, deren zweite und dritte, bez. erste und zweite Projektionen sich decken.

7) Durch einen Punkt A soll man die Normalebene zu einer Geraden g verzeichnen mittelst der Parallelen s_1^* und s_2^* zu ihren beiden ersten Spuren durch A; sodann ist der Schnittpunkt B derselben mit g und die wahre Länge von AB anzugeben.

8) Ein Rechteck $ABCD$ zu projizieren, wenn gegeben ist die Linie einer Seite AB, die darin liegende Ecke A und die nicht benachbarte Ecke C außer ihr.

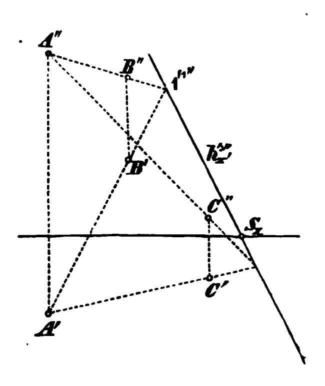
9) Man bestimme den Mittelpunkt M der durch vier Punkte A, B, C, D gehenden Kugel. Offenbar erhält man ihn als den Schnittpunkt der Normalebenen zu den Kanten AD, BD, CD bez. durch ihre Halbierungspunkte; und man bestimmt diesen nach der Methode des Textes aus den durch diese Mitten gezogenen Spurparallelen derselben (vergl. § 51, 17). Die wahre Größe von $MA = MB = MC = MD$ gibt den Radius.

10) Ebenso bestimmt man einen geraden Kreiskegel aus drei Punkten A, B, C seines Basiskreises und seiner Höhe h; man konstruiert die Schnittlinie der Normalebenen zu AB und zu BC durch ihre bez. Mitten, bestimmt ihren Schnitt mit der Ebene ABC (den Basismittelpunkt) und trägt in ihr von demselben aus die Höhe h ab, wodurch man die zwei möglichen Lagen der Spitze erhält.

53. Die geraden Linien $h_{x'}$, $h_{y'}$, $h_{z'}$ einer Ebene haben (die zweite in einem besondern Sinne) die Eigenschaft, daß eine

ihrer Projektionen — nämlich bez. die dritte, zweite, erste, — in einer Halbierungslinie der Achsenwinkel liegt, und daß ihre beiden andern Projektionen sich decken, sodaß alle ihre Punkte ein Paar sich deckender Projektionen zeigen. Für die Gerade $h_{y'}$ modifiziert sich dies in der Weise, daß ihre erste und dritte Projektion zur Deckung kommen würden, sobald man durch eine Drehung der einen um 90° die beiden Achsen OY_1 und OY_3 zur Deckung brächte.

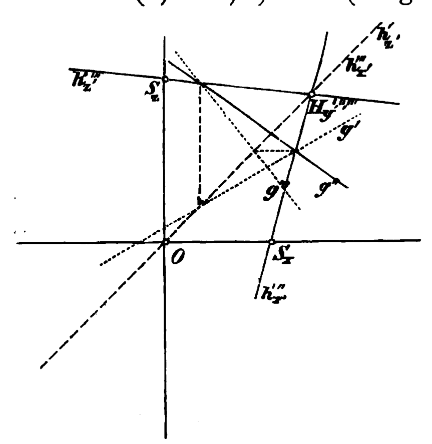
Da jede Gerade g der Ebene diese Geraden $h_{x'}$, $h_{z'}$ schneiden muß — von $h_{y'}$ soll der erwähnten Besonderheit wegen abgesehen werden —, so erhält man die Sätze: Die Projektionen g', g'' einer jeden Geraden g derselben Ebene schneiden sich in einem Punkte der Geraden $h_{x'}^{\prime,\prime\prime}$, welche ihr angehört. Die Projektionen g'', g''' einer jeden Geraden g der Ebene schneiden sich in einem Punkte der Geraden $h_{z'}^{\prime\prime,\prime\prime\prime}$, welche derselben entspricht. Oder in andern Worten: Die beiden ersten Projektionen eines ebenen Systems sind affine Figuren in perspektivischer Lage für die Richtung der Achse z als Zentrum und für die Gerade $h_{x'}^{\prime,\prime\prime}$ der Ebene des Systems als Achse der Affinität. Die zweite und dritte Projektion eines ebenen Systems sind affine Figuren in perspektivischer Lage für die Richtung der Achse x als Zentrum und für die Gerade $h_{z'}^{\prime\prime,\prime\prime\prime}$ als Achse der Affinität. Es läßt sich das auch als Folge von § 45 auffassen.



Demgemäß sind zwei Parallelprojektionen eines ebenen Systems bestimmt aus der einen Projektion seiner Punkte A, B, C, ..., der Affinitätsachse beider Projektionen und der andern Projektion eines Punktes A im System; z. B. die beiden ersten aus A'', B'', C'', ...; $h_{x'}^{\prime,\prime\prime}$; A'. Schneidet $A''B''$ (nebenstehende Fig.) die Gerade $h_{x'}^{\prime,\prime\prime}$ in $1^{\prime,\prime\prime}$, so liegt B' in der Geraden $1^{\prime,\prime\prime}A'$ und in der Parallelen zur Achse z durch B''.

Durch die beiden Affinitätsachsen $h_{x'}^{\prime,\prime\prime}$ und $h_{z'}^{\prime\prime,\prime\prime\prime}$ ist eine Ebene bestimmt, und mit Hilfe derselben konstruiert man daher

zu einer Projektion eines Punktes A oder einer Geraden g der Ebene (nachstehende Figur) die andern Projektionen. Man bemerke, daß $h_{x'}'''$ und $h_{z'}'$ in der einen Halbierungslinie der Achsenwinkel liegen, in welcher auch die Affinitätsachsen selbst sich schneiden müssen, da der Schnittpunkt H_y derselben die Koordinaten $(a, -a, a)$ hat. (Vergl. § 49, 6.) Natürlich können nach Ermittelung von S_x und S_z beide Affinitätsachsen der Ebene durch die Konstruktion von $H_y'{}''{}'''$ zugleich bestimmt werden, d. h. des Durchschnittspunktes ihrer Ebene mit der Halbierungsachse oder Würfelpunktlinie $\mathfrak{h}_y$ oder der Geraden, deren sämtliche Projektionen in die von unten links nach oben rechts gehende 45° Linie durch O fallen.



Jede der Geraden $h_{x'}$, $h_{z'}$ bestimmt auch mit einer andern sie schneidenden eine Ebene; insbesondere geht durch jeden Punkt der Ebene eine Parallele zu $h_{x'}$ in ihr mit zu $h_{x'}'{}''$ parallelen zwei ersten Projektionen, etc. Ihre Benutzung ist zur Übung zu empfehlen.

Allgemein durfte man schließen: Weil die Systeme der ersten und zweiten Projektion des ebenen Systems mit diesem selbst affin sind, so sind sie auch untereinander affin (§ 44, 3), und, da die Vereinigung der Systeme in der Zeichnungsebene dieselben in perspektivischer Lage zeigt, das Zentrum in der zur Achse OX normaler Richtung, so müssen sie auch eine Achse der Affinität besitzen (§ 23, 5), die durch drei Paare entsprechender Punkte bestimmt ist und jedenfalls den bezüglichen Achsenschnittpunkt der Ebene als sich selbst entsprechend und aus demselben Grunde den Punkt von drei zusammenfallenden Projektionen enthalten muß.

Aus $\Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 = \mathbf{F}' : \mathbf{F}'' : \mathbf{F}'''$ folgt $\Delta_1 : \Delta_2 = \Delta_{12}$, $\Delta_2 : \Delta_3 = \Delta_{23}$, $\Delta_3 : \Delta_1 = \Delta_{31}$ zur Bestimmung der Charakteristiken der Affinitäten, in welchen die Projektionen der Ebene zueinander stehen. Es ist $\Delta_{12}\Delta_{23}\Delta_{31} = 1$. Aus Δ_{12} und Δ_{23} bestimmen sich Δ_1, Δ_2, Δ_3;

wegen $\varDelta_k^2(1 + \varDelta_{ik}^2 + \varDelta_{jk}^2) = 1$. (§ 47.) Für $\alpha_1 = 90^0$ wird $\varDelta_1 = 0$ und damit auch $\varDelta_{12} = 0$, $\varDelta_{31} = \infty$; h_x''' fällt in die Horizontalprojektion; $\varDelta_{23}$ allein bestimmt $\varDelta_2$ und $\varDelta_3$. Für die Bestimmung einer Ebene durch zwei ihrer $\varDelta_{ik}$ oder die Flächenverhältnisse ihrer Projektionen siehe unten Beispiele.

Da die Affinitätsachsen des Originalsystems mit seinen Projektionen die Spuren des ebenen Systems sind (vergl. § 54). so ergibt sich, daß die vorzugsweise bequemen Bestimmungsweisen des ebenen Systems durch Parallelprojektion ohne Ausnahme die Achsen dieser Affinitäten als Hauptbestimmungsstücke benutzen.

Wir haben im vorigen die Lehre von den Affinitätsachsen der Ebene völlig elementar begründet, können aber dieselbe leicht und mit Vorteil auch mit der allgemeinen Theorie in Verbindung setzen. So wie im Falle der zentrischen Kollineation ebener Systeme die Kollineationsachse und der nach dem Kollineationszentrum gehende Strahl die Doppelstrahlen der projektivischen Büschel entsprechender Strahlen beider Systeme aus einem beliebigen Punkte ihrer Achse sind, so sind hier für den Punkt S_x bez. S_z der Ebene die Normale zur Achse x bez. zur Achse z der eine Doppelstrahl und die Affinitätsachse h_x''' bez. h_z'''' der andere Doppelstrahl der bezüglichen Büschel, d. h. der beiden benachbarten Projektionen eines von S_x bez. S_z ausgehenden Strahlenbüschels in der Ebene; und dieselben sind, da man den einen Doppelstrahl als Normale zur Achse x bez. z kennt, durch zwei entsprechende Paare bestimmt. In der Figur auf S. 319 ist durch S_xA', S_xA'' ein erstes, durch S_xB', S_xB'' ein zweites Strahlenpaar der Büschel gegeben, die die Normale zu x in S_x zum ersten Doppelstrahl haben und als deren andern Doppelstrahl man die Affinitätsachse h_x''' findet; ebenso würde es für den Punkt S_z mit der Normalen zur Achse z als Doppelstrahl und den Paaren S_zA'', S_zA''' und S_zB'', S_zB''' sein. Wären die Spuren s_1, s_2, s_3 der Ebene bekannt, so bildeten bei S_x die Spur s_1 und die Achse x das erste und die Achse x und die Spur s_2 das zweite Paar; wenn man also über der Länge S_xO als Durchmesser einen Hilfskreis beschreibt, so liefert die Verbindungslinie seiner Schnittpunkte mit den Spuren s_1 und s_2 in OZ den Fußpunkt von h_x'''. Ebenso bilden bei S_z die Spur s_2 und die Achse z

das eine und die Achse z und die Spur s_3 das andere Paar und die Sehne zwischen diesen Spuren in dem über OS_z als Durchmesser beschriebenen Hilfskreis schneidet x in demselben Punkte wie $h_z^{'','''}$. Oder da die Konstruktion des zweiten Doppelstrahls aus zwei Paaren und dem ersten Doppelstrahl linear mit dem Lineal allein gemacht werden kann, indem man die beiden vereinigten Büschel durch zwei Parallelen zum ersten Doppelstrahl schneidet und das Perspektivzentrum der darin entstehenden nicht nur projektivischen, sondern perspektivischen (natürlich auch ähnlichen) Reihen als einen Punkt des zweiten Doppelstrahls erkennt, so erhält man z. B. aus den Spuren s_2 und s_3 die Affinitätsachse $h_z^{'','''}$ wie folgt: Man zieht eine zur Achse z normale Gerade und verbindet ihren Schnitt mit z mit S_x, ihren Schnitt mit s_3 mit O, den Schnittpunkt beider Verbindungslinien aber mit S_z.

Hätte man wie in Figur auf S. 319 den Punkt $1^{','}$ der Affinitätsachse $h_x^{','}$ aus den Projektionen $A'B'$, $A''B''$ der Seite AB, so geben diese selbst das eine Paar und die von $1^{','}$ nach C', C'' gehenden Strahlen ein zweites Paar der projektivischen Büschel, sowie die Normale zu x durch $1^{','}$ den einen Doppelstrahl und man erhält wieder die Affinitätsachse als den andern Doppelstrahl — mit dem Zirkel am besten durch einen Hilfskreis, der die Normale zu x in $1^{','}$ berührt; mit dem Lineal durch das Perspektivzentrum der in Parallelen zu dieser Normale aus beiden konzentrischen projektivischen Büscheln entstehenden perspektivisch-ähnlichen Reihen.

Man erhält endlich die **Richtung** dieser Affinitätsachse aus den Horizontal- und Vertikalprojektionen a', b' und a'', b'' von zwei sich schneidenden Geraden a und b als die des zweiten Doppelstrahls in den durch die Normale zu x als ersten Doppelstrahl und die Strahlen a'', b'' mit den Parallelen zu a', b' durch ihren Schnittpunkt, als ihren entsprechenden, gebildeten konzentrischen und projektivischen Büscheln.

Wir haben noch die Geraden zu erwähnen, deren erste und dritte Projektionen sich decken und von denen im allgemeinen zwei in jeder Ebene **E** liegen; sie gehen natürlich durch den Würfelpunkt H_y der Ebene mit drei vereinigten Projektionen. Denkt man sich Grundriß und Kreuzriß des zugehörigen in der Ebene **E** liegenden Strahlenbüschels, so sind

sie die Doppelstrahlen in ihrer vereinigten Projektivität, von der das Projektionssystem der Ebene **E** sofort drei Paare liefert — nämlich a', a''' als erste und dritte Projektion der zweiten Spurparallele von **E**; b', b''' als die der Geraden von H_y nach ihrem Achsenschnitt in z, und c', c''' die der Geraden von H_y nach ihrem Achsenschnitt in x. Da auf jeder Ebene durch einen Würfelpunkt H_y zwei solche Gerade zu erwarten sind — reell und getrennt, zusammenfallend oder nicht reell —, so schließt man, daß ihre Gesamtheit einen Kegel zweiten Grades bildet. Er enthält die Richtungen der Halbierungsachsen $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_y$ sowie der x und z und berührt nach diesen letzten Ebenen von den Stellungen der xy bez. zy; seine Hauptebenen sind parallel xz, bez. $H_{y'}$ und H_y, in deren letzter die zweite Mantellinie die Richtung $\mathfrak{h}$ hat; denn für $\mathfrak{h}_y$ decken sich alle drei Projektionen, für x und z je zwei, in denen die punktförmige letzte enthalten ist, und für $\mathfrak{h}$ fallen Grundriß und Kreuzriß zusammen. Seine Kreisschnitte liegen in den Normalebenen zu $\mathfrak{h}$ bez. $\mathfrak{h}_y$ (vergl. § 11, 6).

Sollen beide Doppelstrahlen zusammenfallen, so kann dies nur in der Normalen zu x für $h_x'^{,\prime\prime}$ und in der Normalen zu z für $h_z''^{,\prime\prime\prime}$ geschehen, d. h. so, daß die Affinitätsachse zwischen den beiden ersten Projektionen die Richtung ihrer Kollineationsstrahlen und die Affinitätsachse zwischen der zweiten und der dritten Projektion die Richtung der Kollineationsstrahlen zwischen diesen enthält (vergl. § 22^b). Wir erhalten also die spezielle Form der Affinität, die als F l ä c h e n g l e i c h h e i t bezeichnet worden ist; im ersten Falle $F' = F''$ oder $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\Delta_1 = \Delta_2$, $\Delta_{12} = 1$, im zweiten $F'' = F'''$ oder $\alpha_2 = \alpha_3$, $\Delta_2 = \Delta_3$, $\Delta_{23} = 1$. Dann bestimmt ein einziges Paar die Projektivität, d. h. durch eine Gerade von gegebenen Projektionen a', a'' oder a'', a''' geht nur e i n e Ebene dieser Art. Nach § 51 sind ihre Spuren s_1, s_2 g l e i c h g e n e i g t und s y m m e t r i s c h zur Achse x, bez. ihre Spuren s_2, s_3 gleichgeneigt und symmetrisch zur Achse z; sie selbst ist normal zur Ebene $\mathbf{H}_x$ bez. $\mathbf{H}_z$. (Vergl. § 51, 12.)

Wenn dagegen die Spuren s_1 und s_2 g l e i c h g e n e i g t zur Achse x sind und wenn sie z u s a m m e n f a l l e n, so ist die Ebene normal zur Halbierungsebene $\mathbf{H}_{x'}$; denn die beiden ersten Projektionen ihrer Normalen aus beliebigen Raumpunkten sind

parallel und aus Punkten von $\mathbf{H}_x$ in Deckung, sodaß diese Normalen in $\mathbf{H}_x$ liegen. Es wird $F' = -F''$, $\Delta_{12} = -1$ und die Affinitätsachse $h_x'{}^{,\prime\prime}$ ist der zur Normalen zu x konjugierte harmonische Strahl in Bezug auf die Linie der Spuren und die Achse x, oder $h_x'{}^{,\prime\prime}$ geht nach der Mitte der Strecke OS_z der Ebene. In der Tat ist durch das Zusammenfallen von s_1' und s_2'' in der Geraden der Spuren und von s_1'' und s_2' in der Achse x das vertauschbare Entsprechen dieser Strahlen und damit nach § 20 die Involution der konzentrischen projektivischen Büschel bedingt. Durch eine gegebene Gerade geht immer auch eine einzige Ebene dieser Art. (Vergl. § 51, 12.) Mit $F' = F''$ folgen die entsprechenden Ecken der beiden ersten Projektionen eines Polygons in gleichem Sinne, mit $F' = -F''$ folgen sie in entgegengesetztem Sinne aufeinander; ebenso für $F'' = \pm F'''$ und die zweite und dritte Projektion.

So liefert uns die Theorie der Charakteristik (§ 19) die Unterscheidung der Flächen nach dem Vorzeichen des Inhaltes als nach dem Sinne, in welchem ihre Umfänge umlaufen werden. Natürlich gilt dies alles auch für $\Delta_{12} = \pm k$ und man erkennt leicht die Regel, daß für Ebenen, deren Spuren mit derselben Seite der zwischenliegenden Projektionsachse spitze Winkel einschließen, die zugehörigen Δ_i von gleichem Zeichen und die Affinität zwischen den zugehörigen Projektionen von positiver Charakteristik sind; und umgekehrt bei der Lage der spitzen Winkel an entgegengesetzten Seiten der Achse. Man schließt also auch umgekehrt aus der Gleichheit und dem Gegensatze des Sinnes der Projektionen derselben ebenen Figur auf die bezügliche Lage ihrer Ebenen. Beispielsweise sind in den Figuren auf S. 312 und S. 313 Ebenen mit $\Delta_{12} = -k_1$ und bez. $\Delta_{12} = +k_2$, in den Figuren auf S. 316 und S. 317 sind gl und bez. $g_1 l_1$ von positivem Δ_{12}, in Figur auf S. 317 die Ebene gl von negativem; in Figur auf S. 319 ist Δ_{12} und in Figur auf S. 320 sind Δ_{12} und Δ_{23} positiv. In den Figuren auf S. 339 sind die Ikosaederflächen 9 11 12 und 9 3 8 bez. von positivem und negativem Δ_{12}, in Figur auf S. 349 ist die Würfelfläche $NTSR$ und in Figur auf S. 345 die Pyramidenfläche MCD von negativem, hier die Pyramidenfläche MEF von positivem Δ_{12}. Für die Bestimmung der Ebene durch ihre Δ_{ik} verweisen wir auf die Beispiele.

Wir lenken unter den Beispielen die Aufmerksamkeit auf die Darstellung des durch fünf Punkte, oder was dem äquivalent ist, bestimmten Kegelschnittes mittelst zweier Orthogonalprojektionen. Für die Parallelprojektionen der Kegelschnitte entspringen aus dem Zusammenhalt von § 22[a] über die unendlich ferne Lage der Gegenachsen mit § 32 über die Involutionseigenschaften die Sätze: Die Parallelprojektion des Mittelpunktes eines Kegelschnittes ist der Mittelpunkt seiner Projektion (§ 33, 19); die Projektion seiner Durchmesserinvolution ist die Durchmesserinvolution seiner Projektion, insbesondere sind auch die Projektionen seiner Asymptoten die Asymptoten seiner bez. Projektionen. Die Projektionen seiner Achsen, Brennpunkte und Direktrixen sind aber nicht die Achsen, etc. seiner Projektionen (vergl. § 33, 6 und § 36). Doch ist analog § 36, 21 f. die Projektion des Kegelschnittes aus den gleichnamigen Projektionen von Brennpunkt und zugehöriger Direktrix nebst einem Peripherieelement leicht abzuleiten. (17.) Die Parallelprojektionen von Kreisen und gleichseitigen Hyperbeln sind Ellipsen und ungleichseitige Hyperbeln; etc.; alle Parallelprojektionen eines Kegelschnittes sind von gleicher Art mit ihm selbst, d. h. sie sind Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln mit ihm selbst. Für die Darstellung ist in diesem Betracht auf § 33 zu verweisen.

B. 1) Man bestimme aus den Affinitätsachsen einer Ebene die Spuren derselben mittelst ihrer in den Projektionsachsen gelegenen Projektionen.

2) Man konstruiere den Durchschnittspunkt D einer Geraden g mit der durch ihre Affinitätsachsen $h_{x'}^{\prime,\prime\prime}$, $h_{z'}^{\prime\prime,\prime\prime\prime}$ bestimmten Ebene.

3) Ebenso die Durchschnittslinie von zwei Ebenen, welche durch ihre bez. Affinitätsachsen bestimmt sind; und den Schnittpunkt von drei Ebenen aus den Affinitätsachsen.

4) Man konstruiere die Transversale der Geraden g und l aus dem Punkte A oder in gegebener Richtung h mit Benutzung der Affinitätsachsen der Ebenen A, g und A, l. (Vergl. § 8, 8.)

5) Man verzeichne die Durchschnittslinie einer durch ihre Affinitätsachsen bestimmten Ebene mit der Ebene eines gegebenen Dreiecks ABC.

6) Zeichne ein Büschel von Ebenen mit gemeinsamer Affinitätsachse $h_{x'}^{\prime,\prime\prime}$.

7) Wenn die Affinitätsachse $h_{x'}^{\prime,\prime\prime}$ normal zur Achse OX ist,

so sind die erste und zweite Spur einer zugehörigen Ebene entsprechende Strahlen einer symmetrischen Involution, welche die Geraden $h_x'{}''$ und x zu ihren orthogonalen Doppelstrahlen und die zu x unter 45^0 geneigten zu ihren Rechtwinkelstrahlen hat. Man erläutere die Relation der beiden ersten Projektionen ihrer Flächen für jene Doppelstrahlen als Spuren.

8) Können alle drei Projektionen eines ebenen Systems gleich sein und wie liegen solche Ebenen oder wie groß sind ihre α_i?

9) Wenn die Affinitätsachse $h_x'{}''$ einer Ebene unendlich fern ist, so ist diese Ebene der Achse OX parallel und gegen die erste und zweite Projektionsebene gleich geneigt; die erste und zweite Projektion ihres ebenen Systems sind kongruent in perspektivischer Lage.

10) Man zeichne in gegebener Ebene durch einen Punkt diejenigen geraden Linien, deren beide Vertikalprojektionen rechtwinklig zueinander sind, oder mit der Achse z komplementäre Winkel machen. Man bestimmt die Affinitätsachse $h_z''{}'''$ und ihre Schnitte mit dem Kreis, der die Gerade $P''P_zP'''$ zum Durchmesser hat. Die Konstruktion ist für einen beliebigen Winkel der Projektionen übertragbar.

Diese Geraden sind nicht immer reell, den Grenzfall bildet eine einzige Gerade, der Berührung der Affinitätsachse mit jenem Kreis entsprechend.

Man bilde in der Ebene zweier Geraden Parallelogramme mit zwei rechteckigen Projektionen.

11) Welche Ebenen werden durch das Zusammenfallen der Affinitätsachsen $h_x'{}''$, $h_z''{}'''$ charakterisiert? Die zu y parallelen.

12) Man charakterisiere die durch die Halbierungsachse $\mathfrak{h}_y$ gehenden und die zu ihr normalen Ebenen; ebenso für $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_x$, $\mathfrak{h}_z$.

13) Man zeichne die beiden ersten Projektionen eines Kreises bei gegebenem Durchmesser AB unter der Bedingung, daß ihre Flächen direkt oder entgegengesetzt gleich sind.

14) Von einem Kegelschnitt K sind drei Punkte T_1, T_2 und die Tangenten T_1T, T_2T in zweien derselben durch ihre Projektionen T_1', T_1''; T_2', T_2''; T', T'' und ein Peripheriepunkt A durch seine erste Projektion A' bestimmt; man verzeichne die beiden ersten Projektionen, die Kegelschnitte K', K''.

Man erhält die Vertikalprojektion von A aus der Bedingung, daß die Geraden AT_1 und TT_2 einander schneiden, weil sich aus dem Grundriß des Schnittpunktes sein Aufriß in $T''T_2''$ und damit der Aufriß von T_1A ergibt, in dem A'' vertikal über A' liegt. Weil projektivische Relationen durch Projektion mittelst gerader Strahlen aus einem Punkte auf eine Ebene nicht gestört werden, so erhält man den Aufriß K'' des Kegelschnittes als das Erzeugnis der projektivischen Strahlenbüschel mit den Scheiteln T_1'', T_2'', dem perspektivischen Zentrum T'' und dem Strahlenpaar $T_1''A''$, $T_2''A''$ wie in § 18 (die Gerade $T''T_1''$ ist o_1'' und p_2'', die Geraden

$T_1''T''$ und $T_2''T''$ sind p_1'', o_2''; $T_1''A''$ und $T_2''A''$ aber etwa a_1'', a_2'') und es kann die Konstruktion nach dem Pascalschen Satze an Stelle dessen gesetzt werden wie in § 27, 4. Ebenso erhält man K' als Erzeugnis der projektivischen Strahlenbüschel um T_1', T_2' mit dem perspektivischen Zentrum T' und dem Paare T'_1A', $T_2'A'$.

Man kann beide Konstruktionen als unabhängig voneinander behandeln und erhält dann Punkte des Aufrisses und Punkte des Grundrisses von K, die nicht einerlei Punkten von K und daher auch nicht einander entsprechen. Will man, daß dieses der Fall sei, so führt man beide Konstruktionen miteinander im Zusammenhang durch, wie es am einfachsten durch die Bemerkung geschieht, daß beide Projektionen desselben Strahlenbüschels zueinander perspektivische Strahlenbüschel sind mit der zugehörigen Affinitätsachse, hier $h_x'{}_{'}''$ als Perspektivachse. Man wählt also nach Bestimmung der Affinitätsachse im Büschel T_1 einen Strahl b_1, wobei sich aus seinem Grundriß der Aufriß durch den Schnitt mit der Affinitätsachse bestimmt, und konstruiert zu b_1'' mittelst T'' den Aufriß b_2'' und zu b_1' mittelst T' den Grundriß b_2' des entsprechenden Strahles, welche sich wieder in der Affinitätsachse begegnen müssen; beide liefern Grundriß und Aufriß eines neuen Kegelschnittpunktes B mit der bezüglichen Genauigkeitsprobe, etc.

Man kann ebenso nach § 32, 17 die Involutionskonstruktionen benutzen.

15) Man ermittle für den Kegelschnitt des vorigen Beispiels die beiden Punkte von zusammenfallendem Grund- und Aufriß, d. h. die in der Affinitätsachse $h_x'{}_{'}''$ liegenden gemeinschaftlichen Punkte seiner beiden Projektionen K' und K'' oder die Projektionen seiner Schnittpunkte mit der Ebene $\mathbf{H}_{x'}$.

Nach dem Vorigen bestimmen die erzeugenden projektivischen Büschel von K' und K'' auf der Affinitätsachse $h_x'{}_{'}''$ dieselben vereinigten projektivischen Reihen; die Doppelpunkte dieser Reihen sind die Projektionen der gesuchten Punkte. Dieselben sind durch die gegebenen Elemente bestimmt und sind im Falle ihrer Realität offenbar diejenigen Punkte von K', K'', deren Bestimmung die größten Vorteile darbietet.

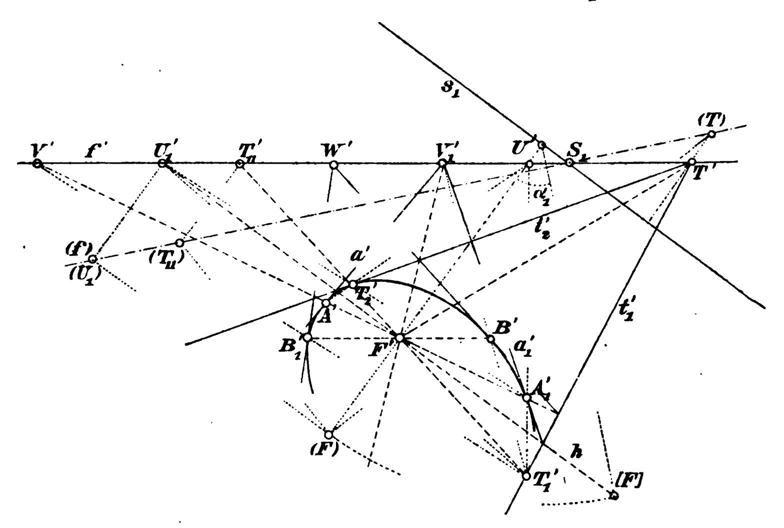
Wir wissen, daß sie auch als Doppelpunkte der Polinvolution von K' oder K'' in der Affinitätsachse erhalten werden.

Ebenso durch die gegebenen Elemente (fünf Punkte, etc.) bestimmt sind die Asymptotenrichtungen und die Asymptoten von K' und K''; konstruiert man nach § 29, 8 die Asymptoten von K' und ebenso die von K'', so müssen sich dieselben als die ersten Projektionen der einen und der andern Asymptote von K in der Affinitätsachse begegnen. Wir erkennen darin die Regel wieder, daß beide Orthogonalprojektionen eines Kegelschnittes Kegelschnitte von derselben Art sind, die aus der Wahrheit folgt, daß j e d e Parallelprojektion eines Kegelschnittes mit i h m von der nämlichen Art ist.

16) Auch die Schnittpunkte der Projektionen des Kegelschnittes mit der zwischenliegenden Projektionsachse und demnach die Schnittpunkte desselben mit den Spuren seiner Ebene erhält man als die Doppelpunkte der bezüglichen vereinigten projektivischen Reihen, eventuell der Polinvolution der betreffenden Projektion in ihr. Sie geben für undurchsichtig gedachte Projektionsebenen die Endpunkte der sichtbaren Teile der Projektionen.

17) Für s_1 als erste Spur seiner Ebene, F' und f' als erste Projektionen von Brennpunkt und zugehöriger Direktrix, sowie die Höhe von F über der ersten Projektionsebene und die Projektion T_1' eines Peripheriepunktes erhält man die erste Projektion des Kegelschnittes wie in nachstehender Figur.

Man bestimmt auf der Normale von F' zu s_1 oder der Fall-



linie der Ebene mittelst der Hilfsumklappung $[F]$ die Umlegung (F) mit der Ebene des Kegelschnittes in die erste Projektionsebene und damit die Umlegung $(F)(U_1)$ der ersten Spurparallele durch F', also auch die Umlegung (f) der Direktrix und das Paar der Involution in f' in der Falllinie und der Spurparallele aus F, nämlich U' und U_1'. Dabei geht natürlich der Kreis über der Strecke $(U)(U_1)$ als Durchmesser durch (F). Das Peripherieelement T_1' liefert nun auf dem Strahl nach F' in f' einen Punkt T_{11}', dem in der Umlegung (T_{11}) entspricht, und der aus einem Punkte von (f) durch (F) beschriebene Kreis gibt den zugehörigen Punkt (T) der Involution in (f), der also in T' projiziert ist; damit ist $T'T_1'$ die Tangente t_1' des Kegelschnittbildes, und der vierte harmonische Strahl zu ihr in Bezug auf die Geraden $T'F'$ und f' ist die Tangente t_2' in dem Punkte T_2', wo er $T_1'F'$ schneidet. Das Paar U', U_1' hat mit T_1', T_2' das neue Paar von Punkten des Kegel-

schnittes A', A_1' und durch die Polaren aus F' die zugehörigen Tangenten a', a_1' geliefert; die Sehne $A'A_1'$ und diese Tangenten bestimmen in f' ein neues Paar V', V_1' der Polinvolution, das ein neues Paar von Kegelschnittpunkten B', B_1' mit ihren Tangenten b', b_1' (Schnittpunkt W') gibt, etc. (§ 36, 16.)

18) Für zwei Ebenen von gleichen und entgegengesetzten Werten des Δ_{12} erhält man durch Betrachtung der Dreiecke, welche die Schnittpunkte S_1, S_2 ihrer gleichnamigen Spuren mit ihren Achsenschnittpunkten bilden, also $S_1 S_2 S_x$ mit den Projektionen $S_1 S_2' S_x$, $S_1'' S_2 S_x$, und $S_1 S_2 S_x^*$ mit den Projektionen $S_1 S_2' S_x^*$, $S_1'' S_2 S_x^*$ den Satz, daß sie durch die projizierenden Ebenen ihrer Durchschnittslinie harmonisch getrennt sind. Darin liegt das bequeme Mittel zur Bestimmung der zweiten aus der ersten bei gegebener Durchschnittslinie in dieser.

Denn man hat in leicht zu bildender Figur

$$\Delta_{12} : \Delta_{12}^* = -1 = \frac{\Delta S_1 S_2' S_x}{\Delta S_1'' S_2 S_x} : \frac{\Delta S_1 S_2' S_x^*}{\Delta S_1'' S_2 S_x^*} = \frac{S_2' S_x}{S_1'' S_x} : \frac{S_2' S_x^*}{S_1'' S_x^*}.$$

Die Konstruktion in § 51, 12 zeigt einen Spezialfall der Relation.

19) Nach dem vorigen bilden auch die Affinitätsachsen $h_x^{\prime,\prime\prime}$ solcher Ebenenpaare mit den beiden ersten Projektionen ihrer Schnittlinie ein harmonisches Büschel; ebenso die $h_z^{\prime\prime,\prime\prime\prime}$ mit der zweiten und dritten Projektion der Schnittlinie.

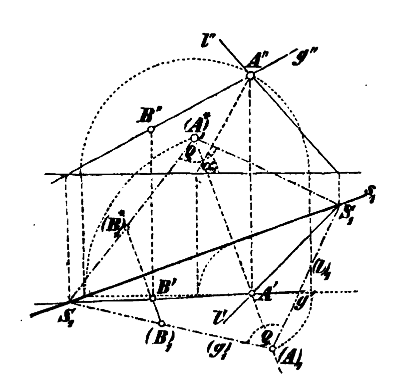
20) Auch die Bestimmung der Spuren derjenigen Ebene, die durch eine Gerade geht und für welche Δ_{12} einen gegebenen Wert $\pm k$ hat, liegt nahe. Aber sie wird am besten auf den Satz gegründet: Das Verhältnis Δ_{12} für die beiden ersten Projektionen einer beliebigen Ebene **E** ist der reziproke Wert desselben Verhältnisses für die Projektionen ihrer durch die Achse x gehenden Normalebene **N**. Man beweist denselben durch Betrachtung des Spurendreiecks XYZ der Ebene **E** und der in X auf ihr errichteten Normale n, die durch ihren dritten Durchstoßpunkt die dritte Spur der Normalebene **N** bestimmt. Sind nämlich die Achsenabschnitte von **E** auf x, y, z bez. a, b, c, und sind b^*, c^* die in y durch den Grundriß n' und in z durch den Aufriß n'' der Normale abgeschnittenen Stücke, so hat man wegen $bb^* = cc^* = a^2$

$$\Delta_{12}^E = \frac{\triangle X'Y'Z'}{\triangle X''Y''Z''} = \frac{b}{c} = \frac{c^*}{b^*} = 1 : \Delta_{12}^N.$$

Analog für die übrigen Paare der Projektionen. Man sieht, daß nach diesem Satze alle Ebenen des Raumes in Bezug auf die Verhältnisse der Orthogonalprojektionen ihrer Flächen in die Bündel der Normalebenen zu den Ebenen des Büschels aus der zwischenliegenden Projektionsachse geordnet werden. Eines der Δ_{ik} bestimmt daher die Ebene **E** unter den Ebenen eines Büschels; zwei der Δ_{ik} bestimmen sie unter den Ebenen eines Bündels — nämlich als normal zu einer bestimmten vom Achsenschnittpunkt O ausgehenden Geraden. Eine Menge von neuen Aufgaben lassen sich daran anschließen.

54. Der von zwei geraden Linien g, l in derselben Ebene eingeschlossene Winkel φ wird durch Umlegen mit seiner Ebene in eine der Projektionsebenen oder in eine zu einer solchen parallele Ebene, also durch Drehung um die betreffende Spur s_i oder um eine Parallele s_i^* zu derselben, und um die Größe des entsprechenden Neigungswinkels α_i oder seines Supplements bestimmt. Die untenstehende Figur zeigt die Ausführung für die Spur s_1 mit α_1 und $(180 - \alpha_1)$.

Durch dieselbe Operation erhält man die wahre Gestalt und Größe jeder durch Projektionen bestimmten ebenen Figur. (Vergl. § 9 und § 11.) Die Punkte der Drehungsachse bleiben dabei an ihrem Orte, und dieselbe ist daher die Achse derjenigen Affinität in perspektivischer Lage, in welcher auch nach der Umlegung noch (§ 19, 12) das Original des ebenen Systems und seine Projektion zueinander stehen. Weil bei der Umlegung die Punkte des Systems Kreise in den durch sie gehenden Normalebenen zur Drehungsachse aus den betreffenden Punkten der Achse als Mittelpunkten beschreiben, so sind die Zentralstrahlen der fraglichen Affinität zur Drehungsachse normal und die wahren Abstände der Punkte des Systems von der Drehungsachse bestimmen ihre Umlegung. (Vergl. Figur S. 332.) Bei der Umlegung eines ebenen Systems kann daher aus der Umlegung eines Punktes — wo möglich des von der Drehungsachse entferntesten Punktes — die aller andern Punkte des Systems durch die Benutzung der Eigenschaften perspektivisch affiner Systeme (§ 22, a.) abgeleitet werden. (Vergl. § 53.)



Wenn umgekehrt ein ebenes System in seiner Umlegung in eine Projektionsebene — oder eine bestimmte zu einer solchen parallele Ebene — gegeben ist, und die Drehungsachse s_i (oder die betreffende Spurparallele der Ebene), so wie der Winkel α_i unter welchem es gegen jene geneigt ist, bekannt sind, so können seine Projektionen verzeichnet werden (vergl. Figur auf

S. 330, die Punkte A und B); die Angabe des Winkels α_i kann dabei durch die Projektion eines in der Umlegung bekannten, möglichst weit von der Drehungsachse entfernten, Punktes ersetzt werden. Die Umlegungen der Punkte und Geraden des Systems sind durch Einschluß ihrer Zeichen in Klammer unter Beifügung des die Projektionsebene und den Winkel α_i bezeichnenden Index unterschieden worden.

In der Regel erfordert die Lösung der konstruktiven Probleme die sukzessive Anwendung beider Übergänge — so unten in 10), 13), 14), etc. Die damit zu lösenden Aufgaben sind sehr zahlreich; wir bezeichnen die wichtigsten Gruppen derselben durch Beispiele.

B. 1) Man bestimme den von den Geraden $h_{x'}$, $h_{z'}$ einer Ebene eingeschlossenen Winkel.

2) Man konstruiere den Neigungswinkel einer Geraden g gegen eine Ebene **S** — als Komplement des Winkels von g mit der von einem seiner Punkte auf **S** gefällten Normale n.

3) Man bestimme den Neigungswinkel von zwei Ebenen **S**, **S*** — als den Winkel der von einem beliebigen Punkte A auf sie gefällten Normalen n, n^*. Anderseits durch die Umlegung des Dreiecks, welches von einer Spur der Normalebene zur Scheitelkante mit den Schnittlinien derselben in beiden Ebenen gebildet wird, in die gleichnamige Projektionsebene und mittelst der zur besagten Spur gehörigen Höhe. (Vergl. § 54*, Figur S. 341 rechts.)

4) Insbesondere für den Winkel von zwei Ebenen mit sich deckenden oder zur Achse x orthogonal symmetrischen ersten und zweiten Spuren. Die ersten Ebenen sind zu $\mathbf{H}_{x'}$, die zweiten zu $\mathbf{H}_x$ normal; man wählt also den Punkt A in dieser Ebene bez. (§ 47, 10.)

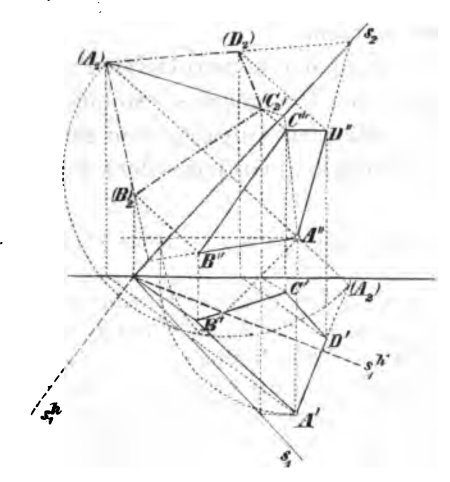
Welches ist die Relation solcher Ebenen, die normal zueinander sind?

5) Man denke zwei zur Ebene $\mathbf{H}_x$ normale Ebenen und die zwei zur Ebene $\mathbf{H}_{x'}$ normalen Ebenen mit denselben horizontalen oder vertikalen Spuren. Der Winkel der ersten ist dem Winkel der letzten gleich.

6) Für ein ebenes System ist die erste Projektion aller Punkte und dazu die zweite Projektion von drei bestimmten Punkten desselben gegeben; man soll dasselbe bestimmen — durch Umlegung in eine zur ersten Projektionsebene parallele Ebene; insbesondere das System der Geraden h_i der Ebene.

7) Wenn man die Umlegungen $(A)_i$, $(B)_i$, ... der Punkte eines ebenen Systems in eine Projektionsebene oder eine ihr parallele Ebene mit den Punkten A, B, ... des Systems selbst durch gerade Linien verbindet, so bilden die Geraden $A(A)_i$, $B(B)_i$, ... ein

Bündel von Parallelen, normal zu derjenigen Ebene, welche den Neigungswinkel α_i der Ebene des Systems gegen die bezügliche Projektionsebene halbiert. (Vergl. § 14, 6.) Man kann dies einerseits zur Vermittelung des Übergangs von der Projektion des Systems zur Umlegung oder umgekehrt verwenden; man kann anderseits durch die Umlegungen $(A)_i$, $(A)_i^*$ eines Punktes die beiden Halbierungsebenen der Winkel α_i und $180^0 - \alpha_i$ als normal zu jenen Parallelenbündeln bestimmen. In nebenstehender Figur ist dies für die beiden ersten Projektionen und den Winkel α_2 durchgeführt; s_1^h und s_1^{h*} sind die ersten Spuren der beiden Halbierungsebenen.



8) Von einem ebenen System sind die Umlegung $(A)_1$, etc. und die Projektionen A', A'' eines seiner Punkte gegeben; man soll es projizieren. Die Verwendung der Affinität genügt.

9) Man bestimme die Richtung der parallelen Lichtstrahlen, für welche der Schlagschatten einer gegebenen Figur (in einer Ebene) auf eine Projektionsebene ihr selbst kongruent wird.

10) Man verzeichne die Projektionen des Kreises, welcher durch drei gegebene Punkte A, B, C geht.

a) Man legt das Dreieck ABC um, bestimmt in der Umlegung den ihm umgeschriebenen Kreis K und verzeichnet seine Projektionen; dieselben sind Ellipsen. Je zwei rechtwinklige Durchmesser des Kreises liefern durch ihre Projektionen ein Paar konjugierte Durchmesser dieser Ellipsen — man wählt vor allem den zur Drehungsachse parallelen und den zu ihr normalen Durchmesser, weil sie die Achsen der Ellipse in der gleichnamigen Projektion liefern. Aus solchen zwei Durchmessern konstruiert man die Ellipse nach § 33, 10f., oder man bestimmt weitere Punkte und Tangenten der Projektionen durch die bekannten Punkte und Tangenten des Kreises in der Umlegung, etwa unter Benutzung der Relationen der perspektivisch affinen Systeme und der achsialen Symmetrie der Ellipse (§ 22, a.).

b) Man bestimmt die Projektionen des Mittelpunkts M des Kreises ABC als des Durchschnittspunktes der Normalebenen zu den Seiten durch ihre Mitten mit seiner Ebene, vollzieht dann die Umlegung in die Parallelebene zu einer Projektionsebene durch diesen Mittelpunkt, d. h. macht den zu dieser Projektionsebene

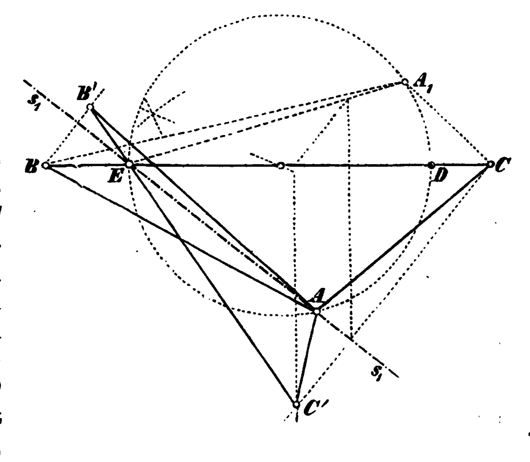
parallelen Durchmesser zur Drehungsachse; verfährt aber übrigens wie bei a), aber mit 33, 15).

Die Projektion eines Kreises aus Ebene, Mittelpunkt und Halbmesser ist hieran zu knüpfen, also z. B. auch die des Schnittkreises einer Ebene mit einer Kugel von gegebenem Mittelpunkt oder Halbmesser. Hierzu legt man etwa durch den Mittelpunkt der Kugel die Normalebene zur ersten Spur der Ebene und legt mit derselben in die horizontale Projektionsebene oder besser in ihre durch den Kugelmittelpunkt gehende Parallelebene den zugehörigen Kugelkreis und die Schnittlinie mit der gegebenen Ebene um, wodurch man den Mittelpunkt des Querschnittkreises und den in der Falllinie der Ebene liegenden Durchmesser desselben in Projektion und in wahrer Größe erhält, und somit seine Projektionen aus den Achsen und aus zwei konjugierten Durchmessern bez. zeichnet.

Man bestimme insbesondere die Projektionen der Schnittkreise einer Kugel M, r mit den Halbierungsebenen $\mathbf{H}_x$, $\mathbf{H}_{x'}$ bez. $\mathbf{H}_z$, $\mathbf{H}_{z'}$ oder im Falle ihrer Berührung mit einer von beiden ihren Schnitt mit der andern.

Man zeige, daß im Fall der Berührung mit $\mathbf{H}_x$ und $\mathbf{H}_{x'}$, die Umrisse in der ersten und zweiten Projektion Orthogonalkreise sind.

11) Man projiziere ein Dreieck ABC orthogonal so, daß sein Bild einem gegebenem Dreiecke ähnlich werde — mittelst der Bemerkung über die Rechtwinkligkeit der Doppelstrahlen der projektivischen Büschel aus Punkten der Affinitätsachse zwischen Umlegung und Projektion. Man trage an ABC (nebenstehende Figur) etwa in A_1BC ein dem gegebenen ähnliches Dreieck an und lege den Kreis aus einem Punkte von BC durch die Punkte A, A_1, welcher die erste Gerade in D und E durchschneide. Ist dann $\angle AED > \angle A_1ED$,



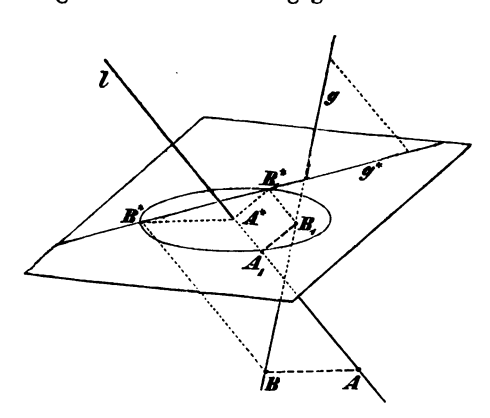
so kann AE die Affinitätsachse s_1 und AD die Richtung der entsprechenden parallelen Projektionsstrahlen bezeichnen. Sodann ist das Verhältnis $\tan AED : \tan A_1ED$ das Verjüngungsverhältnis und bestimmt also den Winkel α_1.

12) Die eine Orthogonalprojektion eines Kreises ist durch zwei konjugierte Durchmesser z. B. $A''B''$, $C''D''$ bestimmt und die Lage des Mittelpunktes M überdies durch die zugehörige Koordinate

desselben festgesetzt; man soll die Ebene des Kreises bestimmen. Man erhält sie aus der einen Projektion eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks AMC und beiden Projektionen seiner Rechtwinkelecke M nach dem Verfahren der vorhergehenden Aufgabe. Man kann sie auch durch Übergang zu den Achsen der elliptischen Projektion ohne direkte Benutzung derselben ableiten.

13) Man konstruiere eine Gerade l durch den gegebenen Punkt A, welche die Gerade g so schneidet, daß von A bis zum Schnittpunkt B eine gegebene Länge oder daß der Winkel (g, l) von einer gegebenen Größe sei — durch Umlegung der Ebene A, g.

14) Man bestimme denjenigen Punkt B der Geraden l, der von der Geraden g die vorgeschriebene Entfernung e hat — oder allgemeiner die einer gegebenen Ebene **S** parallele Transversale t zweier gegebenen Geraden g und l, welche die Länge e hat. Man verzeichnet (nebenstehende Figur) dazu den Schnittpunkt A^* von l mit **S** und die Schnittlinie g^* der durch g gehenden Parallelebene zu l mit **S**, markiert in g^* die Punkte B^*, B_1^* in der Distanz e von A^* und führt durch sie die Parallelen B^*B, $B_1^*B_1$ zu l bis g. Dann sind BA parallel B^*A^* und B_1A_1 parallel $B_1^*A^*$ die gesuchten Geraden.



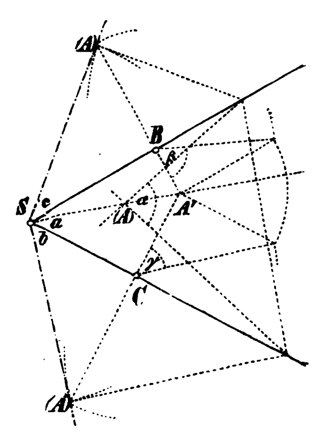
15) Man bestimme die kürzeste der Ebene **S** parallele Transversale t der Geraden g und l — natürlich durch den Fußpunkt des Perpendikels von A^* auf g^*.

16) Man soll durch einen Punkt A eine Gerade d so ziehen, daß sie eine Gerade g schneidet und mit der Ebene **S** einen vorgeschriebenen Winkel β macht — insbesondere auch, wenn g in **S** liegt oder wenn **S** bez. g spezielle Lagen gegen das Projektionssystem haben. Man benutzt den Kreis K der Durchschnittspunkte aller gegen **S** unter β geneigten Geraden durch A (§ 1) — natürlich in der Umlegung.

17) Man lege durch die Gerade g eine Ebene so, daß sie mit der gegebenen Ebene **S** einen Winkel von vorgeschriebener Größe α bildet; insbesondere für spezielle Lagen der Geraden g oder der Ebene **S** oder beider gegen das Projektionssystem. Man benutzt den Kreis K der Durchschnittslinien aller gegen **S** unter α geneigten Ebenen durch einen Punkt A (§ 2; vergl. § 10, 16) der Geraden g.

18) Man lege durch eine Gerade g eine Ebene, die mit der festen Geraden l den Winkel β bildet — mittelst der Normalebene von l und dem Komplement von β.

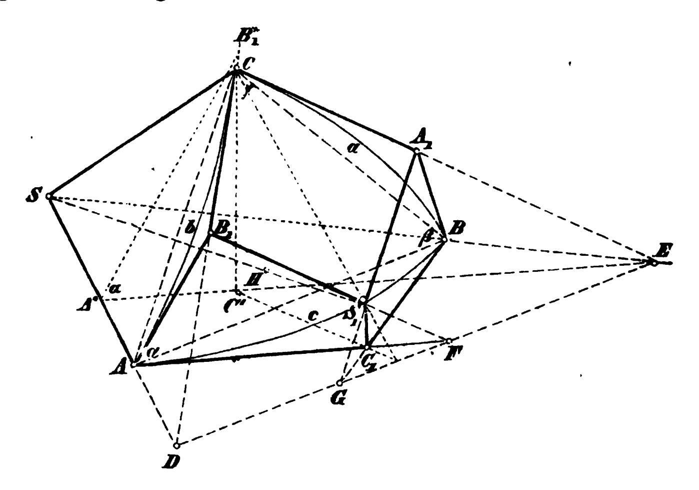
19) Man konstruiere und projiziere die dreiseitige Ecke $S.ABC$ aus den drei Kantenwinkeln a, b, c, d. i. bestimme ihre Flächenwinkel α, β, γ und ihre Projektionen, indem man die eine Fläche der Ecke mit der ersten Projektionsebene zusammenlegt und die eine ihrer Kanten zur zweiten Projektionsebene normal macht. Ohne Zuziehung der zweiten Projektion ist die Bestimmung der Flächenwinkel aus den Kantenwinkeln in nebenstehender Figur mit a in der Ebene xy gegeben; die nötigen Ergänzungen sind einzufügen, etwa für SB als normal zur Achse x. Man hat von einem Punkte A der nicht in xy liegenden Kante die Normalebenen zu den drei Kanten gelegt und die Dreiseite dargestellt, welche dieselben mit den Flächen der Ecke erzeugen. Wenn man das Dreieck mit α nach rechts statt nach links umlegt, so gibt die Figur durch Ausschneiden zugleich das Netz und Modell der Konstruktion. Jedoch kommt die von den Ebenen von α, β, γ gebildete Polarecke dabei nicht zur vollen Anschauung.



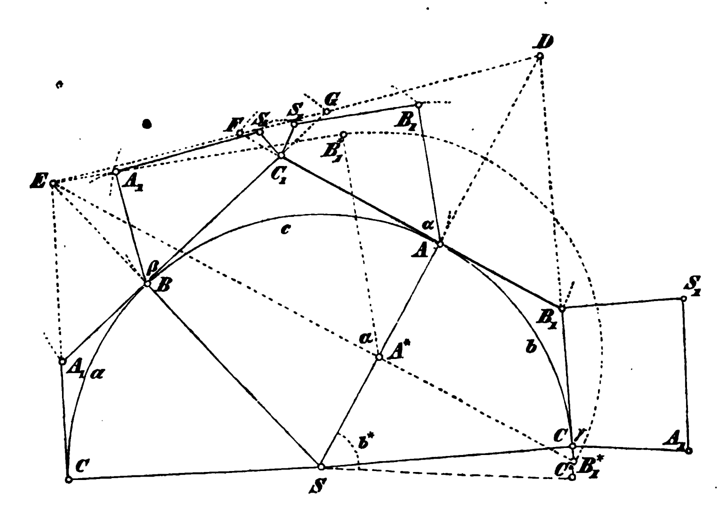
20) Die vorige Konstruktionsfigur erscheint als unsymmetrische Degeneration der allgemeineren, bei welcher (obere Figur S. 336) die Polarecke mit dem Scheitel S_1 aus den Tangentialebenen der Kugel aus S in den Austrittspunkten A, B, C der drei Kanten oder in den Ecken des zugehörigen sphärischen Dreiecks gebildet wird. (Im vorigen Falle liegt S_1 in A; hier ist C' der Fußpunkt der von C auf die Ebene von c gefällten Normale.) Sind A_1, B_1, C_1 die Durchschnittspunkte der Ebenen BSC, CSA, ASB bez. mit den Paaren der Tangentialebenen in B und C, C und A, A und B, so wird die Ecke $SABC$ begrenzt durch die gleichschenkligen Vierecke mit je zwei rechten Winkeln bei A, B; B, C; C, A — also durch $ASBC_1$, $BSCA_1$, $CSAB_1$, und die Polarecke durch die Vierecke mit je zwei rechten Winkeln bez. bei A_1, B_1; B_1, C_1; C_1, A_1 — also durch $A_1S_1B_1C$, $B_1S_1C_1A$, $C_1S_1A_1B$ mit gleichen Diagonalen (als Kugeltangenten aus S_1) S_1C, S_1A, S_1B. Die ersten enthalten die Kantenwinkel c, a, b; die letzten die Flächenwinkel γ, α, β. Man gelangt von jenen zu diesen in ebener Konstruktion durch die Betrachtung der Schnittlinie einer Fläche der ursprünglichen Ecke mit der nicht anstoßenden Fläche der Polarecke, also z. B. der Schnittlinie DE der Ebenen von c und γ.

Die Schnittpunkte D, E, F, G der vier Seiten CB_1, CA_1, S_1B_1

und $S_1 A_1$ mit der Ebene von c d. h. mit den Geraden SA, SB, $C_1 A$, $C_1 B$ bez. sind vier Punkte jener Schnittlinie. Sind a, b, c gegeben und legt man sie und ihre Kreisvierecke in die Ebene



von c nieder (untenstehende Figur), so erhält man zuerst D und E, sodann auf DE die Punkte F und G und aus diesen die Kreisvierecke $AB_1 S_1 C_1$, $BC_1 S_1 A_1$, indem man bemerkt, daß B_1 und A_1 in den über den Durchmessern AF und BG bez. beschriebenen



Halbkreisen in den aus den Kreisvierecken von b und a bekannten Entfernungen von A und B liegen. Das dritte Kreisviereck $CA_1 S_1 B_1$ ist nun vollständig bekannt.

Man könnte zur Konstruktion auch die Bemerkung benutzen,

daß die Länge $S_1 A = S_1 B = S_1 C$ als zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmbar ist, dessen erste Kathete $SA = SB = SC$ und dessen zur Hypotenuse gehörige Höhe der Halbmesser des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises ist.

Da die Dreiecke BC_1S_1, AC_1S_1; CA_1S_1, BA_1S_1; AB_1S_1, CB_1S_1 paarweis kongruent sind, und also bei B, A; C, B; A, C gleiche Winkel x, y, z haben, so ist

$$\alpha = y + z, \quad \beta = z + x, \quad \gamma = x + y$$

und für $\alpha + \beta + \gamma = 2(x + y + z) = 2\sigma$

$$\alpha = \sigma - x, \quad \beta = \sigma - y, \quad \gamma = \sigma - z.$$

In Figur S. 336 oben ist der Mittelpunkt dieses Kreises oder der gemeinsame Höhenfußpunkt H der Dreiecke SS_1A, SS_1B, SS_1C angegeben. Die Figur S. 336 unten, enthält nur die erste Methode. Man mache die Vertifikation jener Länge nach der angegebenen Relation. Wenn man die Figur S. 336 unten, nach dem Umriß $SCA_1S_1B_1$ $AB_1S_1C_1S_1A_1BA_1CS$ ausschneidet, so hat man zugleich das Netz und bildet daraus das Modell der Konstruktionsfigur, indem man die im Innern ausgezogenen Linien zum Umlegen ritzt.

Eine naheliegende Anwendung ist es, zu zwei windschiefen Geraden diejenigen Geraden zu konstruieren, welche sie unter gegebenen Winkeln a, b schneiden.

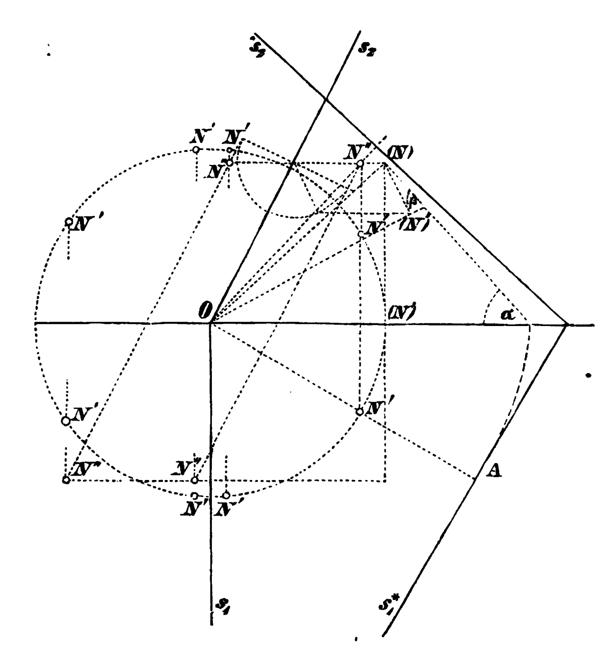
21) Bestimme die fehlenden Stücke einer dreiseitigen Ecke aus den Kantenwinkeln a, c und dem eingeschlossenen Flächenwinkel β. Im Falle der Auflösung nach Figur auf S. 335 findet man aus a, c, β zuerst E und G, damit EG und also D — woraus durch die zweite Tangente an den Kreis aus S durch CBA die zweite Umlegung von C also b — und F — woraus sodann α.

22) Ebenso aus den Kantenwinkeln a, c und dem nicht eingeschlossenen Flächenwinkel α; man diskutiere die mögliche Zweideutigkeit der Lösung. Im Falle der Figur auf S. 335 denke man das Dreieck PAB_1, welches α enthält, parallel sich selbst so verschoben, daß F nach E, damit B_1 und A nach B_1^* und A^* bez. fallen. Da man nun aus a, c die Vierecke SCA_1B, SBC_1A, also zunächst E und mittelst $EA^* \perp SA$ und α das rechtwinklige Dreieck $EA^*B_1^*$, sodann durch Verlängerung von EA^* über A^* um $A^*B_1^*$ einen Punkt in der Tangente erhält, welche in C an den Kreis aus S geht, so findet man C (zwei Lagen, welche beide zulässig sind, wenn $a < c$ ist), also b; von da aus D und damit die vollständige Konstruktionsfigur wie vorher. Man füge die zweite Bestimmung von $b(b^*)$, die Konstruktion von D und die der entsprechenden Kreisvierecke $BC_1S_1A_1$ und $CA_1S_1B_1$ hinzu, welche die Figur auf S. 336 nicht enthält. Die zentralprojektivische Darstellung von Ecke $S.ABC$ — etwa aus SA, der Ebene ASB und den Größen der Kantenwinkel — mit der aus SA, SB, SC entstehenden Polarecke und dem sphärischen Dreieck ABC ist zu empfehlen.

23) Man bestimme zwei Ebenen aus einem Paar gleichnamiger Spuren derselben und den Winkeln, welche diese mit ihrer Durchschnittslinie bilden.

24) Man konstruiere die dreiseitige Ecke aus ihren Flächenwinkeln, z. B. bestimme eine Ebene aus einem Punkte P in ihr, ihrem Winkel α gegen die erste Projektionsebene und dem Winkel β, den sie mit einer zweiten projizierenden Ebene einschließt — ohne Zuhilfenahme der Polarecke (untenstehende Figur).

Sei **S*** die gesuchte Ebene mit den Spuren s_1^* und s_2^*, O der Achsenschnittpunkt der gegebenen projizierenden Ebene und

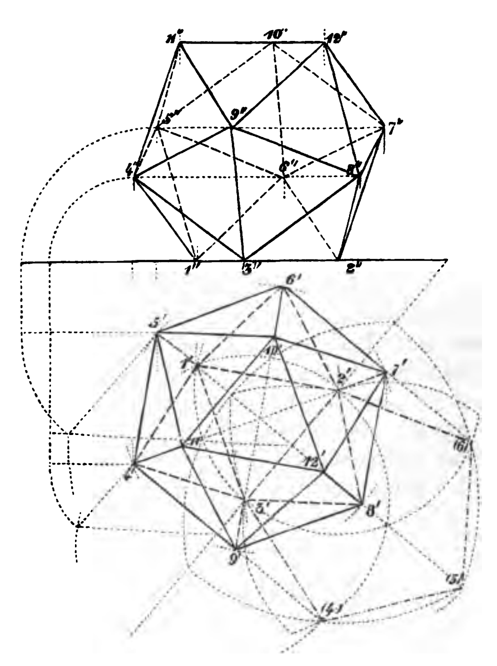


ON die von ihm auf **S*** gefällte Normale mit dem Fußpunkt N, so legen wir durch ON die Normalebene zu s_1^*, welche s_1^* in A schneide, und haben in ONA ein bei N rechtwinkliges Dreieck, welches bei A den Winkel α enthält und dessen Höhe NN' die Koordinate z des Punktes N gibt, während ON' die Entfernung seiner ersten Projektion von O ist. Denken wir dann durch ON die Normalebene zur gegebenen zweiten projizierenden Ebene, welche die Schnittlinie von dieser mit der gesuchten Ebene in B schneidet, so ist $\triangle\, ONB$ bei N rechtwinklig und enthält bei B den Winkel β. Seine Höhe aus N ist der Abstand des Punktes N von dieser projizierenden Ebene und vollendet damit die Bestimmung von N. Die Normalebene zu ON durch P ist die gesuchte Ebene. Man diskutiere die Zulässigkeit der verschiedenen Lösungen.

25) Man lege durch den Punkt P die Ebenen, welche gegebene Winkel α_1, α_2 oder α_2, α_3 besitzen — dreiseitige Ecke aus den Flächenwinkeln z. B. α_1, α_2, 90^0. (Vergl. § 51.)

26) Man projiziere ein reguläres Dodekaeder mit einer zur ersten Projektionsebene parallelen Fläche aus einer gegebenen Kante AB in dieser mit Benutzung der Regelmäßigkeit seiner dreiseitigen Ecken und deduziere die Symmetrieverhältnisse seiner Projektionen.

Wäre $ABCDE$ diese Fläche und sind F, G, H, J, K die ihr nächsten und L, M, N, O, P die dann folgenden, endlich $QRSTU$ die von ihr entferntesten Ecken, d. h. die Ecken der zu ihr parallelen Gegenfläche, sodaß $ABGMF$, $BCHNG$, $CDJOH$, $DEKPJ$, $EAFLK$ die an der zuerst genannten anliegenden Flächen sind, etc., so lehrt die Symmetrie, daß $ABCDE$ und $QRSTU$ in der Folge $QARBSCTDUE$ in der ersten Projektion die Ecken eines regulären Zehnecks sind; und ebenso $FMGNHOJPKL$ die eines konzentrischen und parallelen von größerem Radius. Denkt man die in AF zusammenstoßenden regulären Fünfecke $ABGMF$, $EAFLK$ um AB bez. AE so in die Ebene $ABCDE$ niedergelegt, daß sie mit ihrem Fünfeck zur Deckung gelangen, so fällt die Ecke F das erstemal auf E und das zweitemal auf B und die erste Projektion von F ist somit der Schnittpunkt der von B und E auf AE und AB bez. gefällten Perpendikel. Offenbar entnimmt man daraus sofort auch die Höhe von F und somit die ihr gleichen Höhen von G, H, J, K und weiter ebenso die von L, M, N, O, P über der Ebene $ABCDE$; endlich erhält man durch Symmetrie die von $QRSTU$, womit die Projektionen des Dodekaeders bestimmt sind.



Für jede andere Lage des Körpers können, wie wir in § 59 noch zeigen wollen, die Projektionen aus den so erhaltenen Daten abgeleitet werden. Man erläutere ihre Symmetrieverhältnisse.

Man stelle ebenso die andern regulären Körper dar, insbesondere das Ikosaeder. Die obenstehende Figur gibt es in der Lage, in

welcher zwei seiner Flächen parallel xoy sind; es ist aus der dreiseitigen Ecke an einer derselben 123, 23456, 126 konstruiert. Die Figur enthält die Zirkelkonstruktion des reguläron Fünfecks aus seiner Seite.

In Anwendung des Prinzips von vorher liegt die Horizontalprojektion der Ecke 4 sowohl in dem Perpendikel von 2′ auf 3′1′ aus der Umklappung des Dreiecks 341, als auch in dem Perpendikel (4)4′ auf 2′3′ aus der Umklappung des regulären Fünfecks 23456. Man erhält also 5′ und die Höhen von 4, 6, 8 bez. 5, 7, 9 über der Ebene 123, endlich durch Symmetrie 10, 11, 12 und ihre Höhe. Die Gruppen der Projektionen 1, 10, 2, 12, 3, 11 und 5, 6, 7, 8, 9, 4 auf 123 bilden konzentrische und parallele reguläre Sechsecke.

Man führe die Anwendung desselben Prinzips am regulären Oktaeder durch; für eine andere Anwendung desselben sehe man § 58, 10.

27) Die regulären Polyeder sollen in den reziproken Paaren dargestellt werden, in denen das eine einer Kugel eingeschrieben und das andere ihr nach den Ecken des ersten umgeschrieben ist; also mit dem Hexaeder das Oktaeder, mit dem Dodekaeder das Ikosaeder und mit dem Tetraeder das reziproke Tetraeder.

28) Man projiziere einen Würfel so, daß die Verbindungslinie zweier Gegenecken parallel zur Achse OZ sei. (Vergl. den Würfel in der Durchdringung der Figur auf S. 349.)

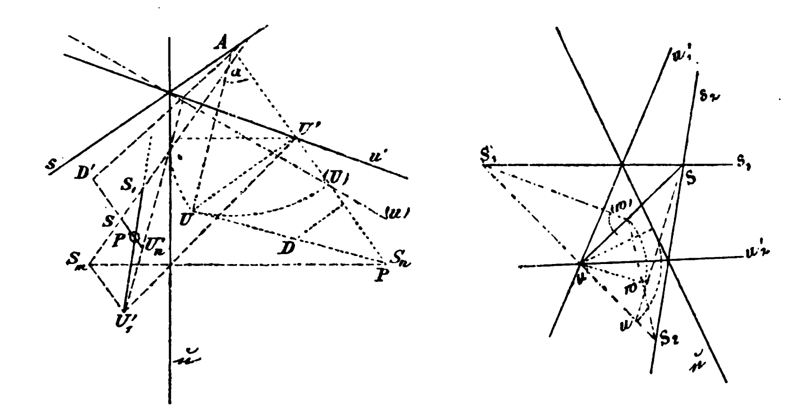
29) Man projiziere eine sechsseitige Pyramide aus der Grundfläche in gegebener Ebene, den Winkeln, welche die von einer bestimmten Ecke derselben nach der Spitze gehende Kante mit den benachbarten Grundflächenkanten einschließt, sowie der Länge dieser Kante; ebenso ein Parallelepiped durch die Längen und Winkel der in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten bei Parallelismus einer Fläche mit XOY und gegebener Richtung einer ihrer Kanten.

30) Ein Objekt ist in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bestimmt durch die Koordinaten seiner Punkte; die Koordinatenachsen sind durch ihre Durchstoßpunkte in der Projektionsebene fixiert. Man soll die Projektionen ausführen. (Vergl. Figur auf S. 303, § 47, 1.) Die Höhen des Spurendreiecks der Achsen sind die gleichnamigen Projektionen derselben; die ihnen zukommenden Verkürzungen und die zugehörige projizierende Linie des Anfangspunktes sind damit bestimmt. (B. 2) dort, $O_1S_z : NS_z$; $O_2S_x : NS_x$; etc. und $NO_1 = NO_2$.)

54*. Es wird am Platze sein, hier eine kurze Betrachtung der **Orthogonalprojektion mit einer Fixebene U im Endlichen** rücksichtlich der praktischen Ausbildung ihrer Elemente einzuschalten, und zweckmäßig, uns dabei auf die beiden Fälle zu beschränken, wo U **unter 45° geneigt ist zur Tafel S**, und **wo es zu derselben parallel** ist in der

Entfernung d. Da aber offenbar für d als die Distanz einer Zentralprojektion mit derselben Bildebene im letzterwähnten Falle die Elemente U', u' von Geraden und Ebenen mit den R'' und r'' derselben im Sinne der §§ 3 und 6 identisch sind, so mag der knappe Raum dem ersten Falle gewidmet sein. Es sei u in der folgenden Figur links die Spur von U und diese Ebene steige auf der Seite des Buchstabens unter 45° Tafelneigung gegen den Beschauer auf.

Ist dann durch die in u sich schneidenden Geraden s, u' eine E b e n e bestimmt, so wird ihre U m l e g u n g in die T a f e l durch Ermittelung von (u) erhalten: Man fällt von einem Punkte U' in u' das Perpendikel zu s und bildet aus dessen Länge $U'A$ als erster und dem Abstand des U' von u als



zweiter Kathete das rechtwinklige Dreieck mit dem Neigungswinkel α der Ebene zur Tafel als $\angle UAU'$ und der Hypotenuse AU; diese ist der Drehungsradius des Punktes U bei der Umlegung, durch den man also (U) und damit (u), die Umlegung zu u', erhält. Für jede auf der Ebene su' gelegene durch ihre Projektion bestimmte Figur ist damit die Ermittelung der wahren Gestalt gesichert. Errichtet man in U auf AU die Normale und markiert ihren Schnitt S_n in AU', so ist offenbar zugleich $U'S_n$ die in U a u f d e r E b e n e e r r i c h t e t e N o r m a l e. Aus derselben bestimmt sich jede andere Normale der Ebene su', z. B. die vom Punkte P in S_1U' ausgehende, durch die Bemerkung, daß je zwei Normalen derselben Ebene parallel sind und also in einer Ebene liegen; zieht man also $U'U_1'$

und durch S_n die mit ihr in $\mathfrak{u}$ zusammentreffende Gerade, so ist die Parallele zu $U'S_n$ durch U_1' bis zu dieser in S_{1n} die durch U_1 gehende Normale und die Parallele durch P' zu ihr, zwischen den in $\mathfrak{u}$ sich schneidenden Geraden $S_1 S_{1n}$ und durch U_1', oder die Gerade SU_n' ist die gewünschte Normale. Die Figur auf S. 341 enthält noch ihren Schnittpunkt D' mit der betrachteten Ebene su' (mittelst der Schnittlinie von s, u' und der Ebene durch $S_1 U_1'$ und die Normale) und die Bestimmung der wahren Länge $p = S_n D$ von PD als in einer zu $S_n U'$ parallelen Geraden.

Wären ferner zwei Ebenen durch ihre Bestimmungslinien s_1, u_1' und s_2, u_2' (Figur rechts auf S. 341) gegeben, sodaß die Verbindungslinien von s_1, s_2 oder S mit u_1', u_2' oder U' ihre Durchschnittslinie ist, so erhält man ihren Neigungswinkel φ in wahrer Größe durch die Umklappung ihrer Schnittlinien mit einer zu dieser normalen Ebene; nimmt man die in U' auf $U'S$ errichtete Senkrechte als Spur mit den Schnitten S_1, S_2 in s_1 und s_2, so gibt die zur Hypotenuse gehörige Höhe im rechtwinkligen Dreieck $SU'U$ den Drehungsradius seines Scheitels W und damit den gesuchten Winkel $S_1(W)S_2$.

Denkt man das Fünfeck $ABCDE$ in der Tafel als Basis einer Pyramide von der Spitze M in der Geraden SU', so erhält man die Projektion des Querschnittes derselben mit der Ebene su' als die für M' als Zentrum und s als Achse der Kollineation zu $ABCDE$ als Original entsprechende Figur $A'B'C'D'E'$, mit der Spur der durch M zu su' gelegten Parallelebene als Gegenachse r im System der Basis. Die Elementaraufgabe der Bestimmung der Parallelen durch einen Punkt zu einer Ebene löst man aber z. B. durch die Bestimmung des Punktes U_1', der zu der Parallelen durch den Punkt zur Geraden s der Ebene gehört: Man zieht durch S parallel zu s bis $\mathfrak{u}$, von da nach U' bis zur Parallele durch M' zu s; der Schnittpunkt ist U_1'. Nun gibt die Parallele zu u' durch U_1' die Linie u_1' und die durch ihren Schnitt mit $\mathfrak{u}$ gehende Parallele zu s die Spur s_1 der gesuchten Parallelebene — im vorbesprochenem Falle die Gegenachse r der Kollineation. Fügt man die Umlegung (M) von M mit der Ebene Mr hinzu, so erhält man die wahre Gestalt des Querschnittes ebenso aus s, r und (M) als Kollinearfigur zu $ABCDE$. (Man kann hierzu die Figur auf S. 345 vergleichen.)

Wir erörtern noch einige Beispiele, deren Durchführung darnach leicht fallen wird.

B. 1) Man bestimme die Normalebene durch einen Punkt A zu einer ihn enthaltenden Geraden SU' — mittelst der Umlegung der projizierenden Ebene der Geraden durch die in ihr liegenden Punkte U_n und S_n der Normalebene, wo der letztere die zu SU' normale Spur s_n und dadurch mit dem ersten auch die Gerade u_n' bestimmt.

2) Man projiziere und bestimme die kürzeste Entfernung von zwei Geraden $S_1 U_1'$ und $S_2 U_2'$, die nicht in einer Ebene liegen. Man legt die zur zweiten parallelen Ebene durch die erste und bringt die zu derselben normalen Ebenen durch beide Geraden zum Schnitt; bestimmt endlich das zwischen den Schnittpunkten mit beiden Geraden liegende Stück ihrer Schnittlinie.

3) Man projiziere einen geraden Kreiskegel aus dem Bilde seiner Spitze M und des Basismittelpunktes C in der Achse SU', wenn man den Radius r der Basis kennt. Man hat in der Normalebene durch C zu SU' den Kreis vom Mittelpunkt C und dem Radius r zu zeichnen und wird das durch Angabe seines der Tafel parallelen, unverkürzt erscheinenden Durchmessers als der großen Achse und des nach $\cos\alpha$ verkürzten Durchmessers in der Falllinie der Ebene als der kleinen Achse seines Bildes tun.

4) Es sind die Geraden zu bestimmen, welche in einer gegebenen Ebene und von zwei festen Punkten in vorgeschriebenen Entfernungen liegen. Man hat offenbar die gemeinsamen Tangenten der Querschnittkreise der Ebene mit den um jene Punkte mit den zugehörigen Distanzen zu beschreibenden Kugeln zu zeichnen, und vollzieht dies zunächst in der Umlegung, nachdem man durch die Normalen der Ebene aus den Fixpunkten ihre Mittelpunkte erhalten und umgelegt hat.

5) Eine dreiseitige Ecke ist durch die Kante a bez. ihr S_a und U_a', das Bild des Scheitels O' in ihrem Bilde und die Durchstoßpunkte S_b und S_c der beiden andern Kanten gegeben. Wenn A_1', B_1', C_1' die Bilder von drei Punkten dieser Kanten sind, so ist das Dreieck $A_1'B_1'C_1'$ die Abstumpfung der Ecke mit der Ebene I desselben; man denke drei solche Ebenen, also durch A_2', B_2', C_2' bestimmt die Ebene II, und durch A_3', B_3', C_3' die Ebene III und stelle die entspringende Abstumpfungsfigur der Ecke dar. Man erhält zwei wesentlich verschiedene Fälle, je nachdem die Folge der Punkte mit den Indizes 1, 2, 3 auf den drei Kanten zyklisch ist oder nicht; also für die Folgen $A_1 A_2 A_3 O$, $B_2 B_3 B_1 O$ und $C_3 C_1 C_2 O$ bez. z. B. $A_1 A_2 A_3 O$, $B_3 B_2 B_1 O$, $C_1 C_3 C_2 O$; nämlich im ersten Falle drei viereckige Abstumpfungsflächen, im zweiten eine drei-, eine vier- und eine fünfseitige Fläche. Die Tafel II enthält links die Darstellung dieser beiden Fälle in Grundriß und Aufriß mit Bezeichnung der Punkte durch Ziffern allein; sie gibt dazu

einen dritten Fall mit zwei Dreiecken und einem Fünfeck als Abstumpfungsflächen. (Man vergl. die Beschreibung der Tafel im Register.)

6) Wenn einer der Punkte A_i etc. in seiner Kante unendlich fern ist, so sagt man von der zugehörigen Ebene, daß sie diese Kante abstumpfe. Der erste unter den beiden Fällen in 5) mit A_1, B_2 und C_3 als unendlich fern gibt die symmetrische Abstumpfung der Ecke, mit drei Parallelstreifen mit drei Ecken im Endlichen; der zweite mit A_1, B_3, C_1 als unendlich fern zeigt ein Dreieck im Endlichen, etc.

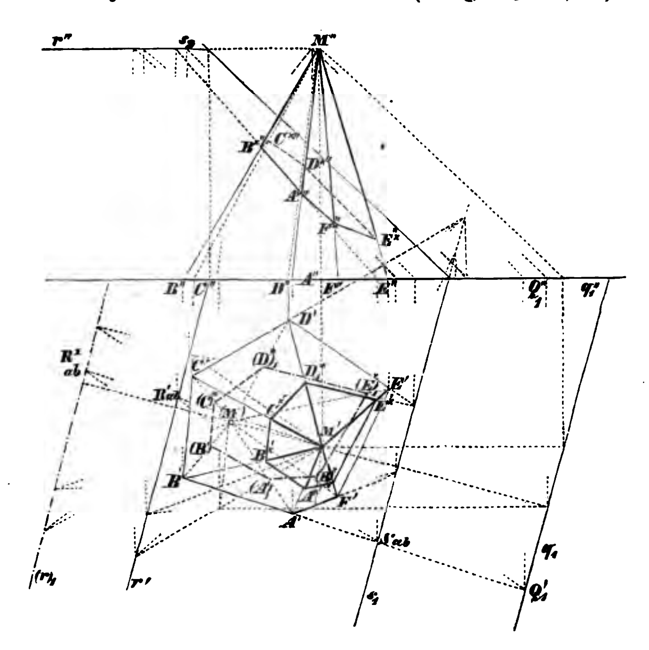
7) Wenn die Fixebene **U** parallel zur Tafel und in der Entfernung Eins von derselben gelegen ist, so geben die Punkte S und U' einer Geraden zugleich ihren Gefällemaßstab und ebenso die Graden s, u' (die dann parallel sind) den für eine Ebene; so ergeben sich die Konstruktionen der kotierten Darstellung. Wir empfehlen die Übertragung von Figur rechts auf S. 341 für die Konstruktion des Neigungswinkels zweier Ebenen und die Ausführung der Bestimmung der Entfernung eines Punktes von einer Ebene.

55. Die zahlreichen vorher besprochenen Elementaraufgaben könnten leicht noch vermehrt werden; wir empfehlen hier die Vergleichung der §§ 1—11, von deren Aufgaben eine ziemliche Anzahl hier nicht wiederholt ist, schon um deswillen, damit man bei ihrer Lösung in der Form der Orthogonalprojektion sich durch den Vergleich mit der zentralprojektivischen Lösung zur möglichsten Sparsamkeit im Verbrauch von Hilfslinien anleiten lasse. Die zur Lösung führenden geometrischen Anschauungen und Sätze bleiben im allgemeinen dieselben und dem vorigen Paragraphen kann man entnehmen, inwieweit bei orthogonaler Parallelprojektion mit einem Bilde sich dieselbe Einfachheit gewinnen läßt, wie in der Zentralprojektion. Für die folgenden Erörterungen über die Polyeder ist umgekehrt die Heranziehung dieser beiden Darstellungsformen zu empfehlen.

Wenn ein Polyeder durch seine beiden orthogonalen Parallelprojektionen gegeben ist, so konstruiert man seine Schnittfigur mit einer gleichfalls bestimmten Ebene im allgemeinen durch die Folge der Schnittlinien seiner Flächen mit derselben — in der Weise, daß jede dieser Schnittlinien die nächstfolgende als diejenige bestimmt, mit welcher sie in einer Kante ihrer Fläche zusammentrifft, natürlich innerhalb der Endpunkte dieser Kante. Man benutzt hierbei die Spuren der

Polyederflächen im allgemeinen nicht, sondern bedient sich des Verfahrens von § 52, welches für begrenzte Ebenen vorzugsweise geeignet ist.

Für die Ausführung denken wir das Polyeder als undurchsichtig und unterscheiden an demselben die sichtbaren von den unsichtbaren Kanten als mit ausgezogenen und mit punktierten Projektionen dargestellt, indem wir festsetzen, die Sichtbarkeit werde in jeder Projektion für ein Auge beurteilt, das sich in der Richtung und auf der positiven Seite der zu ihrer Ebene normalen Projektionsachse befindet. (Vergl. § 43, 2.) Jede



Seite der Schnittfigur ist unsichtbar, von der ein Endpunkt oder beide Endpunkte einer unsichtbaren Kante des Polyeders angehören.

Das häufige Vorkommen von Pyramiden und Prismen als selbständige Formen, sowie als Teilformen von zusammengesetzteren Polyedern macht es wertvoll, die speziellere Behandlung der ebenen Schnitte derselben zu erörtern. Wir denken die polygonale Basis einer Pyramide $ABC\ldots$ in einer Ebene **S**, speziell der ersten Projektionsebene, und die Spitze M derselben gegeben, dazu die Schnittebene **E**. Dann ist die Schnittfigur

$A^*B^*C^*\ldots$ derselben mit dem Mantel der Pyramide anzusehen als die Zentralprojektion der Grundfläche $ABC\ldots$ aus dem Zentrum M auf die Ebene E, oder umgekehrt diese als Bild von jener, und kann also — da die Parallelprojektionen zentrisch kollinearer ebener Systeme selbst zentrisch kollineare Figuren sind — als die zentrisch kollineare Figur zu jener konstruiert werden mit Benutzung der Kollineationsachse und der Gegenachse des Systems.

Denken wir die Ebene der Basis als erste Projektionsebene (Figur auf S. 345), so ist die zentrisch kollineare Beziehung der Basis als Bild zur Schnittfigur als Original auch in der ersten Projektion erfüllt, für die erste Projektion M' des Zentrums M als Zentrum, für die erste Spur s_1 der Ebene E als Achse der Kollineation und für die erste Spur der durch M gehenden Parallelebene zur Schnittebene als Gegenachse q_1. Daraus ergibt sich bekanntlich die Gegenachse r' (vergl. § 19, 1 etc.), welche auch die erste Projektion der Schnittlinie der Ebene E mit der durch M gehenden Parallelebene zur Basisebene XOY ist. Man erhält dann die erste Projektion der Schnittkante A^*B^*, indem man den Schnittpunkt S_{ab} von $A'B'$ und s_1 mit dem Schnittpunkt R'_{ab} der aus M' gezogenen Parallelen zu $A'B'$ in r' verbindet und diese Gerade in $M'A'$ und $M'B'$ begrenzt; auf der ihr parallelen durch M' liegt auch Q_1', der Schnittpunkt von $A'B'$ mit q_1. Man fügt die zweite Projektion hinzu, indem man die zweiten Projektionen der R in r'' und die der S auf der Achse OX verbindet und bemerkt, daß die zweiten Projektionen der Punkte Q_1 in derselben Achse mit M'' Parallelen zu $A^{*''}B^{*''}\ldots$ bestimmen.

Man konstruiert auch die wahre Gestalt der Schnittfigur $A^*B^*C^*\ldots$ direkt aus ihrer zentrischen Kollineation zu $ABC\ldots$ als die Umlegung derselben in die erste Projektionsebene (Figur auf S. 345); die zentrische Kollineation zwischen $(A^*)(B^*)(C^*)\ldots$ und $A'B'C'\ldots$ hat die Spur s_1 zur Kollineationsachse, die Umlegung (M) von M mit der zu E parallelen Ebene Mq_1 zum Kollineationszentrum und die Umlegung $(r)_1$ von r mit der Ebene E zur Gegenachse, indeß die Gegenachse q_1 ungeändert bleibt. Offenbar gilt das alles auch von Kegelflächen und ihren ebenen Schnitten. (Vergl. § 11, 6 und die eingehende Untersuchung in Bd. II, §§ 4—7.)

Auf diese Konstruktionen gehen somit alle die in der Theorie der zentrisch kollinearen ebenen Systeme entwickelten Hilfsmittel über.

B. 1) Man untersuche, inwieweit sich die Hilfsmittel der zentrischen Kollineation auf eine Pyramide mit schräger Basisebene **E** mit Vorteil anwenden lassen.

2) Man bestimme den Parallelogrammschnitt des Mantels einer vierseitigen Pyramide (Spitze S, Basisecken A, B, C, D), dessen Ebene einen gegebenen Punkt P enthält. Für E, F, als die äußeren Diagonalpunkte des Vierecks $ABCD$ bez. AB, CD; BC, AD; ist diese Ebene die durch P gehende Parallelebene zu der Ebene, welche die Gerade EF, mit S verbindet. Denken wir P in B, so gibt in jeder Projektion die Parallele durch B zu EF, die Kollineationsachse s zu jener als Gegenachsen r in der zentrischen Kollineation mit der Projektion von S als Zentrum, in der der Projektion des Vierecks $ABCD$ die Projektion des bezüglichen Parallelogrammschnittes entspricht. (Vergl. § 8, 13.)

Was liefern die beiden andern Diagonalen FG, GE des vollständigen Vierecks $ABCD$?

Wie liegen die Parallelogrammschnitte einer dreiseitigen Pyramide? (Vergl. § 8, 12.)

3) Man benutze die Hilfsmittel der Kollineation für die Darstellung des Schnittes, den ein reguläres Dodekaeder mit einer Ebene erzeugt, indem man die fünfseitigen regulären Pyramiden vorstellt, welche von den an eine nicht geschnittene Fläche desselben angrenzenden Flächen des Dodekaeders gebildet werden.

4) Man erörtere die Identität dieser Methode mit der der direkten Konstruktion der Schnittlinien der Pyramidenflächen mit der Schnittebene.

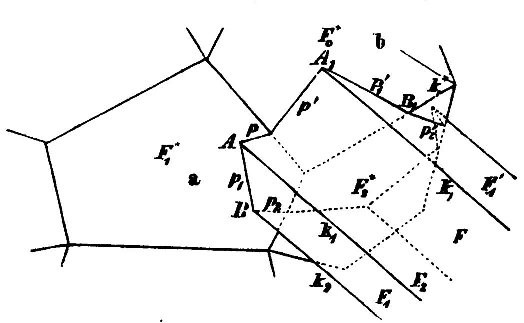
5) Man erläutere die Modifikationen, welche diese Methode für die Bestimmung der Projektionen und der wahren Gestalt des ebenen Schnittes der Prismen bedarf. An Stelle der Kollineation tritt die Affinität.

6) Man bestimme den Normalschnitt und das Netz — d. i. die möglichst zusammenhängende Ausbreitung seiner Flächen in einer Ebene — für ein schräges fünfseitiges Prisma mit einer zur ersten Projektionsebene parallelen Grundfläche.

56. Zwei Polyeder erzeugen miteinander als ihre Durchdringung ein nicht ebenes oder windschiefes Vieleck, dessen Seiten die Durchschnittslinien der Flächen des einen Polyeders mit den Flächen des andern innerhalb ihrer Begrenzungen sind, während es die Durchschnittspunkte der Kanten des einen mit den Flächen des andern zu seinen Ecken hat.

Die Durchdringungsfigur kann jedoch auch in mehrere voneinander getrennte windschiefe Vielecke zerfallen, so bei Eulerschen Polyedern in zwei, die man dann als Eintritts- und Austrittsfigur unterscheiden kann.

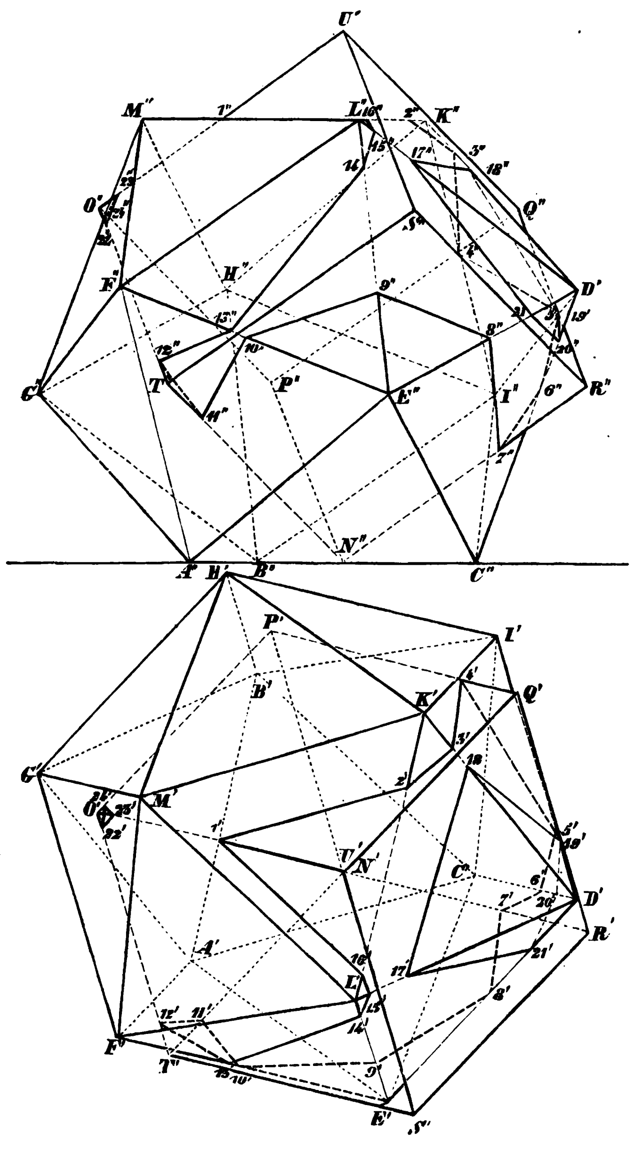
Für die Konstruktion derselben benutzt man offenbar ihre Ecken und Seiten mit gleichem Erfolg, natürlich in dem für begrenzte Figuren entwickelten Verfahren des § 52. Nehmen wir an, es sei (nachstehende Figur) als Seite des Durchdringungspolygons die Gerade p_1 durch den Schnitt der Flächen F_1 und $F_1{}^*$ oder $p_1{}'$ durch den Schnitt von $F_1{}'$, $F_1{}^*$ der beiden Polyeder gefunden worden, so liegen ihren beiden Endpunkte A und B bez. A_1 und B_1 entweder a) beide in Kanten k_1, k_2 der einen Fläche, sagen wir F_1, oder es liegt b) der eine A_1 in einer Kante $k_1{}'$ von $F_1{}'$ und der andere B_1 in einer Kante $k_1{}^*$ von $F_0{}^*$. Dann stößt im ersten Falle in A die Durchschnittslinie p der längs k_1 an F_1 benachbarten Fläche F mit $F_1{}^*$, in B die Durchschnittslinie p der längs k_1 an F_1 benachbarten Fläche F_2 mit $F_1{}^*$ an. Im zweiten Falle dagegen schließt sich in A_1 die Durchschnittslinie p' der an $F_1{}'$ in $k_1{}'$ benachbarten Fläche F mit der Ebene $F_0{}^*$ und in B_1 die Durchschnittslinie $p_2{}'$ der an $F_0{}^*$ in $k_1{}^*$ benachbarten Fläche $F_2{}^*$ mit $F_1{}'$ an.



Geht man von einer bereits ermittelten Seite des Durchdringungspolygons aus nach diesem Gesetze weiter, so erhält man ohne erfolglose Versuche die ganze Eindringung, bez. die Eintrittsfigur der Durchdringung. Im letzten Falle hat man für die Austrittsfigur nach der gleichen Methode vorzugehen.

Die Sichtbarkeit des Durchdringungspolygons bestimmt nach dem vorigen Paragraphen das Gesetz: Jede Seite desselben ist unsichtbar, von der ein Endpunkt in einer unsichtbaren Kante oder Fläche des einen oder andern Polyeders liegt.

Die nachstehende Figur zeigt die Durchdringung eines regulären Ikosaeders $AB \ldots LM$ mit zwei horizontalen Flächen mit

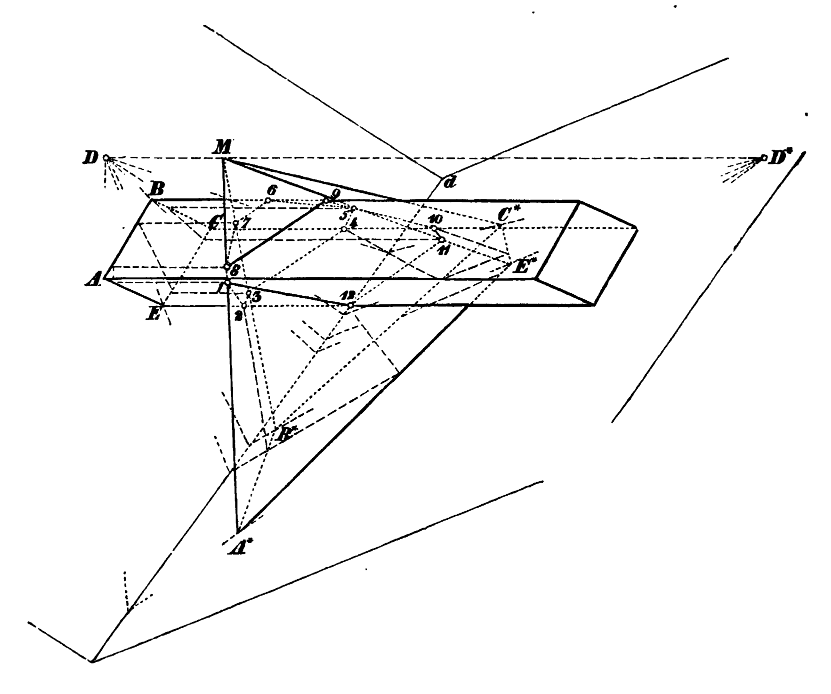


einem Würfel $N \ldots U$ von vertikaler Diagonale, deren unterer Endpunkt N in einer jener Flächen ABC liegt. Das Durchdringungspolygon zerfällt in drei Teile: Das windschiefe Poly-

gon 1, 2, ... 16, das ebene Fünfeck 17, .. 21 und das Dreieck 22, 23, 24. Die Konstruktion beginnt zweckmäßig mit den Punkten 1, 2, 16 der oberen Ikosaederfläche.

Die folgenden zwei Beispiele vertreten eine große Mannigfaltigkeit von Durchführungen.

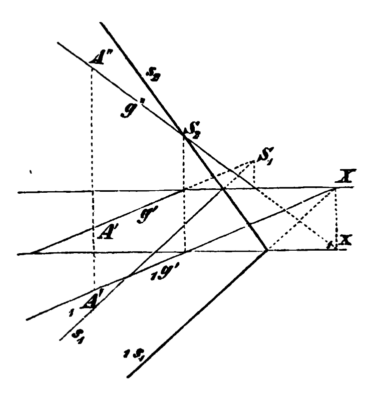
B. 1) Man konstruiere die Durchdringung eines regulären Ikosaeders mit einem vierseitigen Prisma und bilde die Netze der Körper mit Eintragung der Durchdringung.



2) Man konstruiere die Durchdringung einer sechsseitigen Pyramide mit einem schrägen Parallelepiped und bilde ihre Netze — indem man Ebenen parallel den Kanten des Prismas durch die Scheitelkanten der Pyramide und Ebenen durch die Prismenkanten aus der Spitze der Pyramide benutzt. Welche Vorteile bringt es mit sich, daß diese Ebenen ein Büschel bilden? Die vorstehende Figur erläutert sie an dem Beispiel der vierseitigen Pyramide und des Parallelepipeds. Das Zwölfeck 1, 2, ... 12 ist die Eindringungsfigur.

3) Wie modifiziert sich die Regel des Textes da, wo zwei Kanten beider Körper einander innerhalb ihrer Begrenzungen schneiden?

57. Die Einfachheit und Genauigkeit einer konstruktiven Lösung hängt oft ab von der Lage des projizierten Objekts gegen die Projektionsebenen, und die Überführung in eine andere Lage kann daher von Vorteil sein für die Konstruktion. In manchen Fällen ist es notwendig, Elemente der Darstellung, welche über die Grenzen des Zeichenblattes hinausgefallen sind, in dasselbe zurückzuführen, um die Ausführbarkeit zu sichern; schleifende Schnitte, Darstellungen von zu geringer Breite, etc. zu vermeiden, ist oft sehr wünschenswert. Deshalb bilden die Transformationen ein wichtiges Mittelglied zwischen der Theorie und der Praxis der darstellenden Geometrie. (Vergl. § 12.) Sie sind, wenn man an der Orthogonalität der Parallelprojektionen festhält, entweder Verschiebungen und Drehungen der Projektionsebenen — diese letzten notwendig in Paaren, damit ihre Rechtwinkligkeit untereinander nicht alteriert werde — oder Verschiebungen und Drehungen der darzustellenden Objekte. Verschiebungen bez. Drehungen der Projektionsebenen sind Verschiebungen oder Drehungen der Objekte äquivalent, wenn sie sich nur durch ihren Sinn unterscheiden, während ihre Größen und die Achsen, nach welchen oder um welche sie erfolgen, dieselben sind. Die Parallelverschiebung einer Projektionsebene oder die des Objekts nach den zugehörigen projizierenden Linien seiner Punkte hat nur eine algebraische Vermehrung dieser letzteren um die Verschiebungsgröße, also eine gleichmäßige Vermehrung oder Verminderung der Abstände der durch sie bestimmten Projektionen von den zugehörigen Achsen zur Folge.



Wir wollen die Projektionen nach der Transformation dadurch bezeichnen, daß wir ihren Buchstaben unten links den Index der betreffenden Projektionsebene oder projizierenden Linie beifügen. (Nebenstehende Figur.)

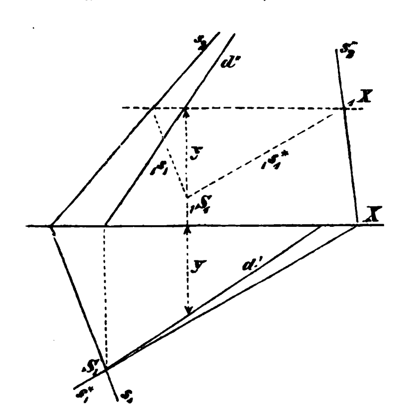
Die Gestalt und Richtung der Projektionen wird durch beliebige Parallelverschiebungen nicht geändert; Parallelver-

schiebungen können Raumersparnis nur erzielen, wenn sie das Ineinanderschieben der verschiedenen Projektionen bewirken; sie lassen das Maximum derselben erreichen, indem man den Mittelpunkt der dargestellten Raumfigur zum Anfangspunkt O des Systems oder zu einem Punkte der Halbierungsachse $\mathfrak{h}_y$ desselben macht (§ 46, 4. § 53). Größere Deutlichkeit kann durch Parallelverschiebungen nur erreicht werden, insofern es sich um ein Auseinanderhalten der verschiedenen Projektionen des Objekts handeln kann.

Es folgt, daß man die Einzeichnung der Achse x unterlassen kann, indem es genügt, ihre Richtung zu kennen, solange es sich nur um die Projektionen von Objekten und nicht um ihre Schnitte mit dem Projektionssystem, etc. handelt.

Man vergleiche die Figuren der §§ 52, 53, in denen die Achse x nicht gebraucht wird; dazu das Umklappen der Ebene um Spurparallelen.

B. 1) Man bestimme die Schnittlinie von zwei Ebenen aus den Spuren derselben, wenn der Schnittpunkt der zweiten Spuren nicht auf dem Blatte liegt. Die nebenstehende Figur gibt die Lösung.



Sie ist zugleich eine Auflösung der Aufgabe, die Verbindungslinie von einem Punkte nach dem unzugänglichen Schnittpunkte von zwei Geraden zu konstruieren. (Vergl. § 30, 1.) Ein weiteres Mittel gibt der Satz, daß die drei Höhenperpendikel eines Dreiecks durch einen Punkt gehen.

2) Man bestimme die Schnittlinie von zwei Ebenen aus den Spuren, wenn kein Paar derselben sich auf dem Blatte schneidet.

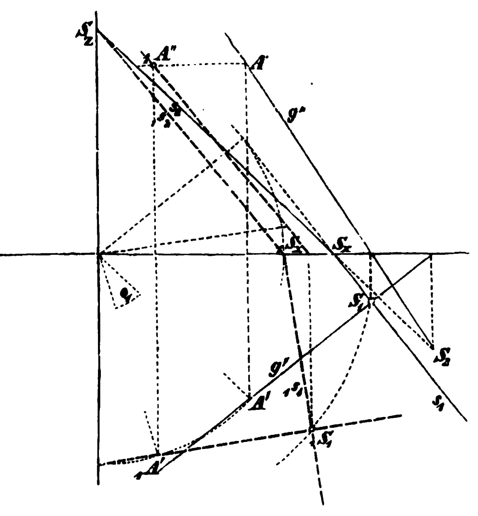
58. Die Drehung einer projizierten Raumfigur um eine Projektionsachse oder eine Parallele zu einer solchen in bestimmtem Sinne um einen Winkel θ_i (i als Index der projizierenden Linie, zu welcher diese Achse parallel läuft), d. i. die Darstellung ihrer Projektionen in der am Ende der Drehung erreichten Lage, ergibt sich aus den beiden Bemer-

kungen: In den zur Drehungsachse parallelen Projektionen schreiten die Punkte in Normalen zu ihr fort; in der zu ihr normalen Projektion drehen sie sich in dem Sinne und um den Betrag des Winkels θ um den Punkt, welcher die Drehungsachse projiziert.

Wir wollen dabei den Drehungssinn durch ein aus dem positiven Ende der Drehungsachse oder der ihr parallelen Projektionsachse nach der Projektionsebene blickendes Auge beurteilt denken, und als positiv die im Sinne des Uhrzeigers verlaufende Drehung bezeichnen.

Die Drehung um eine schräg im Raume liegende Achse ist durch die Methode dieses oder des nächsten Paragraphen ebenfalls leicht auszuführen.

B. 1) Man drehe einen Punkt A, eine Gerade g und eine Ebene **E** um die Achse OZ um $\theta_1 = + 30^0$. Die nebenstehende Figur gibt diese Drehung.



2) Man leite aus den gegebenen Projektionen eines Polyeders in seiner einfachsten Stellung zu den Projektionsebenen diejenigen ab, welche ihm am Ende von zwei sukzessiven Drehungen um die Achsen OZ und OY — oder um mit dem Polyeder selbst verbundene Achsen, parallel OZ bez. OY — mit den Beträgen $\theta_1 = + 60^0$, $\theta_2 = - 15^0$ zukommen.

Ein gutes Beispiel liefert das Rhombendodekaeder, der von zwölf kongruenten Rhomben begrenzte Körper mit sechs vierkantigen (oder Oktaeder-) und acht dreikantigen (Hexaeder-) Ecken. Wenn man die durch den Mittelpunkt des Körpers gehenden Verbindungslinien der Oktaedereckenpaare bez. parallel zu den Achsen x, y, z stellt, so erscheinen Grund- und Aufriß des Körpers als gleiche Quadrate mit unter 45^0 geneigten Seiten, jedes durch die Geraden vom Mittelpunkt nach den Seitenmitten in vier gleiche Quadrate geteilt. Auch können beide Projektionen in Deckung liegen.

3) Man soll eine Ebene durch Drehungen um zwei Projektionsachsen zu einer Projektionsebene parallel machen. Man macht sie

durch eine erste Drehung normal zu einer der beiden andern Projektionsebenen und erreicht dann den vorgesetzten Zweck durch eine zweite Drehung. Um welche Achsen, um welche Winkel und in welchem Sinne hat man zu drehen? Für ein in der Ebene liegendes System erhält man dabei aus einer vollständigen Projektion und drei Punkten der anderen die wahre Größe und Gestalt.

4) Man mache eine Gerade durch Drehungen um zwei Projektionsachsen zu einer Projektionsachse parallel und erörtere die analogen Fragen.

5) Ein Punkt A soll durch Drehung um die Achse OZ in eine gegebene Ebene **E** gebracht werden; welche Drehung ist dazu erforderlich?

6) Man bringe einen Würfel, dessen Kanten den Projektionsachsen parallel sind, durch Drehung um die durch seinen Mittelpunkt gehenden Parallelen zu diesen in eine Lage, in welcher die Verbindungslinie von zwei Gegenecken der Achse OZ parallel ist. (Vergl. Figur auf S. 349.)

7) Man zeichne die neue erste Projektion eines durch seine Projektionen bestimmten Objekts, nachdem eine mit ihm fest verbundene durch ihre Spuren bestimmte Ebene zur ersten Projektionsebene parallel gemacht worden ist.

8) Man bestimme den Mittelpunkt M der einem Tetraeder $ABCD$ eingeschriebenen Kugel, wenn die eine seiner Flächen ABC in einer Projektionsebene z. B. der Ebene xy liegt. Er ist der Durchschnittspunkt der Halbierungsebenen der inneren Flächenwinkel an den Kanten AB, BC, CA und um ihn zu erhalten, führt man mit Vorteil eine zu xy parallele Hilfsebene ein, sodaß M zwischen dieser und xy liegt. Schneiden die Halbierungsebenen H_c, H_a, H_b der an AB, BC, CA bez. liegenden Flächenwinkel diese Hilfsebene in drei Geraden s_c, s_a, s_b und bezeichnen wir die Schnittpunkte derselben miteinander durch C^*, A^*, B^*, nämlich den von s_b und s_c als A^*, etc., so ist das Dreieck $A^*B^*C^*$ zu ABC ähnlich und ähnlich gelegen und das Ähnlichkeitszentrum ist der gesuchte Kugelmittelpunkt M — insbesondere, zum Vorteil der Genauigkeit, bei der vorgeschlagenen Anordnung der Hilfsebene der innere Ähnlichkeitspunkt. Zur Bestimmung der Halbierungsebenen benutzt man die von der Ecke D zu den Seiten AB, BC, CA bez. gehenden Normalebenen und die in ihnen liegenden Halbierungslinien der Flächenwinkel, welche durch ihre Schnitte mit der eingeführten horizontalen Hilfsebene je einen Punkt C_1^*, A_1^*, B_1^* der Seiten A^*B^*, B^*C^*, C^*A^* liefern und diese somit bestimmen. Natürlich geschieht die Halbierung der Winkel nach ihrer Drehung in die zur Ebene xz parallele Lage und die Halbierungslinien werden aus dieser in die Ebenen derselben zurückgedreht. Sind also A, B, C, D, die Horizontalprojektionen und A'', B'', C'' in der Achse x, D'' über ihr die Vertikalprojektionen der Ecken des Tetraeders, so fällt

man von D' das Perpendikel mit dem Fußpunkt C_1 auf AB, dreht C_1 um D' auf die durch D' gehende Parallele zu x in (C_1) und bestimmt lotrecht darüber in x den Punkt $(C_1)''$; so gibt die Halbierungslinie des inneren Winkels $A''\,(C_1)''\,D''$ auf der Vertikalspur und -projektion der Hilfsebene den Punkt $(C_1{}^*)''$ an, aus dem in der Horizontalen durch D' seine Horizontalprojektion $(C_1{}^*)'$ erhalten wird; diese liefert durch Zurückdrehung um D' bis in die Gerade $D'C_1$ den Punkt $C_1{}^{*\prime}$, durch den parallel $A'B'$ die Gerade $A^{*\prime}B^{*\prime}$ geht. Bestimmt man nach demselben Verfahren $B^{*\prime}C^{*\prime}$ und $C^{*\prime}A^{*\prime}$, so erhält man $A^{*\prime}$, $B^{*\prime}$, $C^{*\prime}$ als ihre Schnittpunkte, aus ihnen durch Perpendikel zu x in der Vertikalspur der Hilfsebene $A^{*\prime\prime}$, $B^{*\prime\prime}$ und $C^{*\prime\prime}$ und damit als Ähnlichkeitszentren durch AA^*, BB^*, CC^* in beiden Projektionen M', M''.

9) Wenn die Halbierungsebenen $H_c{}^*$, $H_a{}^*$, $H_b{}^*$ der Außenflächenwinkel an den Kanten AB, BC, CA mit bestimmt werden, so erhält man im allgemeinen acht verschiedene Punkte als Schnittpunkte derselben zu dreien mit der Eigenschaft, gleich entfernt von den Flächen des Tetraeders zu sein; nämlich immer außer M, dem Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel, die vier Mittelpunkte M^*, $M_1{}^*$, $M_2{}^*$, $M_3{}^*$ der Kugeln, die die Gegenflächen der Ecken D, A, B, C bez. innerlich und die jeweiligen andern in ihren Außenwinkelflächen berühren, als Schnittpunkte von $H_a{}^*$, $H_b{}^*$, $H_c{}^*$; $H_a{}^*$, H_b, H_c; H_a, $H_b{}^*$, H_c; H_a, H_b, $H_c{}^*$ bez.; endlich aber im allgemeinen die Schnittpunkte von H_a, $H_b{}^*$, $H_c{}^*$; $H_a{}^*$, H_b, $H_c{}^*$; $H_a{}^*$, $H_b{}^*$, H_c als Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 von drei Kugeln, welche je zwei Flächen in ihren Außenwinkelteilen und die zwei anderen in ihren Scheitelwinkelteilen berühren. Sie sind als äußere Ähnlichkeitspunkte des Dreiecks ABC mit den Spurendreiecken der bezüglichen Tripel von Halbierungsebenen bestimmt und können daher auch unendlich fern sein; in der Tat existieren nur zwei im Endlichen, wenn die Summe der Inhalte von zwei Flächen des Tetraeders der Summe der Inhalte der beiden andern gleich ist; nur eine, wenn die Flächen paarweise äquivalent sind, und keine beim regulären Tetraeder, wenn alle gleich groß sind. Denn die Halbierungsebenen eines Flächenwinkels im Tetraeder teilen die entsprechende Gegenkante nach dem Verhältnis der einschließenden Flächen und bestimmen also mit den Ecken die diesen Verhältnissen entsprechenden harmonischen Gruppen; es sind Formen der Bedingungen, unter welchen jene Spurendreiecke mit ABC zentrisch ähnlich sind nach dem Verjüngungsverhältnis Eins. Man erhält sie auch durch die offenbaren Relationen zwischen dem Volumen des Tetraeders, den Arealen seiner Seitenflächen und den Radien der berührenden Kugeln.

Wir können die Lagenrelationen dieser acht Mittelpunkte folgendermaßen überblicken. Die 6 . 2 Halbierungsebenen der Flächenwinkel an den Kanten des Tetraeders schneiden aus den Gegenkanten bez. 6 . 2 Punkte, die durch die zugehörigen Ecken harmonisch

getrennt sind; nämlich H_1, H_1^* aus AD die Punkte 14, 14*; H_2, H_2^* aus BC die 24, 24* und H_3, H_3^* aus CD die 34, 34*. Ebenso entspringen aus den Halbierungsebenen durch die Kanten AD, BD, CD die Paare 2 3, 2 3*; 1 3, 1 3*; 1 2, 1 2*. Nun schneiden sich die Geraden 1 2, 3 4; 1 3, 2 4; 1 4, 2 3 in M; 1 2*, 3 4; 1 3*, 2 4; 1 4*, 2 3 in M_1^*; 1 2*, 3 4; 2 3*, 1 4 und 2 4*, 1 3 in M_2^*; 1 3*, 2 4; 2 3*, 1 4 und 3 4*, 1 2 in M_3^*; 1 4*, 2 3; 2 4*, 1 3; 3 4*, 1 2 in M^*; endlich 1 2*, 3 4*; 1 3*, 2 4* und 1 4, 2 3 in M_1; 1 2*, 3 4*; 1 3, 2 4; 1 4*, 2 3* in M_2; 3 4, 1 2; 1 3*, 2 4*; 2 3*, 1 4 in M_3. Jeder der acht Mittelpunkte liegt mit je drei andern in Geraden, welche die Gegenkanten des Tetraeders schneiden und mit vier andern in Linien durch die Ecken des Tetraeders. Man kann die Haupteigenschaft des ganzen Systems dahin aussprechen, daß die Ebene der Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 von dem Mittelpunkte M der eingeschriebenen Kugel auf allen Kanten des Tetraeders durch seine Ecken harmonisch getrennt wird.

10) Eine andere Lösung desselben Problems ergibt sich aus dem Prinzip der Umlegung und Aufrichtung (vergl. § 54, 26) durch folgende Schlüsse. Es ist erstens evident, daß die Berührungspunkte von zwei Ebenen mit derselben Kugel äquidistant von ihrer Durchschnittslinie und in Perpendikeln mit dem nämlichen Fußpunkt in derselben liegen, den Schenkeln ihres Neigungswinkels. Dieselben müssen daher bei der Umlegung der einen Ebene in die andere zur Deckung kommen. Es ist ebenso evident, daß die Berührungspunkte von drei Ebenen mit der nämlichen Kugel äquidistant sind von dem Durchschnittspunkt derselben. Aus beidem ergibt sich in Anwendung auf die Umlegung der Berührungspunkte einer Kugel unseres Problems mit drei Ebenen in die vierte, daß der Berührungspunkt mit dieser vierten Ebene äquidistant ist von den gleichzeitigen Umlegungen des Schnittpunktes jener drei Ebenen in diese vierte. Und da die Berührungspunkte der Kugeln des Problems mit der Ebene ABC oder 1 2 3 zugleich die Horizontalprojektionen ihrer Mittelpunkte und aus diesen die Mittelpunkte selbst bestimmt sind, so hat man folgende Lösung: Man nenne die Umlegungen der Ecke 4 des Tetraeders mit den Ebenen 2 3 4, 3 1 4, 1 2 4 oder I, II, III in die Ebene 1 2 3, je nachdem sie nach der Seite des Körpers oder nach außen vollzogen werden $(4)_I$, $(4)_I^*$; $(4)_{II}$, $(4)_{II}^*$; $(4)_{III}$, $(4_{III}^*$ bez., oder kürzer (1), (1)*; (2), (2)*; (3), (3)*; dann sind die Mittelpunkte der Kreise durch die Punktetripel (1), (2), (3) und (1)*, (2)*, (3)* die Horizontalprojektionen der Mittelpunkte M und M_4 oder M^* bez. der eingeschriebenen und der die Fläche 1 2 3 allein innerhalb ihrer Begrenzung berührenden Kugel; es sind die Mittelpunkte der Kreise durch die Tripel (1)*, (2), (3); (1), (2)*, (3); (1), (2), (3)* die Horizontalprojektionen der Mittelpunkte M_1^*, M_2^*, M_3^* derjenigen Kugeln, welche bez. die Flächen 2 3 4, 3 1 4, 1 2 4 allein im Innern

ihrer Begrenzung und daher die jedesmal übrigen in ihren anliegenden Außenwinkelflächen berühren; und es sind endlich die Mittelpunkte der Kreise durch die Tripel (1), (2)*), (3)*; (1)*, (2), (3)*; (1)*, (2)*, (3) die Horizontalprojektionen der Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der drei letzten Kugeln, welche die Flächen in Paaren in Außenwinkelflächen und in Scheitelwinkelflächen ihrer Begrenzungen berühren. Diese sind somit den Paaren der Gegenkanten des Tetraeders 12, 34; 23, 14; 31, 24 zugeordnet, wie z. B. bei der Kugel M_3 die Flächen 134, 234 in den Außenwinkelflächen an der Kante 34 und die Ebenen 123, 124 in den Scheitelwinkelflächen an den Ecken 1, 2 berührt werden. Bei diesen drei Kugeln ist möglich, daß ihre vier Berührungspunkte mit den Flächen des Tetraeders in eine Ebene fallen, sodaß der Mittelpunkt zum unendlich entfernten Punkt wird; man bestätigt die schon erwähnten Bedingungen für das ein-, zwei- oder dreimalige Vorkommen dieses Umstandes.

Wir erwähnen diese Relationen erst nach der Konstruktion der M als Ähnlichkeitszentren, weil wir diese für die grundlegende und überdies praktisch bessere halten; den Ursprung derselben im Zusammenhang der letzten deuten wir in der folgenden näheren Erörterung der ausgeführten Konstruktion an.

11*) Es ist aus 8) ersichtlich, daß die beste Ausführung der Konstruktion dieses Kugelsystems die Orthogonalprojektion mit einem Bilde sein wird, bei welcher die Grundebene ABC der Pyramide die Bildebene und eine durch die Spitze D zu ihr gelegte Parallele die Fixebene **U** ist. Man ermittelt in **U** die Spurenpaare der Halbierungsebenen H_1, H_1^*; etc. und die Ähnlichkeitszentra $M, \ldots$ der durch sie gebildeten Dreiecke mit ABC; aus dem Abstand der beiden Ebenen oder der auf D bezüglichen Tetraederhöhe folgen dann die Abstände der Punkte M, $M_1, \ldots$ von der Basisebene, oder die Radien der Kugeln und die Umrisse ihrer Bilder. Die selbständige Ausführung ist zu empfehlen. Die Relationen der harmonischen Trennung, etc. von 9) geben ihr ein großes Interesse.

Die Tafel II zeigt links beide Konstruktionen im Zusammenhang für ein Tetraeder, dessen acht berührende Kugeln sämtlich von endlichen Radien sind. In dieser Figur sind 1, 2, 3 die in der Zeichnungsebene gedachten Ecken des Tetraeders, 4′ ist die Orthogonalprojektion und der Radius des daraus beschriebenen Kreises H die Höhe der vierten Ecke über dieser Ebene **S**; die Ebene **U** geht durch 4 parallel zu **S**. Man sieht in der Figur die Konstruktion der Umklappungen (1), (1)*; (2), (2)*; (3), (3)* mit den Flächen 234, 314, 124 je nach der Seite des Körpers und nach der entgegengesetzten; die zugehörigen Hilfsumklappungen von 4 findet man mit 4_1, 4_2, 4_3 bez. bezeichnet und die spitzen Drehungswinkel durch α_1, α_2, α_3; nur der erste dieser Winkel liegt auf der Körperseite, die beiden letzten sind Außenwinkel. Nun

sind nach § 54, 7 und § 14, 6 die Geraden von 4_1 nach (1) und (1)* Parallelen zu den Halbierungslinien des Winkels α_1 und seines stumpfen Nebenwinkels, und wenn man diese Halbierungslinien selbst zieht, sie mit der durch 4_1 gehenden Normale zu 2 3 schneidet und durch die Schnittpunkte Parallelen zu 2 3 legt, so sind diese die Projektionen der Schnittlinien der Halbierungsebenen an der Kante 2 3 mit **U** auf **S**; man findet die der Halbierungsebene des Körperwinkels $180 - \alpha_1$ angehörige mit I, die andere mit I^* bezeichnet. Ebenso liefern 4_2 (2) und 4_2 (2)* durch ihre Parallelen aus dem Scheitel von α_2 im Schnitt mit der Normale zu 3 1 durch 4_2 Punkte von den Projektionen der Schnitte von **U** mit den Halbierungsebenen von α_2, und damit diese Projektionen selbst in II und II^* für den Winkel auf der Körperseite und seinen Nebenwinkel bez. Endlich erhält man aus 4_3, (3), (3)* die Projektionen III, III^* mit derselben Unterscheidung. Die Projektionen der Kugelmittelpunkte M, M^*; M_1^*, M_2^*, M_3^*; M_1, M_2, M_3 sind nun die Ähnlichkeitszentra des Dreiecks 1 2 3 mit den bez. Dreiecken $I\,II\,III$, $I^*\,II^*\,III^*$; $I^*\,II\,III$, $I\,II^*\,III$, $I\,II\,III^*$; $I\,II^*\,III^*$, $I^*\,II\,III^*$, $I^*\,II^*\,III$ und zugleich die Mittelpunkte der Kreise durch die Tripel der Umklappungen von 4, welche bezeichnet sind durch (1)(2)(3), (1)*(2)*(3)*; etc., bis (1)*(2)*(3) bez.

Die Radien der bezüglichen Kugeln und die Lagen ihrer Mittelpunkte über oder unter der Ebene 1 2 3 sind dann in der Figur durch die Bemerkung bestimmt, daß M, M_1^*, M_2^*, M_3 die Mittelpunkte in der nach III gehenden und M^*, M_3^*, M_1, M_2 dieselben in der nach III^* gehenden Halbierungsebene durch 1 2 haben; die Parallelen zu 1 2 durch M, M_1^*, M_2^*, M_3 liefern also die Radien dieser Kugeln zwischen der Halbierungslinie von α_2 und dessen zu 1 2 rechtwinkligem Schenkel, die durch M^*, M_3^*, M_1, M_2 ebenso zwischen demselben Schenkel und der Halbierungslinie von $(180 - \alpha_3)$.

Nach der Lage zu vier in den Halbierungsebenen befinden sich zweimal drei dieser Kugelmittelpunkte miteinander in Paaren auf Transversalen der gegenüberliegenden Tetraederkanten in einer Ebene; nämlich M_1 und M_2, M_2 und M_3, M_3 und M_1 bez. auf Transversalen zu den Kantenpaaren 1 2, 3 4; 2 3, 1 4; 3 1, 2 4, und ebenso auf solchen Transversalen M_1^*, M_2^*, M_3^*; die Schnittpunkte der einen und der andern auf den Kanten bilden mit den Ecken in denselben harmonische Gruppen, weil die Halbierungsebenen an der Gegenkante mit den Flächen ein harmonisches Büschel bilden.

Wir kommen in Bd. III dieses Werkes auf die Gruppen von acht Punkten, etc. zurück, die den hier erhaltenen nach den Gesetzen der Projektivität entsprechen und die auch dort noch beachtungswert sind.

12) Hier mag noch der Aufgabe kurz gedacht sein, Kugeln zu konstruieren, welche vier Kanten eines Tetraeders be-

rühren. Zu solchen vier Kanten gibt es nur dann allgemein keine berührende Kugel, wenn sie ein windschiefes Vierseit bilden oder zwei Paare Gegenkanten; denn wäre eine solche Berührungskugel vorhanden, so müßten die Gegenkantenpaare gleiche algebraische Summen ihrer Längen haben. Alle übrigen Vierer von Kanten fallen aber unter zwei Typen, welche man sogleich als äquivalent erkennt: drei Kanten einer Fläche und eine der Gegenecke, bez. drei Kanten einer Ecke und eine der Gegenfläche. Und hier ist die Konstruktion der berührenden Kugeln offenbar, weil man vier Gerade als Ort ihrer Mittelpunkte hat; nämlich — wir wollen für den ersten Fall und die Fläche 1 2 3 sprechen — die vier Normalen zur Ebene 1 2 3 in den Mittelpunkten der die Seiten seines Dreiecks berührenden Kreise; und weil man nach der Gleichheit der Kugeltangenten aus einem Punkte sofort den Berührungspunkt der vierten Tangente, z. B. 1 4 erhält, indem man auf ihr von 1 die Länge der Tangente von 1 an den betrachteten Kreis abträgt. So liefert jeder einem Dreiseit eingeschriebene Kreis sechs berührende Kugeln, also jede Fläche deren 24 und man erhält 96 vier Kanten berührende Kugeln zum allgemeinen Tetraeder.

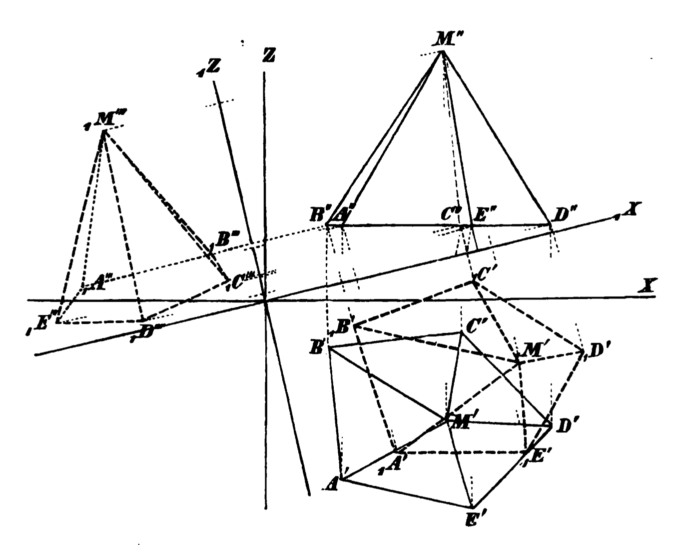
Die Diskussion der besondern Fälle, wo zwei Paare, bez. alle drei Paare von Gegenkanten durch eine Kugel berührt werden können, unterlassen wir; im regulären Tetraeder vereinigt sich alles zu einer recht einfachen Anschauung.

59. Dreht man statt des Objekts die Projektionsebenen um dieselben Achsen um gleiche Winkel aber im entgegengesetzten Sinn, so erhält man analoge Änderungen der Projektionen. Denken wir die erste Projektionsebene und mit ihr die dritte um die Achse OY und um den Winkel θ_2 gedreht, während die zweite Projektionsebene und das Objekt ungeändert bleiben, so ändern sich die Koordinaten y seiner Punkte und die zweiten Projektionen derselben nicht. Man bestimmt daraus die neuen ersten Projektionen durch Abtragen der alten y aus den Fußpunkten der Normalen zur neuen Achse O_1X in dieser, welche von den zweiten Projektionen gefällt werden können. (Figur auf S. 360.)

Analog im Falle der Drehung der zweiten Projektionsebene um die Achse OZ mit Vertauschung der ersten und zweiten Projektionen und Projizierenden.

Die bildliche Anschaulichkeit des Ergebnisses wird dabei oft — und dies ist gewöhnlich mit den Erfolgen der Transformationen verbunden — verringert, ganz ebenso wie die Symmetrie der analytischen Ausdrucksformen geometrischer

Untersuchungen in der Regel verringert wird durch die Koordinatentransformationen, welche sie vereinfachen. (Vergl. unten 11.) Wir fügen hier eine Reihe wichtiger Beispiele hinzu, indem wir zugleich bemerken, daß die Frage der Zweckmäßigkeit der Transformation gestellt werden sollte. Ein Haupt-



ergebnis der Transformation behandeln wir in demselben Sinne ausführlich im folgenden Artikel.

B. 1) Man erläutere die dritte Projektion als Projektion auf eine neue erste oder zweite Projektionsebene.

2) Man bestimme den Winkel α_1 einer Ebene (oder β_1 einer geraden Strecke und die wahre Länge derselben) durch Transformation — indem man die neue zweite Projektionsebene zur Ebene normal (oder zur Geraden parallel bez. sie projizierend) macht.

3) Man mache durch Drehung des Projektionssystems eine Gerade parallel zu einer Projektionsachse, bez. eine Ebene parallel zu einer Projektionsebene, — indem man zuerst eine neue erste oder zweite Projektionsebene parallel der Geraden bez. normal der Ebene und sodann eine neue zweite oder erste Projektionsebene normal der Geraden bez. parallel der Ebene einführt.

4) Die Identität der Umlegung eines ebenen Systems in eine Projektionsebene mit einer solchen Transformation ist zu erörtern.

5) Man soll den Abstand des Punktes A von der Ebene **E** bez. der Geraden g durch Transformation bestimmen; ebenso den kürzesten Abstand zweier Geraden g und l, indem man hier eine der Geraden zu einer Projektionsebene normal macht.

Es ist von Interesse, speziell die Größe und Lage der kürzesten Entfernung von zwei Projektionen z. B. g', g'' derselben Geraden zu bestimmen; man zeige, wie ihr Fußpunkt in der Achse x der endliche Doppelpunkt von zwei ähnlichen Reihen ist, deren Paare man erhält aus dem Grundriß eines Punktes von g'' in x und dem Schnittpunkt von x mit dem Perpendikel auf g' in dem Punkte, wo dieses von der Normalebene zu g'' in dem angenommenen Punkte geschnitten wird — sodaß die beiden Durchstoßpunkte der Geraden sie schon bestimmen.

6) Man bestimme durch Transformation die Größe des Winkels von zwei Geraden oder Ebenen und den Winkel einer Geraden mit einer Ebene; insbesondere den Winkel von zwei Ebenen, die durch ihre Schnittlinie und je einen Punkt außer dieser bestimmt sind, wie bei zwei Nachbarflächen eines Polyeders. Im letzten Falle macht man durch Transformation eine Projektionsachse zur Schnittlinie parallel und erhält in der zu ihr normalen Projektion die wahre Größe des gesuchten Winkels.

7) Von zwei Kugeln wird die eine durch eine Gerade g reell geschnitten, die andere nicht. Mittelst zwei Transformationen, die g zur projizierenden Linie zu machen, bestimmt man die Schnittpunkte von g mit der ersten und ihre Tangentialebenen mit der zweiten Kugel.

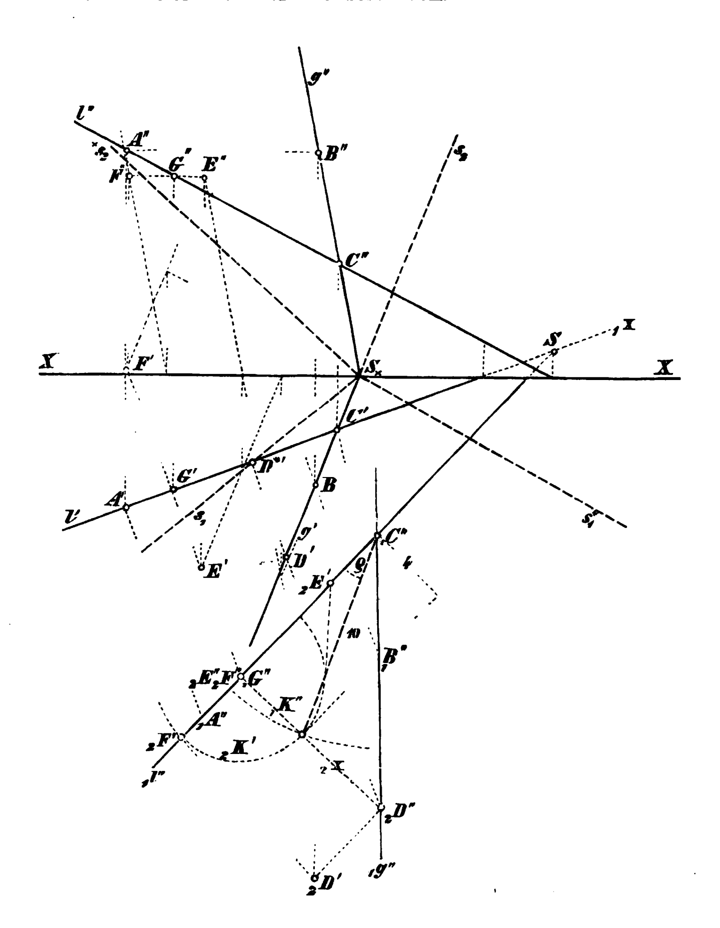
8) Man soll durch eine mittelst ihrer Projektionen gegebene Gerade g von ihrer ersten projizierenden Ebene aus die zwölf Ebenen von 15 zu 15^0 antragen und ihre Spuren verzeichnen, durch Transformation mit einer zu g normalen Ebene. Ist g der Erdachse parallel und die erste projizierende Ebene der Meridian des Ortes, so sind die Ebenen die Stundenebenen und ihre Spuren liefern die Sonnenuhr; man denke die Gerade durch den Schnittpunkt der Achsen gelegt, die Achsen selbst als Kanten einer Würfelecke und auf die Spuren der Stundenebenen im Normalschnitt durch O zu g gleiche Strecken abgetragen und verzeichne durch Transformation die in den Würfelflächen erscheinenden ersten, bez. zweiten oder dritten Projektionen der Endpunkte. (Horizontale und doppelte vertikale Sonnenuhr.)

9) Man vereinfacht die Konstruktion der Aufgabe, die Transversalen zu drei Geraden zu konstruieren, indem man durch Transformation eine Projektionsachse zu einer der Geraden parallel macht; in der zugehörigen, d. i. zu ihr normalen, Projektionsebene erscheint diese letztere dann als Punkt und die Transversalen gehen durch denselben hindurch.

10) Man bestimme durch Transformation die Geraden in gegebener Ebene **E**, welche von zwei festen Punkten in oder außer der Ebene vorgeschriebene Entfernungen haben.

11) Weil nach § 10, 13 eine gerade Linie von allen Geraden einer zu ihr parallelen Ebene, die sie kreuzen, denselben Abstand

hat, somit die von einer Geraden äquidistanten Geraden Tangenten eines geraden Kreiszylinders mit jener als Achse und der Distanz als Radius sind, so lassen sich die Tangenten einer Kugel bestimmen, die von einer gegebenen Geraden vorgeschriebenen Abstand haben und z. B. durch einen Punkt gehen. Man erläutere die Benutzung der Transformation bei der Konstruktion.



12) Man bestimme den Normalschnitt eines prismatischen Mantels in wahrer Größe durch Transformation; eventuell die dritte Kante eines dreieckig gleichseitigen (oder regulär vieleckigen) prismatischen Mantels, von welchem zwei schräge Parallelen als benachbarte, etc. Kanten gegeben sind.

13) Man lege durch eine Gerade g die Ebenen **S**, **S*** unter vorgeschriebenem Winkel φ zu einer Geraden l unter Benutzung der Transformation. Die obenstehende Figur gibt die Ebenen vom Sinus

des Winkels φ gegen l gleich 0,4; sie haben für Licht von der Richtung l die durch diese Zahl gemessene Helligkeit. (Vergl. die Lehre von den Beleuchtungskonstruktionen in Bd. II.) Mittelst der Punkte A, B, C ist die neue Vertikalprojektion ${}_1l''$, ... mit l' als Achse ${}_1x$ erhalten, in ihr φ angetragen und durch Übergang zu einer neuen Horizontalprojektion an ${}_2x$ sind mittelst des Punktes D von g die bezüglichen Spuren ${}_2D'{}_2E'$, ${}_2D'{}_2F'$ der gewünschten Ebenen gefunden. Die mittelst G in der ursprünglichen Lage bestimmten Punkte E und F liefern die Ebenen **S**, **S***, nämlich gE, gF bez. Da ${}_1g''$ und ${}_2g'$ oder ${}_1C''{}_1D''$ und ${}_1G''{}_2D'$ zusammengehörige Projektionen von g und ${}_1C''$, ${}_2D'$ der zweite und erste Durchstoßpunkt derselben sind, so kann die Rückwärtstransformation zur direkten Bestimmung der Spuren s_1 und s_1^* noch einfacher so geschehen: Man markiert auf ${}_2x$ die Schnitte von ${}_2D'{}_2E'$ und ${}_2D'{}_2F'$ und verbindet sie mit ${}_1C''$, um durch diese Geraden die Achse ${}_1x$ zu schneiden; die Schnittpunkte gehören zu den Horizontalspuren s_1^* und s_1, welche als von S_x ausgehend, hiermit bestimmt sind. Das Büschel der den verschiedenen Werten von φ oder $\sin\varphi$ entsprechenden Ebenen bestimmt man nun leicht.

Man hat in der Aufgabe angenommen, daß g und l sich schneiden und daß g durch die Achse X gehe. Warum sind diese Annahmen allgemein zulässig?

14) Wie bestimmt man in der Figur von Aufg. 3 den Winkel, welchen eine gegebene Ebene durch g mit l einschließt — also die Helligkeiten der verschiedenen Ebenen des Büschels durch g?

15) Ebenso bestimme man in einer Ebene **E** die Geraden g, welche mit einer gegebenen Geraden l vorgeschriebene Winkel einschließen.

16) Man bestimme die gemeinsamen Punkte und die gemeinsamen Tangentialebenen von drei Kugeln aus ihren Mittelpunkten und Radien — durch Transformation, indem man eine Projektionsebene mit der Ebene der drei Mittelpunkte zusammenfallen macht.

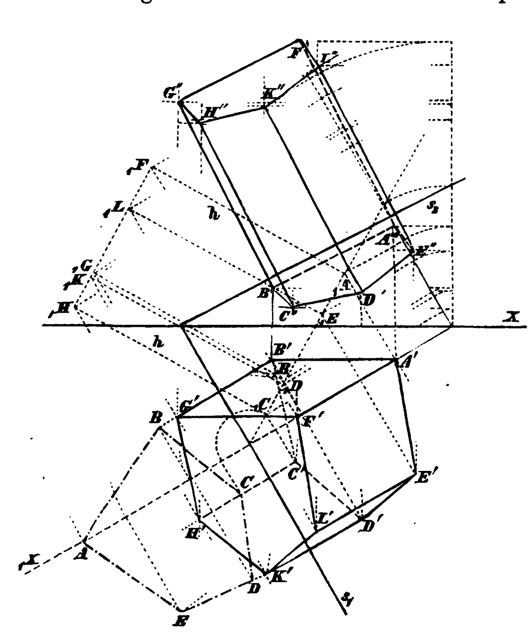
a) Die in dieser Ebene liegenden Hauptkreise liefern in Paaren die drei gemeinsamen Sehnen als bez. Projektionen der Durchdringungskreise der Kugeln; ihre gemeinsamen Ordinaten im Schnittpunkt derselben bestimmen die zwei gemeinsamen Punkte.

b) Dieselben Hauptkreise liefern in Paaren zwei, also zusammen sechs Ähnlichkeitspunkte, die viermal zu dreien in einer Geraden liegen; diese vier Geraden sind die bez. Spuren der acht gemeinsamen Tangentialebenen; man bestimmt ihre Berührungspunkte mit einer der Kugeln, indem man die Normalebene durch ihren Mittelpunkt zur bez. Ähnlichkeitsachse umlegt und daraus die Ordinate und die Projektion des Berührungspunktpaares erhält.

Spezialfälle 1) für eine der drei Kugeln als vom Radius Null: Ebenen durch einen Punkt berührend an zwei Kugeln. 2) für zwei der drei Kugeln als Punkte: Tangentialebenen einer Kugel durch

eine Gerade. Wünscht man ihren Winkel, so wird man die Gerade zu einer Projektionsachse parallel machen wie in 6).

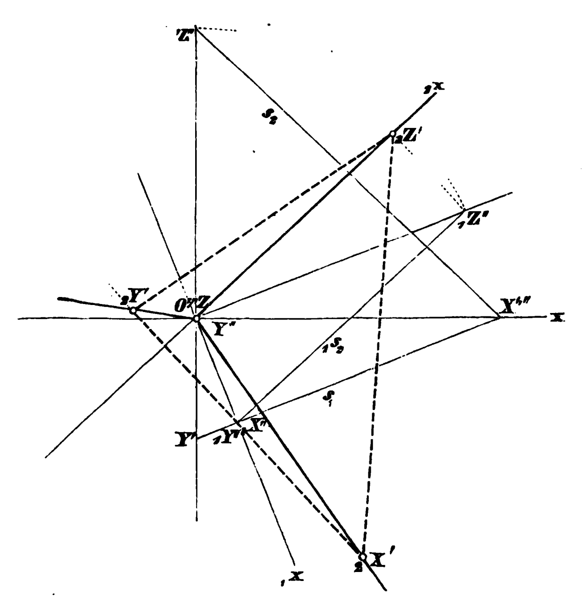
17) Man ermittele die gemeinsamen Mantellinien von zwei Rotationskegeln mit gemeinsamer Spitze durch Transformation ihrer Achsenebene parallel einer Projektionsebene unter Benutzung einer um die Spitze beschriebenen Kugel. Die Bestimmung der gemeinsamen Tangentialebenen fällt unter den Spezialfall a) in 16).



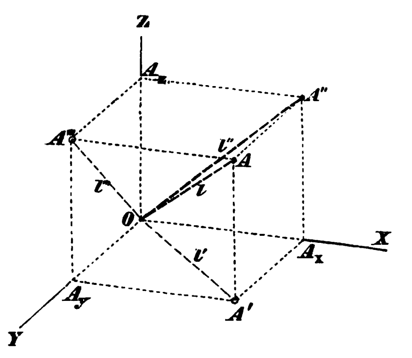
18) Von einem geraden fünfseitigen Prisma ist die erste Spur s_1 und die Neigung α_1 der Grundebene, sowie die Gestalt und Größe der Grundfläche samt ihrer Lage gegen s_1, endlich die Höhe h gegeben; man soll dasselbe projizieren, unter Einführung einer neuen zu s_1 normalen Projektionsebene. Die nebenstehende Figur zeigt die Ausführung. Man erörtere ihre Beziehung zur Methode der Umlegung.

60. Die Aufgabe 7) des § 58, die auch nach der Methode des vorigen Paragraphen gelöst werden kann, ist in wenig veränderter Fassung das Problem der Achsonometrie. Unter der Voraussetzung, daß ein beliebiges Raumgebilde durch die Koordinaten seiner Punkte in Bezug auf ein trirektanguläres Achsensystem — wir setzen fest: mit lotrechter Achse OZ, gemäß der praktischen Bestimmung des Verfahrens — gegeben sei, kann offenbar seine orthogonale Parallelprojektion auf eine in Bezug auf diese Achsen gleichfalls bestimmte Ebene **B** (§ 54, 30) ermittelt werden, nämlich in verschiedenen Weisen durch Transformation nach den vorigen Entwickelungen. Es ist die Aufgabe der Achsonometrie, dies nicht auf dem Umwege der Transformationen, sondern direkt zu vollziehen, indem man die Richtungen ermittelt, in welchen alle Parallelen zu den Koordinatenachsen

in dieser Projektion erscheinen, und die Verkürzungsverhältnisse, welche ihnen bez. zukommen. Allerdings kann auch dieses durch Transformation geschehen, wie es die

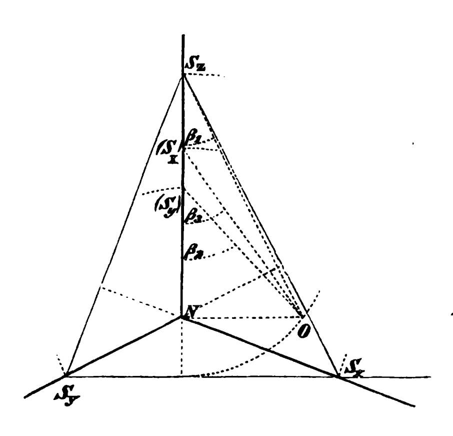


vorstehende Figur zeigt, in welcher **B** mit den Spuren s_1, s_2 die Ebene der achsonometrischen Projektion und ${}_2X'O$, ${}_2Y'O$, ${}_2Z'O$ die Achsen derselben sind, während die Verhältnisse der Längen $XO:{}_2X'O$, $YO:{}_2Y'O$, $ZO:{}_2Z'O$ die zugehörigen Verkürzungsverhältnisse geben. Man hat zuerst die Transformation ${}_1x$ für ${}_1x$ als die Normale von O auf s_1 und hiernach die Transformation ${}_2x$ für ${}_2x$ als parallel zu ${}_1s_2$ mit den Projektionen der Achsenschnitte X, Y, Z vollzogen, während O unverändert blieb. In der Tat ist A

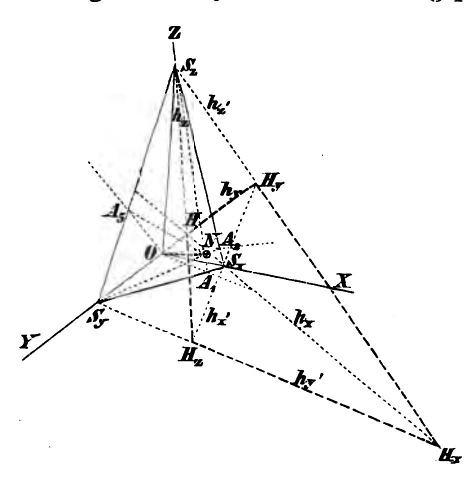


(Figur unten) die Projektion eines Punktes auf die fragliche Ebene oder das achsonometrische Bild desselben, wenn OX, OY, OZ die Projektionen der drei Koordinatenachsen und OA_x, OA_y, OA_z die Projektionen der drei vom Anfangspunkte O aus in ihnen

aufgetragenen Koordinaten x, y, z des Punktes A repräsentieren; und zugleich sind A' der achsonometrische Grundriß, A'' der achsonometrische Aufriß und A''' der achsonometrische Seitenriß desselben Punktes, der durch zwei dieser Projektionen — wir wollen setzen Bild und Grundriß — bestimmt wird. Dies alles bliebe selbst für jede schiefe Parallelprojektion unverändert gültig.



Für die Ermittelung der Richtungen der Achsenprojektionen und der entsprechenden Verkürzungsverhältnisse für die Orthogonalprojektion auf eine beliebige Ebene ist aber in § 47, Auf. 1 alles Nötige enthalten. Ist $S_x S_y S_z$ das Spurendreieck der Ebene der achsonometrischen Projektion (vorstehende Figur), so ist der Höhenschnittpunkt N desselben die orthogonale Projektion des Anfangspunktes O der Koordinaten auf dieselbe und NS_z, NS_y, NS_x sind die Projektionen der Achsen, insbesondere die Projektionen der Achsenabschnitte der neuen Projektionsebene. Man erhält aus der Kenntnis der wahren Längen OS_z, OS_y, OS_x derselben die Verkürzungsmaßstäbe $\cos\beta_1$, $\cos\beta_2$, $\cos\beta_3$, welche den Koordinaten x, y, z entsprechen oder die Winkel β_1, β_2, β_3, welche die Achsen OZ, OY, OX mit der neuen Projektionsebene einschließen. Das rechtwinklige Dreieck $S_z O A_1$ (vorstehende Figur), welches in N den Höhenfußpunkt auf seiner Hypotenuse hat, oder also das Dreieck NOS_z (vergl.



(Figur auf S. 366 oben), gibt in OS_z die Länge des einen Achsenabschnittes, und durch die bei N rechtwinkligen Dreiecke NOS_x, NOS_y erhält man die Längen der andern beiden OS_x, OS_y. (Vergl. Figur auf S. 303 und § 54, 30.)

Bemerkt man dann, daß die β_i die Komplemente der Winkel α_i der Projektionsebene $S_x S_y S_z$ gegen die Koordinatenebenen XOY, XOZ, YOZ sind, so erkennt man (§ 47), daß ihre Kosinusquadrate die Summe 2 geben müssen; oder, wenn die Längeneinheit e, nach den drei Achsen z, y, x aufgetragen, Projektionen von den bez. Längen e_1, e_2, e_3 gibt, daß

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 2e^2 \quad \text{und} \quad \cos^2\beta_i = \frac{2e_i^2}{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2},$$

also
$$\tan^2\beta_i = \frac{e_j^2 + e_k^2 - e_i^2}{2e_i^2}$$

ist. Die erste Relation genügt, um das Problem in der der praktischen Verwendung am meisten entsprechenden Form zu lösen. (Vergl. Aufg. 1.)

Zugleich knüpft sich daran die einfache Berechnung desselben. Die dreiseitige Ecke vom Scheitel O und den Kanten ON, OS_x, OS_y oder $O.NS_xS_y$ (Figur S. 366 unten) — analog die Ecken $O.OS_yS_z$, $O.NS_zS_x$ — liefert für den durch die Projektionen NS_x, NS_y der Achsen OS_x, OS_y eingeschlossenen Winkel S_xNS_y oder φ_1 die Formel

$$\cos\varphi_1 = -\tan\beta_2 . \tan\beta_3 = -\frac{1}{2e_2e_3}\sqrt{(e_1^2+e_3^2-e_2^2)(e_1^2+e_2^2-e_3^2)},$$

und zwei analoge Werte entspringen für $\cos\varphi_2$, $\cos\varphi_3$.

Es ist für die Anwendung besonders bequem, zwischen den drei Projektionen e_i der Längeneinheit e nach den Achsen einfache Verhältnisse vorauszusetzen, weil man dadurch imstande ist, die drei sonst nötigen Maßstäbe durch einen einzigen unter einfachen Reduktionen zu ersetzen. Die Resultate für die brauchbarsten Verhältnisse der e_i sind hier tabellarisch zusammengestellt.

	$e_1:e_2:e_3$	$\cos\beta_1$	$\cos\beta_2$	$\cos\beta_3$	φ_1	φ_2	φ_3
a)	1 : 1 : 1	0,816	0,816	0,816	120°	120°	120°
b)	2 : 1 : 2	943	471	943	131° 24½′	97° 11′	131° 24½′
	3 : 1 : 3	973	324	973	133° 24½′	93° 11′	133° 24½′
c)	5 : 4 : 6	806	645	967	108° 13′	101° 10′	150° 37′
	9 : 5 : 10	887	493	985	107° 49′	95° 11′	157°
	7 : 6 : 8	811	695	927	114° 46′	106° 59½′	138° 14½′

Man hat den ersten Fall wegen der Gleichheit der drei Maßstäbe als die isometrische Projektion, die Fälle b) nach der Übereinstimmung zweier Maßstäbe, die vom dritten Maßstab verschieden sind, als monodimetrische Projektionen benannt, und ihnen die letzten Fälle c) als anisometrische Projektionen entgegengesetzt.

Es ist zu bemerken, daß für die isometrische Projektion die Projektionsebene normal zu einer der Halbierungsachsen des Koordinatensystems (vergl. § 46, 4; § 51), für die monodimetrischen Projektionen aber normal zu einer der Halbierungsebenen desselben ist (§ 46, 3), und daß sie nur für die anisometrischen eine allgemeine Lage gegen dieses System besitzt. Dies hat zur Folge, daß in isometrischen Projektionen Gerade und Ebenen, die zu jener Halbierungsachse parallel sind, als Punkte und Gerade bez. erscheinen, in monodimetrischen Projektionen aber alle die Ebenen sich als Gerade abbilden, welche jener Halbierungsebene parallel sind. Da Linien und Ebenen von solcher Lage besonders oft an denjenigen Körperformen auftreten, welche eine reiche Symmetrie besitzen, so gewähren die bezüglichen Projektionen für solche nicht vorzugsweise die Bildlichkeit der Darstellung; z. B. also nicht für die Krystallformen des regulären Systems.*)

Bei der praktischen Anwendung wird man endlich beachten, daß Darstellungen mit starker Verkürzung der Achse OZ, wie im ersten, vierten und sechsten Falle der Tabelle, nicht für Gegenstände von solcher Art Verwendung finden sollen, die man nicht wohl z. B. von oben herab unter starker Neigung der projizierenden Strahlen gegen den Horizont sehen kann, weil sonst die starke Abweichung der achsonometrischen Darstellung derselben von dem gewohnten Gesichtsbilde ihr einen Teil ihres Wertes nimmt.

Wir widmen der direkten Behandlung der wahren Größen in den Aufgaben besondere Aufmerksamkeit, weil darin ein Hauptstück praktischer Brauchbarkeit der Methode enthalten ist; wir gehen dabei von der Kenntnis des Spurendreiecks aus, als welches jedes Dreieck angesehen werden kann, daß die Achsen zu seinen Höhen hat.

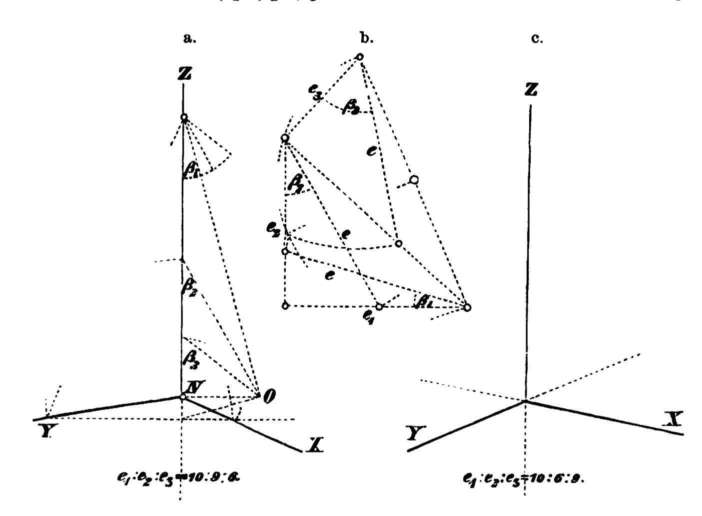
---

*) Die Figur auf S. 301 des § 46, 3, 4 ist nach dem Verhältnis 9:5:10, die meisten übrigen schematischen Figuren sind nach 2 : 1 : 2 konstruiert.

Des Übergangs von dem gegebenen Achsensystem zu einem neuen gedenken wir, um das Problem der Transformation auch hier anzudeuten, unten bei 14).

B. 1) Man konstruiere aus den Verhältnissen der $e_1 : e_2 : e_3$ (untenstehende Figur a. b. $= 10 : 9 : 6$; Figur c. $= 10 : 6 : 9$) die β_i und das Spurendreieck mit den Achsenprojektionen.

Man bildet (Figur b.) aus e_1 und e_2 als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck und aus der Hypotenuse desselben mit e_3 ein zweites, dessen Hypotenuse daher der Durchmesser des Kreises ist, für den die Seite des eingeschriebenen Quadrates die Länge e hat. Diese bestimmt als Hypotenuse mit e_1, bez. e_2, e_3 als der anliegenden Kathete die Winkel $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, deren Kosinus die Verkürzungsver-



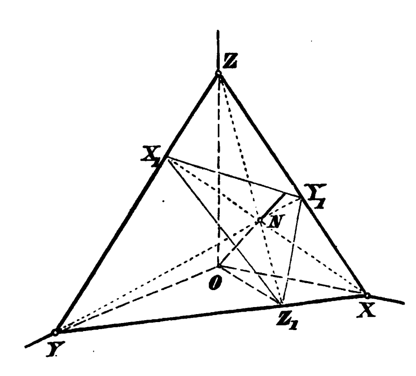
hältnisse sind. Mit denselben bildet man (Figur a.) rechtwinklige Dreiecke von einer Kathete NO an der Vertikalen NZ, schneidet diese Vertikale durch die Normale aus O zum Hypotenusenschenkel von β_1 und legt durch den Schnittpunkt eine Horizontale, welche von den aus N als Zentrum durch die Scheitel von β_2 und β_3 beschriebenen Kreisen in Punkten von NY bez. NX geschnitten wird.

2) Welchen Grenzwerten der e_i entsprechen die Projektionen auf die drei Koordinatenebenen?

3) Das achsonometrische Bild einer projizierenden Linie p ist ein Punkt und der achsonometrische Grundriß, Aufriß und Seitenriß derselben sind Parallelen durch diesen Punkt zu den Achsen z, y, x bez. Denn jener Punkt repräsentiert zugleich die drei Durchstoßpunkte der Linie p. (Man leite dasselbe aus Figur S. 370 ab.)

4) Die direkte Ableitung aus Figur auf S. 303, deren bezüglicher (d. h. nicht das System der h und H darstellender) Teil

hier zusammen mit dem Achsenkreuz achsonometrisch als untenstehende Figur mit den Buchstabenänderungen A_1, A_2, A_3 in Z_1, X_1, Y_1 S_x, S_y, S_z in X, Y, Z wiederholt wird, gibt noch das Folgende. Weil ein über XY als Durchmesser beschriebener Kreis durch die Punkte X_1, Y_1 geht, so ist



$$\angle Y_1 X_1 N = \angle NYX = \angle XZN = \angle NX_1 Z_1;$$

d. h. die Dreiecke $X_1 Y_1 N$ und YXN und ebenso $Y_1 Z_1 N$ und ZYN, $Z_1 X_1 N$ und XZN sind ähnlich, und N ist der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises für das Dreieck $X_1 Y_1 Z_1$. Bezeichnen wir durch r den Radius dieses Kreises, so hat man aus der ersten Ähnlichkeit

$$X_1 Y_1 : YX = r : NZ_1;$$

aber aus $\triangle XOY$ mit der zur Hypotenuse gehörigen Höhe OZ_1

$$YX : OX = OY : OZ_1,$$

und aus $\triangle ZOZ_1$ mit der Normale ON

$$NZ_1 : OZ_1 = ON : OZ, \quad OZ_1 : ON = OZ : NZ; \qquad \text{also}$$

$$X_1 Y_1 = r \frac{YX}{NZ_1} = \frac{r \,.\, OX \,.\, OY}{NZ_1 \,.\, OZ_1} = r \frac{OX \,.\, OY \,.\, OZ}{\overline{OZ_1}^2 \,.\, ON}$$

$$r = \frac{OX \,.\, OY \,.\, OZ}{\overline{ON}^3} \left(\frac{NZ}{OZ}\right)^2 = r \,.\, \frac{OX \,.\, OY \,.\, OZ}{\overline{ON}^3} \cos^2 \beta_1;$$

mit ebenso entspringenden analogen Werten für $Y_1 Z_1$ und $Z_1 X_1$. Daher ergibt sich

$$X_1 Y_1 : Z_1 X_1 : Y_1 Z_1 = e_1^2 : e_2^2 : e_3^2,$$

$$X_1 Y_1 : Y_1 Z_1 : Z_1 X_1 = \cos^2 \beta_1 : \cos^2 \beta_3 : \cos^2 \beta_2 = e_1^2 : e_3^2 : e_2^2;$$

oder symmetrischer mit Bezeichnung der e und β mit dem Index der Achse, in oder an der sie liegen,

$$X_1 Y_1 : Y_1 Z_1 : Z_1 X_1 = \cos^2 \beta_z : \cos^2 \beta_x : \cos^2 \beta_x = e_z^2 : e_x^2 : e_y^2,$$

ein zur Konstruktion gleichfalls sehr bequemer Satz.

Wenn man ein Dreieck $X_1 Y_1 Z_1$ verzeichnet, dessen Seiten den Quadraten der e_i proportional sind, so erhält man in den Halbierungslinien seiner Außenwinkel die Seiten des Spurendreiecks der Ebene des achsonometrischen Bildes, und in denen seiner innern Winkel oder den Höhen des letzten Dreiecks die Bilder der Achsen.

Die Möglichkeit der achsonometrischen Darstellung nach gegebenen e_i fordert also, wie auch die Formel für $\tan^2 \beta_i$ auf S. 367 lehrt, daß die Quadratsumme von zweien derselben größer sei als das Quadrat des dritten.

5) Die isometrische Projektion des Würfels mit zu den Achsen parallelen Kanten ist das reguläre Sechseck mit seinen Diagonalen. (Vergl. Figur auf S. 349, Grundriß.)

Man stelle die Formen des regulären Krystallsystems für gegegebene Parameterverhältnisse anisometrisch dar.

6) Man zeichne achsonometrisch das Tetraeder als Hälftgestalt des Oktaeders und das Rhomboeder als solche der sechsseitigen Doppelpyramide; ebenso die Durchdringung eines regulären Dodekaeders mit einem Tetraeder.

7) Man entwickele nach derselben Methode die orthogonalen Parallelprojektionen von Polyedern mit drei rechtwinkligen Symmetrieachsen bei schräger Lage dieser Achsen gegen die Projektionsebenen.

8) Die Ableitung wahrer Größen aus der Bestimmung durch achsonometrische Projektion erfolgt selbstverständlich wie immer durch Umlegung ihrer Ebene in die Bildebene oder in eine zu ihr parallele Ebene. Man hat daher ein Spurendreieck $S_x S_y S_z$ oder XYZ der Bildebene einzuzeichnen, d. h. ein Dreieck, welches die Achsen NX, NY, NZ zu Höhen hat, und man kann dasselbe durch einen Hauptpunkt der zu betrachtenden Figur hindurchlegen, um Vereinfachungen zu erlangen. Die Grundlage der Konstruktionen ist die Umlegung der Koordinatenebenen XOY, YOZ, ZOX, welche schon in § 47, 1; Figur auf S. 303 enthalten ist; dort sind $S_x O_1^* S_y$, $S_y O_2^* S_z$ die Umlegungen der Dreiecke $S_x O S_y$, $S_y O S_z$ um die zugehörigen Spuren $S_x S_y$, $S_y S_z$ bez. in die Bildebene — aber es ist zu bemerken, daß O_1^* auch als Schnittpunkt der Höhe $S_z N A_1$ mit dem über $S_x S_y$ als Durchmesser beschriebenen Kreis erhalten wird, etc. Ist also XYZ ein Spurendreieck der Achsonometrie mit den Achsen NX, NY, NZ, so erhält man die Umlegung O_1 von O mit XOY um XY in die Tafel in dem Schnitt von NZ mit dem über XY als Durchmesser beschriebenen Kreis.

Ist dann P' ein Punkt und s_1 eine Gerade in XOY — jener der achsonometrische Grundriß eines Punktes P im Raum, diese etwa die Horizontalspur einer beliebigen Ebene —, so erhält man ihre Umlegungen in die Bildebene um XY durch die orthogonale Affinität; dort zieht man NP', verbindet den Schnittpunkt von NP' mit XY mit O_1 und hat hier im Schnitt mit dem Perpendikel von P' auf XY die Umlegung (P'); hier geht man vom Schnittpunkt von s_1 mit NX normal zu XY bis O_1X und verbindet diesen Punkt mit dem Schnitt von s_1 in XY, um (s_1) zu erhalten.

Fällt man nun z. B. von (P') auf (s_1) das Perpendikel (n'), so geben seine Schnitte mit XY, mit O_1X, O_1Y Punkte von n' — die beiden letzten in Perpendikeln zu XY auf NX, NY; n' ist der achsonometrische Grundriß der Normale, die vom Punkte P auf eine Ebene von der ersten Spur s_1 gefällt wird.

Kennt man ihre zweite Spur s_2, so hat man in der Verbindungslinie der Schnitte von s_1 mit XY und von s_2 mit XZ ihre Schnittlinie s mit der Bildebene und erhält im Perpendikel von P auf diese das achsonometrische Bild der Normale von P auf die Ebene von den Spuren s_1, s_2. Daraus ist ihr Fußpunkt in dieser und ihre wahre Länge von P bis zu ihm abzuleiten, natürlich etwa durch Umlegung mit der ersten projizierenden Ebene nn'.

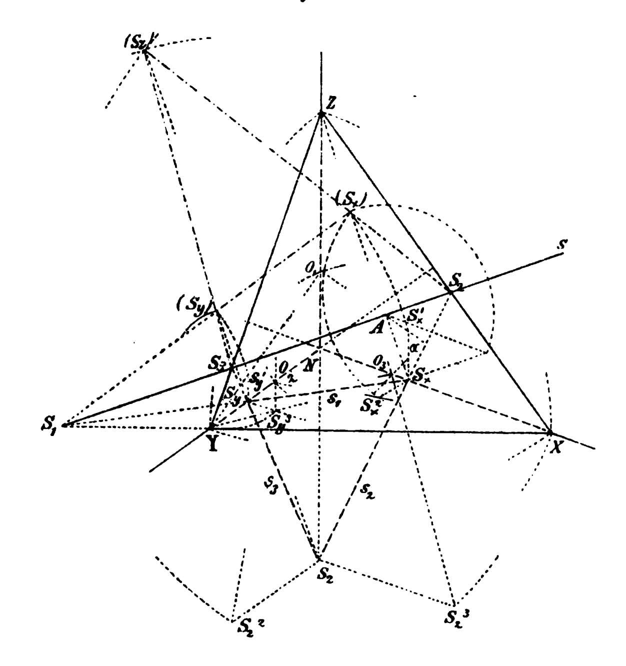
Nach einer andern einfachen Überlegung ist n' ohne Umlegung zu finden als die durch P' gehende Normale zum Bild der Schnittlinie zwischen der Bildebene XYZ und der durch s_1 gehenden Parallelebene zu z; endlich auch nach der Lehre von der Involution als sechster der Parallelen zu s_1 entsprechender Strahl in der Involution um P', die die zwei Paare parallel und normal zu XY und parallel zu NX, NY bestimmen, welche offenbar achsonometrische Grundrisse von Rechtwinkelschenkeln um P' sind.

Man löse die bez. Aufgaben des § 10 in orthogonaler Achsonometrie.

9) Ist eine Kugel durch das achsonometrische Bild M und den achsonometrischen Grundriß M' ihres Mittelpunktes und ihren Radius r bestimmt, so gelangt man zur Darstellung ihrer den Koordinatenebenen parallelen Hauptkreise vermittelst der vorher betrachteten Umlegung bez. Aufrichtung; man führt zur Vereinfachung für den horizontalen Hauptkreis XY durch M, indem man NZ mit der zu $M'N$ Parallelen durch M in N^* schneidet und durch den Schnitt parallel zu NX, NY die neuen Achsen zieht, welche dann die durch M rechtwinklig auf NZ gehende Spur der Horizontalebene in X^*, Y^* begrenzen. Die Umlegung von N^* nach O_1^* erlaubt dann das Bild des um M mit r beschriebenen Kreises nach der orthogonalen Affinität sogleich einzuzeichnen. Natürlich werden die drei Ellipsen, welche die Bilder dieser Hauptkreise sind, von dem um M mit r als Radius beschriebenen Umrißkreis der Kugel gleichzeitig je doppelt berührt — nach drei Durchmessern, die zu den Achsenrichtungen normal sind; etc.

10) Die Umlegung einer durch zwei Spuren $S_x S_y$ oder s_1, $S_x S_z$ oder s_2 — oder zwei sich schneidende Gerade, drei Punkte, etc. — bestimmten Ebene **E** in die Bildebene XYZ geschieht durch Drehung um ihre Schnittlinie s in derselben, d. h. die Verbindungslinie der Schnittpunkte S_1 von XY mit s_1, S_2 von XZ mit s_2 und S_3 von YZ mit s_3 (§ 19, 11). Da man jedoch das Spurendreieck der Bildebene durch S_x z. B. führen kann, so wird s zur Verbindungslinie X, S_x mit dem Schnittpunkt S_3 von s_3 mit YZ, und die Umlegung der Ebene ist vollzogen, sobald man die Punkte S_y, S_z oder vielmehr einen derselben umgelegt hat, also mit der Angabe von (S_y) resp. (S_z). Da aber (S_y) und (S_z) bez. in den von S_y, S_z gefällten Senkrechten zu s liegen, so genügt die Angabe der wahren Längen XS_y, XS_z aus der Umlegung der Koordinatenebenen XOY, XOZ bez. zur Bestimmung derselben; oder

noch besser weil kürzer, der wahren Längen $S_3 S_y$, $S_3 S_z$ durch die Hilfsumlegung der Ebene YOZ. Man bestimmt aus O_1 mittelst $O_1 Y$ in dem von S_y zu XY gefällten Perpendikel $(S_y)_1$ und mittelst des von X durch dieses geführten Kreisbogens auf dem Perpendikel von S_y zu s den Punkt (S_y); ebenso aus O_2 durch $O_2 Z$ in dem von S_z zu XZ gefällten Perpendikel $(S_z)_2$ und mittelst des aus X hindurchgeführten Kreisbogens auf dem Perpendikel von S_z zu s die Umlegung (S_z). Man erhält sowohl für (S_y) als für (S_z) zwei Lagen, welche so zu kombinieren sind, daß $(S_y)(S_z)$ durch S_3 geht. (Es ist ersichtlich, daß auch für S_x als verschieden von X die Bestimmung von $(S_y)(S_z)$ durch die Ermittelung der



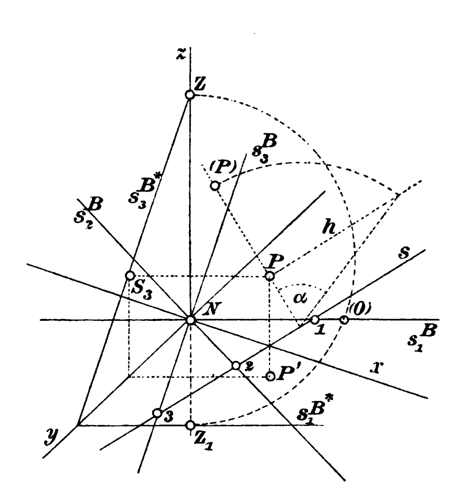
wahren Längen von XS_y, XS_z oder von $S_3 S_y$, $S_3 S_z$ ebenso erfolgt, und daß man dann (S_x) als Schnitt von $(S_y)S_1$, $(S_z)S_2$ mit dem Perpendikel von S_x auf s erhält.)

Jeder der Punkte (S_y), (S_z) genügt, die Umlegung und Aufrichtung aller in der Ebene **E** gelegenen Figuren zu vollziehen, weil dieselben für s als Achse mit dem achsonometrischen Bilde S_y, S_z in orthogonaler Affinität sind. Obenstehende Figur gibt die allgemeine Lösung in vollständigster Form: Mittelst O_1, O_2, O_3 sind die Umlegungen von XOY, XOZ, YOZ und dadurch S_x^1 und S_y^1, S_x^2 und S_z^2, S_y^3 und S_z^3 ermittelt; daraus (S_x), (S_y) und (S_z) in den Perpendikeln von S_x, S_y, S_z auf s und in den Kreisen um S_1 durch S_x^1 und um S_2 durch S_x^2, um S_1 durch S_y^1 und um S_3

durch S_y^3, um S_2 durch S_z^2 und um S_3 durch S_z^3; praktisch genügt die Bestimmung von (S_z) und dazu das Perpendikel von S_z auf s und der Kreis aus S_2 durch S_z^2. Man führt die Bestimmung der wahren Größe des Winkels zweier Geraden, die durch ihre achsonometrischen Bilder g, l und Grundrisse g', l' bestimmt sind, sofort darauf zurück. Es ist offenbar, daß auch der Winkel α der betrachteten Ebene gegen die Bildebene hier mit erhalten wird; man zieht $S_x(S_x)$ bis A in s und schneidet die Parallele zu s durch S_x mit dem von da durch (S_x) beschriebenen Kreise, und erhält bei A den Winkel α.

Den besonderen Fall der Umlegung einer projizierenden d. h. zu einer der Achsen OX, OY, OZ parallelen Ebene behandelt man durch Umlegung der begrenzten Spur.

11) Die Konstruktion des Drehungswinkels α der Umklappung aus S_x im vorigen führt, weil sie zugleich die Höhe von S_x über der Bildebene als α gegenüberliegende Kathete liefert, zu folgender Behandlung des Umlegungsproblems: Gegeben die Bildebene und in ihr die Drehungsachse der Umlegung s, dazu ein Punkt P der umzulegenden Ebene (also sP) durch sein achsonometrisches Bild P und seinen achsonometrischen Grundriß P'; gesucht die Umlegung (P) von P mit sP in die Bildebene. So bestimme man die Entfernung des Punktes P von der Bildebene nach § 47, 1 und aus ihr und dem Abstand des P von s den Drehungsradius, der von s aus in dem Perpendikel von P zu s abgetragen, die beiden Umlegungen (P) und zugleich den Drehungswinkel α liefert. Am angeführten Orte ist aus dem Spurendreieck einer Ebene ihr Abstand vom Achsenschnittpunkt O doppelt in O_1N und O_2N bestimmt als zur Hypotenuse gehörige Höhe eines der rechtwinkligen Dreiecke in den durch die Normale ON der Ebene mit den Achsen OZ, OY, OX bestimmten Ebenen — in der Textfigur von § 47 A_1OS_z, A_2OS_y, A_3OS_x. Wählt man die Bildebene **B** der Umklappung als durch O gehend, sodaß ihre Spuren XY, YZ, ZX die im Achsenschnittpunkt auf NZ, NX, NY errichteten Normalen sind, so ist die Höhe von P über ihr, dem Abstande der zu ihr durch P gelegten Parallelebene **B*** vom Achsenschnittpunkt gleich. Man bestimmt diese mittelst einer



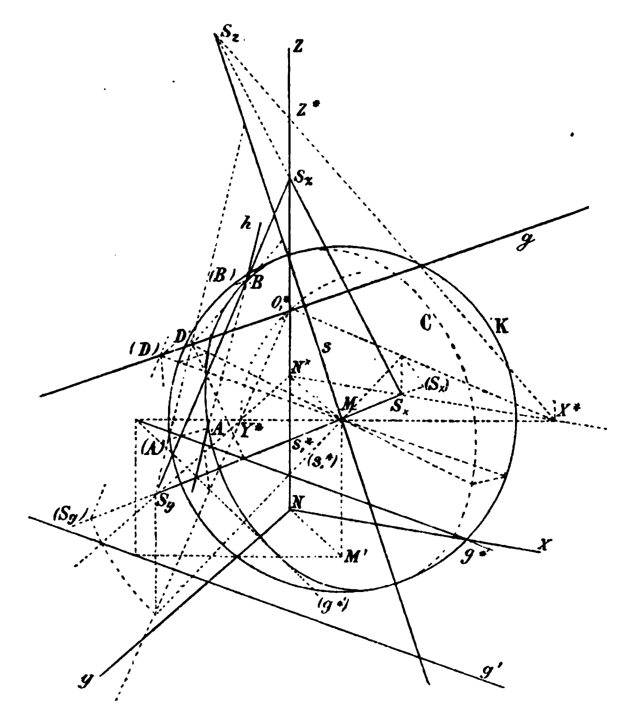
durch P gehenden Parallelen zu xy (achsonometrischer Grundriß durch P' parallel XY), bez. ihrer Durchstoßpunkte S_2, S_3, welche als Vertikalspuren von $\mathbf{B}^*$ die von ihnen ausgehenden Normalen zu y und x liefern und damit auch die Horizontalspur festsetzen. In der Figur ist in die Bildebene $\mathbf{B}$ durch O (Spuren $s_1^B, \ldots$) umgelegt; die Bildebene $\mathbf{B}^*$ durch P ist durch den Durchstoßpunkt S_3 ihrer horizontalen Spurparallele bestimmt; die Ordinate $N(O)$ des Halbkreises über dem Durchmesser ZZ_1 in N ist die verlangte Höhe h; ihre rechtwinklige Antragung an die Normale von P zu s in P gibt den Drehungsradius und den Drehungswinkel der Umklappung (P).

12) Wenn nun von einem Kreise die Ebene $\mathbf{E}$, der Mittelpunkt M in derselben und der Radius r gegeben sind, so erhalten wir sein achsonometrisches Bild K aus dem mit r um M beschriebenen Kreis (K) durch Aufrichtung; am bequemsten, wenn wir eine durch M selbst hindurchgehende Bildebene benutzen, sodaß M als in s liegend auf seinem Platze bleibt; der in s liegende Durchmesser von (K) ist die große Achse der Bildellipse und mittelst des Winkels α erhält man die kleine.

Und wenn unter 8) die Darstellung eines Kugeloktanten oder eines trirektangulären Kugeldreiecks erhalten wurde, so kann man hiernach die achsonometrische Darstellung von sphärischen Dreiecken aus ihren Bestimmungsstücken vollziehen.

13) Man soll die Berührungspunkte A, B der durch eine gegebene Gerade g an die durch Mittelpunkt M und Radius r bestimmte Kugel gehenden Tangentialebenen konstruieren; oder man soll die Schnittlinie g der Tangentialebenen konstruieren, welche die Kugel in den Schnittpunkten A, B mit einer Geraden h berühren. Im ersten Falle hat man vom Schnittpunkt D der g mit ihrer Normalebene durch den Kugelmittelpunkt M an den von dieser aus der Kugel geschnittenen Kreis die Tangenten DA und DB zu legen; im zweiten legt man die Ebene Mh, in den Schnittpunkten A, B ihres Kugelkreises mit h die sich in D schneidenden Tangenten und durch D die Normale g zu Mh. Offenbar sind alle diese Operationen nach dem Vorhergehenden direkt achsonometrisch ausführbar. Die Figur auf S. 376 enthält die vollständige Durchführung. Man hatte M, M', g, g' und den Radius, also den achsonometrischen Umrißkreis K der Kugel gegeben mit dem Achsenkreuz N, X, Y, Z; außer den Berührungspunkten A, B der durch g an die Kugel gehenden Tangentialebenen ist das Bild C des größten Kreises ermittelt, nach welchem die zu g parallelen Tangenten und Tangentialebenen die Kugel berühren, also die Selbstschattengrenze auf der Kugel für Beleuchtung durch Lichtstrahlen, welche zu g parallel sind. Durch MN^* parallel $M'N$ hat man zuerst unter Festhaltung der Achse z die Koordinatenebene xy und die Bildebene durch M gelegt in $X^*N^*Y^*$ und $X^*Y^*Z^*$; man hat auch den achsonometrischen Grundriß $g^{*\prime}$

von g mit übertragen. Dann ist das Perpendikel s von M zu g die Schnittlinie der Bildebene mit der durch M gehenden Normalebene zu g und S_z in X^*Z^* ihr zweiter Durchstoßpunkt; mittelst der Umlegung $X^*O_1^*Y^*$ von $X^*O^*Y^*$ in die Bildebene hat man die Umlegung $g^{*\prime}$ in $(g^{*\prime})$ eingetragen und als die Normale von M zu ihr (s_1^*), die Umlegung der horizontalen Spur der Normalebene durch M zu g, somit in s_1^* diese selbst und ihre Achsenschnittpunkte S_x, S_y erhalten, welche sodann die Spuren s_2 (von S_x nach S_z) und s_3 liefern und mittelst ihrer wahren Entfernungen von M die Umlegungen (S_x), (S_y). Die Benutzung der ersten projizierenden



Ebene von g im Schnitt mit der Normalebene $S_xS_yS_z$ hat den Schnittpunkt D und dieser seine Umlegung (D) mit jener in die Bildebene gegeben; K ist zugleich die Umlegung des von ihr aus der Kugel geschnittenen größten Kreises, sodaß die Berührungspunkte $(A)(B)$ der von (D) an K gehenden Tangenten durch ihre Wiederaufrichtung die achsonometrischen Bilder der Berührungspunkte A, B liefern. Die Erklärung der Bestimmung der Schattengrenzellipse C überlassen wir dem Leser.

14) Wenn die achsonometrischen Bilder x_1, y_1, z_1 von drei durch O gehenden zueinander rechtwinkligen neuen Achsen und der achsonometrische Grundriß x_1' der einen von ihnen gegeben sind, so soll

man die achsonometrischen Grundrisse y_1', z_1' der beiden andern bestimmen und sodann den achsonometrischen Grundriß P_1' eines durch sein Bild P und seinen achsonometrischen Grundriß P' gegebenen Punktes ableiten.

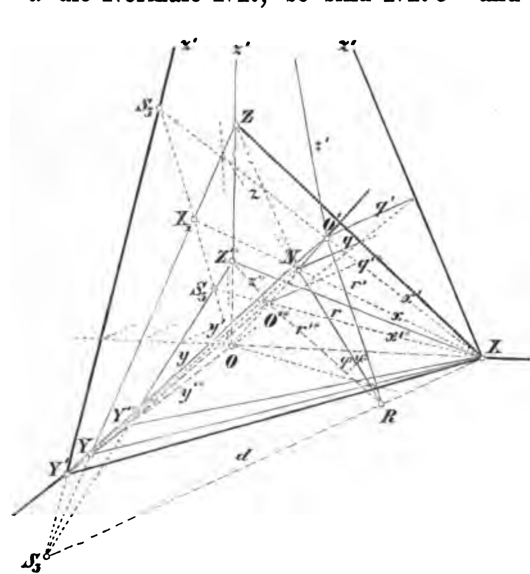
Ein Dreieck XYZ, dessen Ecken in den gleichnamigen Achsen X, Y, Z liegen, während seine Seiten zu den ungleichnamigen Achsen normal sind, ist das Spurendreieck der Bildebene; die erste projizierende Ebene von x_1 schneidet dieselbe in einer Geraden, die von Z nach dem Schnittpunkt der ersten Spuren XY und x_1' geht, und welche in x_1 den Durchstoßpunkt X_1 dieser Achse mit der Bildebene bestimmt. Man erhält jetzt durch Perpendikel von X_1 zu z_1 und y_1 die beiden anderen Ecken des Spurendreiecks in Bezug auf die neuen Achsen Y_1, Z_1. Die Geraden ZY_1, ZZ_1 bestimmen dann in XY zwei Punkte, durch welche die achsonometrischen Grundrisse von y_1 und z_1 hindurchgehen.

Nun ist P_1' die achsonometrische Projektion des Punktes, in dem eine durch P gezogene Parallele zu z_1 (Bild durch P parallel zu z_1, Grundriß durch P' parallel z_1') die Ebene $x_1 y_1$ trifft, und wird daher leicht konstruiert.

61. Wenn man auch schiefe Parallelprojektionen zuläßt (vergl. § 43, 3), so gilt als höchst bequeme Grundlage der achsonometrischen Projektion der Satz: Drei Strecken von beliebigen Längen und Richtungen, die in einer Ebene von einem Punkte ausgehen, bilden eine Parallelprojektion des Systems von drei gleichlangen Stücken der zueinander rechtwinkligen und von einem Punkte ausgehenden Achsen OX, OY, OZ. Darnach können die Richtungen der Achsenbilder und die Verkürzungsverhältnisse derselben willkürlich angenommen werden — nur daß nicht die drei ersten zusammenfallen und nicht zwei der letzteren Null sein dürfen.

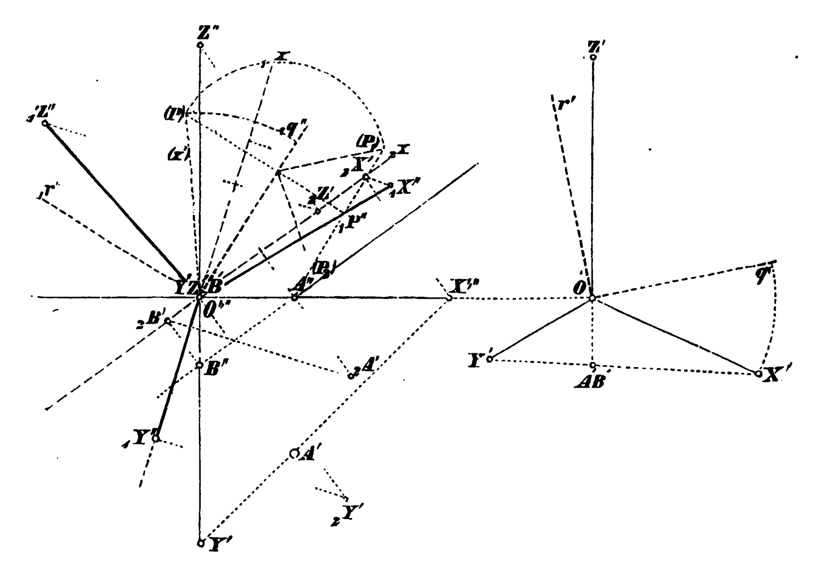
Sei in der Figur auf S. 378 die Gerade ON die projizierende Gerade des Durchschnittspunktes O der drei Koordinatenachsen OX, OY, OZ und XYZ die durch den Punkt N derselben gehende zu ihr normale Ebene. Eine durch X gelegte zu ON nicht normale Ebene, die wir als Projektionsebene denken wollen, wird dann XYZ in einer durch X gehenden Geraden d vom Durchstoßpunkt S_3 in der Ebene der y, z schneiden und auf ON einen Punkt O' bestimmen, der das bezügliche Bild des Anfangspunktes O wäre. Trägt man die Strecke NO' von N aus gegen O in NO'^* ab, so ist die durch d und O'^* bestimmte Ebene zur Ebene dO' orthogonal symmetrisch in Be-

zug auf XYZ, und im Falle der Benutzung derselben als Bildebene würden die Bildrichtungen und die Verkürzungsverhältnisse der Achsen OX, OY, OZ offenbar dieselben sein als in $O'd$. Aus dem Durchstoßpunkt X_1 der Geraden XN in ZOY erhält man dann in der Figur die gleichnamigen Durchstoßpunkte von XO' und von $XO'*$ und durch Verbindung derselben mit S_3 die Spuren $Y'Z'$ und $Y'*Z'*$ der besprochenen Ebenen in YOZ, sowie aus diesen ihre durch X gehenden Spuren in XOY, XOZ bez. Fällen wir von N auf d die Normale NR, so sind NRO' und $NRO'*$ die einander gleichen Neigungswinkel der Ebenen $XY'Z'$, $XY'*Z'*$ gegen die Ebene XYZ oder die Komplemente der von ihnen mit der Richtung des projizierenden Strahles gebildeten Winkel. Ziehen wir durch O', N und $O'*$ die Parallelen $O'Q'$, NQ und $O'*Q'*$ zu d, so sind die in den Ebenen dO' und $dO'*$ bez. liegenden rechten Winkel $Q'O'R'$ oder wie in der Figur (q', r') und $Q'*O'*R'*$ oder $(q'*, r'*)$ gleichzeitig in QNR oder (q, r) orthogonal auf XYZ projiziert. Damit sind die Beziehungen hervorgehoben, welche erforderlich sind, um zu den drei gegebenen Bildern $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ von drei zueinander rechtwinkligen und gleich langen Strecken O_0X_0, O_0Y_0, O_0Z_0 die Richtung des projizierenden Strahls p und die Stellung der Bildebene zu bestimmen, d. h. den Satz zu beweisen und zugleich die richtige Benutzung des Bildes zu sichern.



Wir denken das Tetraeder $O_0X_0Y_0Z_0$ mit den drei gleichlangen zueinander rechtwinkligen Kanten O_0X_0, O_0Y_0, O_0Z_0 im Raum bestimmt, wie es dies im Falle der Anwendung ist,

und nehmen an, das Viereck $O'X'Y'Z'$ in der Bildebene (folgende Figur rechts) sei eine Parallelprojektion desselben oder genauer gesprochen einer solchen ähnlich (§ 21, c); wobei wir ausdrücklich bemerken, daß diese Punkte X', Y'; Z' von denen der vorigen Erörterung und Figur auf S. 378 verschieden sind. Die Richtung der entsprechenden Strahlen bestimmt sich dann wie folgt: Der Schnittpunkt von zwei Gegenseiten im Bildviereck z. B. von $X'Y'$ und $O'Z'$ ist das Bild A' eines Punktes A in der Diagonale XY und zugleich das Bild B' eines Punktes B in der Diagonale OZ; die Punkte A und B



in XY und OZ bez. sind durch die Teilverhältnisse bestimmt, nach welchen sie diese Strecken teilen und die § 21, a) den Teilverhältnissen gleich sind, nach welchen der Punkt $A'B'$ die Strecken $X'Y'$, bez. $O'Z'$ teilt. Die Gerade AB im Original erscheint als ein Punkt im Bilde und gibt die Richtung der projizierenden Strahlen an, welche von diesem Original zu diesem Bilde führen. Diese Richtung ist somit stets auf nur eine Weise bestimmt, so lange O', X', Y', Z' ein Viereck bilden.

Legen wir dann durch die Kanten OX, OY, OZ des Originals die projizierenden Ebenen von der Richtung R von AB, so bilden dieselben ein Ebenenbüschel $OR.XYZ$, dessen Schnitt mit der unbekannten Projektionsebene dem gegebenen Strahlen-

büschel $O'.X'Y'Z'$ gleich sein muß. Dies bestimmt die beiden Lagen, welche für die Projektionsebene möglich sind.

Sei das durch die Normalebene zur Scheitelkante aus dem Ebenenbüschel $OR.XYZ$ geschnittene Strahlenbüschel $N.XYZ$ oder ein ihm paralleles xyz aus O, so ist das Büschel $O'.X'Y'Z'$ so zu legen, daß $O.xyz$ die Orthogonalprojektion desselben ist. Diese Büschel, von denen das eine gegeben war und das andere nun leicht konstruierbar ist, sind sonach projektivisch; denken wir die entsprechenden Rechtwinkelpaare $q'r'$, qr derselben, so gibt die einfache Bemerkung das Mittel zur Bestimmung der Lage der Ebene des Büschels $O'.X'Y'Z'$ oder der Projektionsebene, daß die Orthogonalprojektion eines rechten Winkels nur dann ein rechter Winkel ist, wenn einer seiner Schenkel der Projektionsebene parallel ist oder in derselben liegt. Wir ermitteln daher in den durch drei entsprechende Paare bestimmten Büscheln $O'.X'Y'Z'$ und $O.xyz$ die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel q', r' und q, r (§ 18, 5 f.) und bringen q mit q' zur Deckung. Da nun von den spitzen Winkeln (q, x) und (x, r) der eine größer und der andere kleiner sein muß als der ihm entsprechende Winkel (q', x') bez. (x', r'), weil die Summe beiderseits einem Rechten gleich ist, also z. B. $\angle(q, x) < \angle(q', x')$, so sind zwei Stellungen der Ebene des Büschels $O'.X'Y'Z'$ möglich, für welche q' in q fällt und zugleich x' in die ihm entsprechende Ebene ORX kommt. Offenbar sind dieselben zur Richtung der projizierenden Strahlen oder zur Ebene $qq'R$ symmetrisch.

Man konstruiert somit zwei Lagen der Projektionsebene, welche allen Bedingungen genügen. Dieselben fallen nur dann in eine einzige zusammen, wenn die Projektion eine orthogonale wird.

Die Figur auf S. 379 enthält die vollständige Durchführung für das Achsenkreuz $O'.X'Y'Z'$. Durch die Teilverhältnisse von A' in $X'Y'$ und von B' in $O'Z'$ (Figur auf S. 379 rechts) sind die Punkte A, B und die Richtung der projizierenden Strahlen als Richtung der Geraden $A'B'$, $A''B''$ (Figur auf S. 379 links) bestimmt. Dann ist der Normalschnitt des Ebenenbüschels, welches diese Richtung mit den Koordinatenachsen bestimmt, auf dem Wege der Transformation ermittelt, indem die Projektionen der Achsen auf eine Ebene konstruiert

sind, die zu AB normal ist (Figur auf S. 379 links); die sukcessiven Transformationen um die Achse y mit der neuen Achse $_2x$ und nach ihr um die Achse z mit der neuen Achse $_1x$ führen dazu; O_1X'', O_1Y'' und O_1Z'' sind die Endprojektionen und bilden das Büschel des Normalschnittes, das Büschel $O.xyz$ des Vorigen.

Die Rechtwinkelpaare sind q', r'; $_1q''$, $_1r''$ — ihre Konstruktion (§ 18, 6) ist als bekannt unterdrückt — und es ist, wie im vorigen vorausgesetzt wurde, so bezeichnet, daß man hat $\angle(q', x') > \angle(_1q'', _1x'')$. Daher ist $\angle(q', x')$ in $_1q''O(x')$ angetragen und ein Punkt P seines Schenkels x' durch Drehung um O_1q'' in die Ebene gebracht, welche in $_1x''$ normal zur Tafel ist; P_1, P_2 sind die beiden in Umlegung eingezeichneten entsprechenden Lagen, deren jede eine Projektionsebene bestimmt, bez. $P_1, {_1q''}$; $P_2, {_2q''}$. Sie liefern die von den Projektionsebenen mit der Normalebene eingeschlossenen Winkel φ. Wie man daraus die Richtung der projizierenden Strahlen in Bezug auf die Ebene des Bildes $O'.X'Y'Z'$ erhält, ist evident.

Um die wahren Maßstäbe zu erfahren, nach welchen in den Achsen aufzutragen ist, hat man nur etwa das Verhältnis $OX : O'X$ (Figur auf S. 378) zu bestimmen. Man wird von OX als einer gegebenen Größe ausgehen, durch X die Gerade d parallel $_1q''$ in Figur links auf S. 379 ziehen, von N aus die Normale NR auf sie fällen, aus ihr und dem anliegenden Winkel φ das bei N rechtwinklige Dreieck $NO'R$ zusammensetzen, um dann aus NO' und NX als Katheten die Hypotenuse $O'X$ zu bilden. Die Maßstäbe der y und z sind dadurch mit bestimmt.

Es ist noch zu bemerken, daß diese Konstruktion die Rechtwinkligkeit der Koordinatenachsen OX, OY, OZ, die wir voraussetzen, nicht fordert, daß sie also den Satz auch für die Ausmessung in irgend einem schiefwinkligen Achsensystem begründet. So ist derselbe die wahrhaft allgemeine Grundlage der Achsonometrie. Wenn man das Dreieck der Diagonalpunkte des Vierecks $O'X'Y'Z'$ betrachtet, also das Dreieck der Punkte $X'Y', O'Z'$; $Y'Z', O'X'$; $Z'X', O'Y'$, so liefert es in der oben entwickelten Weise drei Kanten AB, CD, EF eines prismatischen Mantels im Tetraeder und die Aufgabe der Bestimmung der Projektionsebene läßt sich auch so aussprechen:

Man soll die Lage der Ebenen bestimmen, welche diesen Mantel in einem dem besagten Diagonaldreieck ähnlichen Dreieck schneiden. (Vergl. § 54, 11.) In der Tat, wenn die Dreiecke der Diagonalpunkte zweier ebenen Vierecke ähnlich und ähnlich gelegen sind, so sind die entsprechenden Seiten beider Vierecke Parallelen, weil die Kollineationsachse derselben unendlich fern ist. (§ 22, c; § 23.)

Auf die andere von einem Spurendreieck ausgehende Behandlung des Problems weisen wir in den Beispielen 9) bis 11) hin.

Allgemein gefaßt ist der Hauptsatz dieses Paragraphen ein Spezialfall der Bestimmung kollinearer Systeme. Wir sahen (§ 44), daß durch fünf Ebenen oder Punkte des einen und die entsprechenden des andern Systems zwei solche Räume bestimmt sind; sollen sie affin sein, so entspricht der unendlich fernen Ebene des einen die unendlich ferne Ebene im andern; zwei Tetraeder, welche Ecke für Ecke einander entsprechen, bestimmen somit zwei affine Systeme, die entsprechenden projektivischen Reihen in ihren Kanten sind speziell ähnliche Reihen. (§ 17, 5.) Ist das eine der Systeme eine ebene Abbildung oder ein unendlich dünnes Relief (§ 43), so haben wir ein Viereck in demselben als entsprechend einem Tetraeder des Originalraums.

Auf die rechnerische Behandlung gehen wir nicht ein; es mag nur erwähnt werden, daß die Grundgleichung

$$\left(\frac{e_x}{e}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{e}\right)^2 + \left(\frac{e_z}{e}\right)^2 = 2\ (\S\ 60) \text{ in } \left(\frac{e_x}{e}\right)^2 + \cdots = 2 + \tan^2\varphi$$

übergeht.

B. 1) Man konstruiere den Normalschnitt des Ebenenbüschels $OR . XYZ$ durch das Spurendreieck und die Höhen desselben für eine zu OR oder AB normale Ebene — durch Umlegung statt durch Transformation.

2) Wenn die Achsen $O'X'$ und $O'Z'$ oder $O'Y'$ und $O'Z'$ im Bilde rektangulär sind, so wird die eine Projektionsebene parallel der Ebene XOZ, YOZ bez.; die andere ist zu ihr orthogonalsymmetrisch nach dem projizierenden Strahl. Man erhält eine hieraus zu erläuternde schiefe Parallelprojektion, die man als Cavalierperspektive bezeichnet.

3) Um ein achsonometrisches Bild dem zentralen Bilde eines Objekts für ein bestimmtes Zentrum möglichst ähnlich

zu machen, kann man drei zueinander normale Hauptlinien des Objekts zentral projizieren und die Bilder derselben nach Richtungen und Längen als Achsenbilder der allgemeinen achsonometrischen Darstellung zu Grunde legen. Man erreicht dadurch eine um so engere Annäherung an das zentrale Bild, je größer die Distanz für dasselbe war. Tafel II gibt hierzu in den drei Figuren rechts ein Beispiel, für dessen Erläuterung wir auf das Figurenverzeichnis S. XXIV verweisen.

4) Nur in der Richtung der projizierenden Strahlen gesehen ist die Darstellung eines Objekts nach dem hier entwickelten Verfahren bildlich; die Vorteile, die es dem Zeichner bietet, sind begleitet von der Gefahr der Verzerrung beim normalen Betrachten.

5) Man erläutere, wie ein gegebenes Tetraeder durch schiefe Parallelprojektion ähnlich einem beliebig gegebenen Viereck abgebildet wird.

6) Man erläutere den Übergang von einem beliebigen Tetraeder und seinem Bildviereck zu einem solchen mit rechtwinkliger Ecke und gleichlangen Kanten an derselben, und dem Bildviereck, welches ihm entspricht.

7) Man bestimme die beiden Stellungen der Ebenen, durch welche aus einem vierseitig prismatischen Mantel von als Parallelogramm gegebenem Normalschnitt Quadrate geschnitten werden; oder allgemeiner Rhomben von gegebenem Winkel.

8) Es ist zu untersuchen, welche Geltung und Bedeutung die Lehre von der Affinität für die Darstellung ebener Systeme (§ 22, a.; § 53) in der schrägen Parallelprojektion besitzt; und wie die Konstruktionen zur direkten Ableitung wahrer Größen aus den Projektionen sich gestalten. (Vergl. § 60, 10—12.)

9) Wenn wir das Spurendreieck XYZ der Bildebene in dem System rechtwinkliger Koordinatenachsen OX, OY, OZ und dazu das Bild O' des Anfangspunktes O gegeben denken, so sind dadurch sowohl die Maßstäbe der x, y, z, als die Projektionsrichtung bestimmt. Der Höhenschnittpunkt N des Dreiecks XYZ und die Distanz NO, die Ordinate in N für den über einer der Höhen XX_1, ... als Durchmesser beschriebenen Kreis, bestimmen zwei Lagen des Anfangspunktes O, O^* im Raume und in OO' und O^*O' die beiden Projektionsrichtungen. Die Verhältnisse $O'X:OX$, $O'Y:OY$, $O'Z:OZ$ liefern die Maßstäbe.

10) Wenn wir das Spurendreieck der Bildebene XYZ gleichseitig voraussetzen, sodaß N der Mittelpunkt desselben ist, so sind die Achsenlängen OX, OY, OZ gleich groß, und man sieht leicht, daß O' aus den Maßstabsverhältnissen $e_x:e_y:e_z = O'X:O'Y:O'Z$ bestimmbar ist. Denn der Ort der Punkte der Tafel, deren Distanzen von X und Y das gegebene Verhältnis von $e_x:e_y$ haben, ist ein Kreis, für welchen die die Strecke XY innerlich und äußerlich nach diesem Verhältnis teilenden Punkte die Endpunkte eines

Durchmessers sind. Denken wir dazu den entsprechenden Kreis aus YZ für $e_y : e_z$, und den aus ZX für $e_z : e_x$, so bilden diese drei Kreise offenbar ein Büschel, dessen beide Grundpunkte die möglichen Lagen des Punktes O' sind. Wir bemerken auch, daß sie, mit den allen möglichen Werten der Verhältnisse $e_x : e_y : e_z$ entsprechenden Kreisen derselben Art, zu dem Netze von Kreisen gehören, welches den umgeschriebenen Kreis des Spurendreiecks XYZ zum Orthogonalkreis hat.

11) Die Übertragung auf den Fall eines ungleichseitigen Spurendreiecks XYZ hat offenbar keine wesentliche Schwierigkeit. Es ist evident, daß damit zugleich die Verbindung der schiefen Achsonometrie mit der schiefen Parallelprojektion mit einem Bilde hergestellt ist. (Vergl. den Schlußüberblick S. 387). Man kann für dieselbe die Spur u der Fixebene und den Winkel ω derselben gegen die Tafel wählen, um daraus etwa die Orthogonalprojektion des Punktes U für den projizierenden Strahl von O zu bestimmen. (Vergl. §§ 6* und 54*.)

12) Man zeichne in freier Achsonometrie den 48flächner mOn, den 24flächner mOm oder das Leucitoeder, den oktaederkantigen 24flächner mO, den hexaederkantigen ∞On, das Rhombendodekaeder ∞O; etwa auch das Pentagon-Dodekaeder und das Deltoid-Dodekaeder bez. $\frac{\infty On}{2}$ und $\frac{mO}{2}$. Man benutze die unter 3) bezeichnete Methode zur Erlangung von möglichst bildlichen Darstellungen.

13) Man konstruiere in freier Achsonometrie die Durchdringung von zwei Körpern des regulären Systems, wenn für den einen die Achsen mit den Projektionsachsen zusammenfallen und für den andern die Durchstoßpunkte in der Ebene xy für seine Achsen gegeben sind. (Vergl. § 54, 30.) Etwa

$$\infty O, \ \frac{\infty On}{2}, \ \frac{mO}{2} \quad \text{mit } O, \ \frac{O}{2}.$$

14) Die freie achsonometrische Darstellung, welche die schiefe Projektion gewährt, ist insbesondere geeignet für die **Darstellung projektivischer Beziehungen**. Jeder geänderten Richtung der Beschauung entspricht zwar ein anderes Original zu der dargestellten Figur, aber alle diese Originale haben die projektivischen Eigenschaften miteinander gemein (vergl. § 45, 1) — gerade so, wie bei Konstruktionen der Zentralprojektion, welche den Distanzkreis nicht fordern, eine Zeichnung, für jedes Auge richtig, die gleiche Beziehung für unendlich viele individuelle Lagen veranschaulicht. Faßt man dieselben Figuren als nach einer andern Projektionsmethode gebildet auf, so stellen sie die projektivischen Relationen nicht minder richtig dar. Projektivische Beziehungen werden durch Projektion nicht geändert. Der besondere Charakter, welcher die Originale der nämlichen schiefen Parallelprojektion verbindet, ist offenbar.

Schlußüberblick. In den beiden letzten Abschnitten haben wir die Methodik der darstellenden Geometrie im wesentlichen zur Vollständigkeit zu entwickeln gesucht, ohne in der Auswahl von Objekten für ihre erläuternde Anwendung über das Frühere hinauszugehen, so weit es nicht diese Anwendung von selbst mit sich brachte. Sowohl an die gewonnene Übersicht der Methoden als an die der Objekte ihrer ersten Erläuterung sollen noch einige zusammenfassende Bemerkungen hier angeknüpft werden; dieselben dienen zugleich zur Bezeichnung des Standpunktes, von dem wir zum Studium eines Teiles dieser Objekte und einer Reihe neuer im zweiten Bande dieses Werkes übergehen.

Wir sahen zuerst, daß es möglich ist, auf allen durch einen Punkt gehenden Ebenen die Beziehung perspektivischer ebener Systeme, d. h. der zentrischen Kollineation, mit diesem Punkt als Zentrum und somit den von ihm ausgehenden Strahlen als Kollineationsstrahlen herzustellen, und erhielten so die Methode der Konstruktion zentrisch kollinearer Modelle, von denen tatsächlich erwiesen ist, daß sie unter geeigneten, wesentlich durch den Sehkegel des betrachtenden Auges gelieferten Bedingungen einem Auge im Zentrum den täuschenden Eindruck der modellierten Objekte trotz verminderter Tiefe gewähren; sie gab in allgemeiner Form die Theorie der künstlerischen, in spezieller die der technisch verwendeten Modellierungsmethoden. Diese ausnahmslos eindeutige Abbildung des Originalraumes durch den Bildraum wiesen wir nun als die allgemeine Methode auf, aus welcher alle speziellen Methoden der darstellenden Geometrie abgeleitet werden, also insbesondere alle Methoden ebener Abbildung, sofern sie dem Gesetze der Sparsamkeit in der Anwendung von Hilfsmitteln am vollkommensten entsprechen; diese Ableitung war das Prinzip, welches zunächst bei ihrer Auswahl leitete. Hier setzen die für die Methodenübersicht vorbehaltenen Bemerkungen ein.

Die zentrische Kollineation zweier Räume fanden wir in § 38, 1 durch Zentrum, Kollineationsebene und ein Paar entsprechender Elemente bestimmt, als z. B. durch C, **s** und das sich in einer Geraden auf **s** schneidende Ebenenpaar $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_1$. Wenn durch C die Parallelebenen $\mathbf{U}^*$ zu $\mathbf{U}$ und $\mathbf{U}_1^*$ zu $\mathbf{U}_1$ gelegt werden, so sind die Schnittlinien $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}^*$ und $\mathbf{U}, \mathbf{U}_1^*$

den Gegenebenen $\mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{R}$ angehörige Gerade und bestimmen also diese. Wir erhalten aber zu Elementen g, A, $\mathbf{A}$ des einen Raumes die entsprechenden Elemente g_1, A_1, $\mathbf{A}_1$ des anderen, indem wir den Punkt $\mathbf{S}$, g oder S mit dem Punkte U_1 von $\mathbf{U}_1$ verbinden, wo diese Ebene durch den von C nach g, $\mathbf{U}$ oder U gehenden Strahl geschnitten wird; etc. Denken wir nun $\mathbf{U}_1$ als sich der Kollineationsebene durch Drehung um ihre Schnittlinie mit derselben immer mehr nähernd und schließlich damit zusammenfallend, ohne Änderung von $\mathbf{U}$, so vereinigen sich die Ebene $\mathbf{Q}_1$ mit $\mathbf{S}$ und die Ebene $\mathbf{R}$ mit der durch C gehenden Parallelebene zu $\mathbf{S}$ — nunmehr der Verschwindungsebene $\mathbf{V}$—, g_1 fällt in die Ebene $\mathbf{S}$ als Verbindungslinie von zwei in derselben liegenden Punkten, etc. Unter Benutzung der Ebenen $\mathbf{Q}_1$ oder $\mathbf{R}$ als der entsprechenden zu der unendlich fernen Ebene des Raumes als Teil des Originals resp. des Bildes entstand in § 43 die gewöhnliche Zentralprojektion als Grenzfall; benutzen wir aber die vorige Konstruktion aus dem beliebigen Paar entsprechender Ebenen $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_1$, von denen nur die letzte in $\mathbf{S}$ liegt, so entsteht als Grenzfall für ein Zentrum im endlichen Raume die allgemeine Zentralprojektion des § 6*, und für ein unendlich fernes Zentrum oder aus der analog bestimmt gedachten zentrischen Affinität der Räume die allgemeine Parallelprojektion mit einem Bilde, die wir a. a. O. S. 20 erwähnten und im weitern mehrfach berührten und benutzten. Wir besprechen hier noch einiges auf sie Bezügliche, wozu sich früher die Gelegenheit nicht bot. Wir nehmen die Bildebene $\mathbf{S}$ als Tafel und bestimmen (man vergl. Figur S. 20 und bilde die neue Figur selbst) die Fixebene $\mathbf{U}$ durch ihre Spur $\mathfrak{u}$ und den Winkel ω, welchen sie mit der Tafel einschließt. Wir tragen ihn mit Scheitel O in $\mathfrak{u}$ und dem einen zu $\mathfrak{u}$ normalen Schenkel OU_1 an, sodaß das bei U_1 rechtwinklige Dreieck $OU_1(U)_0$ um OU_1 gedreht und mit $(U)_0$ gegen den Beschauer aufsteigend in der zur Tafel rechtwinkligen Lage seiner Ebene durch seine Hypotenuse OU die Falllinie der Ebene $\mathbf{U}$ gegen die Tafel angibt. Geben wir dann noch in U' den Durchstoßpunkt des durch die Ecke U in $\mathbf{U}$ gehenden projizierenden Strahles in der Tafel an, so ist die Richtung der Geraden $U'U$ das Projektionszentrum und das Projektionssystem vollkommen bestimmt. Ein bei U_1 rechtwinkliges Dreieck aus den Katheten

$U' U_1$ und $U_1 (U)_1 = U_1 (U)_0$ enthält bei U' den spitzen Neigungswinkel ψ der projizierenden Strahlen zur Tafel. Die Gerade $\mathfrak{u}$ bildet also mit einem beliebigen bei U_1 rechtwinkligen Dreieck $U' U_1 (U)_1$ die vollständigen Data des Projektionssystems. In dem früher als vorteilhaft erwähnten Falle $\omega = 45^0$ ist die Kathete $U_1 (U)_1$ dieses Dreiecks dem Abstand $U_1, \mathfrak{u}$ gleich, allgemein ist ihr Verhältnis zu diesem gleich $\tan \omega$. Die Behandlung aller Elementaraufgaben über die in diesem Buche hervorgetretenen geometrischen Formen, darf als eine Übung ohne wesentliche Schwierigkeit dem Leser empfohlen werden; wir meinen unter jenen zunächst die Elementarformen und unter deren Zusammensetzungen den Kreis, die Kugel, die Rotations-Kegel und -Zylinder. Aber auch die Transformationen nach Maßgabe der Ausführungen der §§ 12, 13, 57—59 sind darin inbegriffen; und wir haben in der Tat in § 61, 9f. die schiefe Achsonometrie, die als ein Hauptergebnis solcher Transformationen angesehen werden kann, mit der allgemeinen Parallelprojektion bereits in Verbindung gesetzt.

Wir wollen aber eben deshalb die Reihe dieser Transformationen hier kurz betrachten. Wir ordnen sie in drei Gruppen: a) Transformationen der Projektionsrichtung, b) solche der festen Ebene $\mathbf{U}$ und c) solche der Tafel und des Objektes. Die Transformationen c) sind im allgemeinen die Probleme der Umlegung, aber die besonderen Fälle der Verschiebungen des Objektes nach Parallelen und bez. nach Normalen zur Tafel und der Verschiebung der Tafel nach Normalen zu ihr sind wie in § 13 etwa hervorzuheben; demnächst der Fall ihrer Drehung um $\mathfrak{u}$. Die Transformationen b) würden sein: Veränderung des Winkels ω bei festgehaltener Spur $\mathfrak{u}$, sodann Veränderung der Spur $\mathfrak{u}$ bei unveränderter Größe von ω; man sieht leicht, wie einfach sich das jeweilige neue Dreieck $U' U_1 (U)_1$ aus den Daten ableiten läßt. Endlich reduzieren sich alle Transformationen des Zentrums oder der Projektionsrichtung auf Änderung des Winkels ψ zur Tafel unter Festhaltung der Punkte U' und U_1 einerseits und auf Änderung des Punktes U' in dem um U_1 beschriebenen Kreise unter Beibehaltung der Winkelgröße ψ. Man erkennt in allen einfachen bezüglichen Konstruktionen das Typische der Behandlung in den §§ 12 und 13 wieder. Auf die entsprechenden Transformationen der all-

gemeinen Zentralprojektion wollen wir daher nur hinweisen, ohne sie hier aufzuzählen. Auch der Übergang zu einem unendlich fernen $\mathfrak{u}$ im Falle der Transformation der Fixebene, obwol damit zugleich $\omega = 0$ wird, und der zu $\psi = 90^0$ im Falle der Transformation des Zentrums, endlich die Herbeiführung beider Spezialitäten zugleich, ist ohne Schwierigkeit.

Wir wollen nur noch einen Fall der allgemeinen schiefen Parallelprojektion kurz besprechen, der zugleich das letzterwähnte Projektionssystem als Spezialfall in sich enthält, den Fall nämlich, wo die Projektionsrichtung zur Halbierungsebene des Winkels ω normal ist, sodaß die Strecken $O U_1$ und $U_1 U'$ in einer zu $\mathfrak{u}$ normalen Geraden liegen, die Umlegungen $(U)_0$ und $(U)_1$ sich decken und $2\psi = 180^0 - \omega$ ist. Auf diesen Fall ist offenbar die schräge Achsonometrie in § 61, 11 zurückführbar; mit $\omega = 0^0$ wird $\psi = 90^0$ und mit $\omega = 90^0$ in anderer Weise bequem $\psi = 45^0$. Immer ist die Projektion der Schnittlinie von zwei Ebenen mit verkehrt aufeinanderliegenden Bestimmungsgeraden s und u' der zu $\mathfrak{u}$ konjugierte vierte harmonische Strahl in Bezug auf diese Geraden, und die des Schnittpunktes von zwei Geraden mit verkehrt aufeinanderliegenden Bestimmungspunkten S und U' der in Bezug auf sie zum Schnitt ihres Bildes mit $\mathfrak{u}$ harmonisch konjugierte Punkt; und diese Schnittelemente liegen in der zum projizierenden Strahlenbündel normalen Halbierungsebene zwischen der Tafel und der Fixebene, also bei $\omega = 90^0$ in einer 45^0 Ebene. Die Umlegung der Ebene und die Konstruktionen der orthogonalen Elemente zu gegebenen erfahren nützliche Vereinfachungen. Mit $\omega = 0^0$ entsteht die Orthogonalprojektion, bei welcher die Fixebene $\mathbf{U}$ in bestimmter Distanz parallel zur Tafel ist und die harmonische Ebene die Mittelebene zwischen beiden bildet. Wenn jene Distanz die Einheit des Höhenmaßstabes ist, so gibt die Darstellung nach diesen Daten (vergl. § 54*, 7) die Méthode des plans cotés, die altbekannte Bestimmung durch eine Orthogonalprojektion; dieser Zusammenhang ist die Grundlage der besonderen Verwendbarkeit, welche sie besitzt, und wonach man sie als eine elementare Einleitung in die deskriptive Geometrie benutzen kann. Gegenüber vielen technischen Objekten hat aber wegen der Menge von vertikalen Geraden, die an denselben auftreten, bei horizontaler Tafel eine

schiefe Projektion den Vorzug, daß sie dieselben nicht als Punkte erscheinen läßt, und die vorbezeichnete mit $\omega = 90^0$ und $\psi = 45^0$ den sehr erheblichen weiteren, daß sie die Längen der in ihnen enthaltenen Strecken in ihren zu u normalen Projektionen in wahrer Größe darstellt, weil sie überhaupt für die Ebene U und alle zu ihr parallelen eine Kongruenzprojektion gibt (vergl. § 14, 6; § 54, 7), wie alle die hier besprochenen Projektionen. Und von hier aus wird der Übergang zu der Methode Monge's ersichtlich. Dieselbe gibt die Koten der Punkte als senkrechte Distanzen in Perpendikeln aus ihnen zu einer willkürlich eingetragenen Achse an; oder auch sie trägt die Abmessung SA' in der zu u rechtwinkligen Projektion der Tafelnormale aus S von dem Schnitt mit dem als x gewählten u ab, um die zweite Projektion A'' des Punktes A zu bestimmen. In dieser letzteren Verbindung mit der vorerwähnten 45^0 Projektion (vergl. S. 255) sieht man besonders deutlich den ihr anhaftenden Luxus an Hilfsmitteln schon beim ersten Schritt hervortreten. Unsere Darstellung der Elemente der „Géométrie descriptive", der ihre innige Verbindung mit der Methode der rechtwinkligen Kartesischen Koordinaten immer ihre große Bedeutung sichert, ist darum jedoch nicht weniger sorgfältig gewesen; wir haben sie in vielen Stücken bereichern können, und haben keine wesentliche Lücke gelassen. Über scheinbare Lücken, wie z. B. den Mangel einer eingehenden Erörterung der Netzbildung der Polyeder, die nur bei den Prismenformen erwähnt ist, soll hier kein Exkurs gegeben werden.

Die Vollständigkeit, die wir erreicht und gegeben haben liegt vielmehr, als in der absolut vollständigen Durchführung einer Methode, darin, daß alle in Betracht gezogenen Methoden eine Familie mit gemeinsamen Charakterzügen bilden; die vorwaltende Betonung der „Géométrie decriptive" unter den Parallelprojektionsmethoden ist praktisch bedingt und bedarf keiner Rechtfertigung weiter. Als ein solcher gemeinsamer Charakterzug der allgemeinen Methoden, Zentral- und Parallelprojektion, der bei ihrer Anwendung auf die Elementarprobleme so wesentlich hervortritt, sei nochmals erinnert und spezialisiert die Entbehrlichkeit gewisser Elemente des Projektionssystems für die Lösung von

gewissen Aufgabengruppen und ihre Notwendigkeit für andere. [Probleme, in denen weder Parallelismus noch Orthogonalität von Elementen auftreten, erfordern in der allgemeinen Zentral- und Parallelprojektion nur die Kenntnis der Spur $\mathfrak{u}$ der Fixebene. In der speziellen Zentralprojektion ist, weil $\mathfrak{U}$ im Unendlichen liegt, der Parallelismus ohne jede weitere Angabe über das Projektionssystem der Behandlung zugänglich; für denselben Fall ist in der allgemeinen Zentralprojektion die Fluchtlinie der Fixebene $\mathfrak{q}'$ nötig, in der allgemeinen Parallelprojektion genügt auch dann $\mathfrak{u}$ allein. Die Darstellung von Orthogonalitätsrelationen fordert in der speziellen wie in der allgemeinen Zentralprojektion die Hinzufügung des Distanzkreises und auch in der allgemeinen Parallelprojektion diese vollständige Angabe der Data, die die Bestimmung der Raumformen vollendet und daher auch alle wahren Größen zu finden gestattet. Im Falle der „Géométrie descriptive“ ist mit Angabe der Achse x das Projektionssystem vollständig bestimmt, falls über seine Vereinigung mit der Zeichnungstafel gewisse Konventionen festgehalten werden (§ 49), und eben deshalb halten wir die Hervorhebung jener zulässigen Unbestimmtheiten nicht für überflüssig und erörtern sie noch an einigen Beispielen. In der gewöhnlichen Zentralprojektion erfordern die Aufgaben des § 8 den Distanzkreis nicht, also außer der Tafel als Zeichnungsebene keine Angabe über das Projektionssystem; die Bedeutung hiervon ist nach § 3, 2 und § 5, 10 nicht zweifelhaft gewesen. In der allgemeinen Zentralprojektion würden die Aufgaben 4 und 9 f. des § 8 von den übrigen sich absondern, weil bei ihnen Parallelismus verlangt wird — bei 1 und 3 ist er nur ein bequemes Hilfsmittel — und dazu die Kenntnis von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{q}'$ gehört; in der allgemeinen Parallelprojektion wäre auch für sie nur die Kenntnis von $\mathfrak{u}$ nötig.

Daß die Gesetze der Kollineation für jede Abhängigkeit ebener Systeme in Zentralprojektion und die der Affinität für solche in Parallelprojektion gelten, ist evident; die Unbestimmtheit des Zentrums ist in der fundamentalen Untersuchung derselben in § 23 genau erörtert worden — die Figuren der zentrischen Kollineation ebener Systeme wie S. 138, 139, etc. sind daher unendlich vieler stereometrischen Auffassungen fähig neben den planimetrischen, und die Gesamtheit derselben wird

durch die Gesetze der Projektivität verbunden. (Vergl. § 45, 1.) Wir erinnern auch an das Beispiel 1 im Überblick des Abschnittes B und die Erörterung über die Vieldeutigkeit seiner Lösung unter 5) daselbst. Ferner können die Figuren der orthogonalen Achsonometrie, wie z. B. S. 279, 365, u. 370, als solche der schiefen aufgefaßt werden, selbst ohne Aufhebung des Parallelismus dargestellter Elemente (vergl. den Schluß von § 61); nur wird dann die Größe der Winkel zwischen Flächen, die den Koordinatenebenen nicht parallel sind, in der ersten Figur geändert, in der zweiten Figur tritt an Stelle des Würfels etwa ein rechtwinkliges Parallelepiped, in der dritten Figur wäre etwa ON nicht mehr normal zu XOZ, etc. In der Figur auf S. 350 bleibt die nähere Bestimmung folgenden Überlegungen vorbehalten, ohne daß die Konstruktion in derselben für irgend einen der wählbaren Fälle in irgend einem Punkte unrichtig wird. Die Durchschnittslinie der Basisebenen $ABCE$ und $A^*B^*C^*E^*$ beider Körper wird bestimmt durch Angabe 1) ihrer Punkte S und U' in allgemeiner Zentral- oder Parallelprojektion, bez. 2) durch S und Q' in gewöhnlicher Zentralprojektion, wenn man sie als das Bild nach diesen Methoden betrachtet; sie kann auch 3) als Grundriß in einer Darstellung nach Monge angesehen und daraus bestimmt werden, indem man auf ihr einen Punkt als ersten Durchstoßpunkt S_1 wählt, sodann eine Gerade als Achse x einzeichnet und einen Punkt des auf ihr im Schnitte mit jener errichteten Perpendikels als zweiten Durchstoßpunkt S_2 festsetzt; endlich kann sie als achsonometrisches Bild in 4) schräger oder 5) orthogonaler Achsonometrie angesehen werden, indem man ein Achsenkreuz $O.X'Y'Z'$ oder $N.xyz$ willkürlich einzeichnet und zwei Punkte unserer Geraden z. B. als ersten und zweiten Durchstoßpunkt festsetzt. Ist diese Gerade d bestimmt, so werden die beiden Ebenen $ABCED$ und $A^* \ldots D^*$ bestimmt, im 1) Falle durch je ein Paar Gerade s und u', s^* und $u^{*\prime}$, welche sich auf der Spur u der Fixebene schneiden; im 2) durch zwei Paare von Parallelen s, q' und $s^*, q^{*\prime}$; im 3) sodann durch die Paare der Spuren s_1 und s_2, s_1^* und s_2^*, welche durch S_1, S_1^* bez. gehen und sich je auf der Achse x begegnen, und analog natürlich im Falle 4) und im Falle 5). Um endlich die dargestellten Raumformen vollständig zu bestimmen, hätte man im Falle 1) bei allgemeiner

Parallelprojektion durch Angabe eines Dreiecks $U'U_1(U)_1$ die Projektionsrichtung und die Stellung der Fixebene zu bestimmen, sowie im Falle 2) wiederum den Distanzkreis. Die Fälle 3), 4) und 5) erfordern keine weiteren Angaben, falls wir bei 4) die $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ als Bilder gleicher Längeneinheiten ansehen, wie es der Text des § 61 an die Hand gibt. Wie man auch über diese außerordentlich zahlreichen Annahmen disponiert, die ausgeführte Konstruktion der Durchdringung ist richtig; doch ist ihre Bedeutung nicht ganz die gleiche, denn im Falle der Zentralprojektion ist nicht blos $M.A^* \dots E^*$, sondern auch der Körper über $ABCE$ mit parallelen Mantellinienbildern im allgemeinen eine Pyramide — der letztere natürlich mit Spitze in der Verschwindungsebene —, während sie in den Fällen der Parallelprojektion jeweilig Pyramide und Prisma sind ihrer Erscheinung gemäß. (Ähnliches gilt für die Figur S. 293, 295 etc.) Wir halten diese beispielsweise Erläuterung für nützlich, obschon die allgemeinen Gesetze einfach und aus dem Früheren bekannt sind; ihre Tragweite wird eben durch Beispiele am besten ersichtlich und die Anschauung ist durch allgemeine Sätze zwar reguliert, aber nicht vollzogen oder ersetzt. Wir werden diese Betrachtungen im zweiten Bande in erhöhtem Grade fruchtbar finden.

Hier haben wir den Erörterungen über die Methoden noch einiges über die zur Erläuterung derselben benutzten Objekte hinzuzufügen, das uns zu dem Endresultat führen wird, die Methoden und den Kreis dieser Objekte als überall im Zusammenhang und als in gleicher Weise integrierende Teile einer natürlichen Entwicklung der Geometrie zu erkennen. Wie die Methoden ein organisches Ganzes darstellen, so bilden auch die ersten Objekte ihrer Anwendung eine natürliche Gruppe; nicht nur die in erster Reihe auftretenden Elementarformen: Gerade, Punkt und Ebene, deren Lagenrelationen die fundamentalen Aufgaben und den Leitfaden der Entwicklung für alle Methoden der darstellenden Geometrie liefern. Denn zu ihnen tritt mit dem ersten Schritt unter den Daten der Projektionsmethoden in ihrer Grundform die ebenso elementare Anschauung des Kreises; aus seiner Benutzung zur Bestimmung des Zentrums entspringt die Methode der „Zyklographischen Abbildung", welche die Geraden und die Ebenen

durch die Kreise mit einerlei Ähnlichkeitspunkt bez. einerlei Ähnlichkeitsachse, und den gleichseitigen Rotationskegel mit zur Tafel normaler Achse durch die Gesamtheit der einen festen Kreis berührenden Kreise in der Tafel darstellen lehrt.

Aus der Anwendung der Projektionsprozesse auf den Kreis als darzustellendes Objekt ergibt sich die Projektivitätstheorie der Kegelschnitte, die in planimetrischer fundamentaler Entwicklung schließlich zu den metrischen Eigenschaften führt, und die stereometrisch die Durchdringung der gleichseitigen Rotationskegel mit zur Tafel normalen Achsen durch Vermittlung der Orthogonalprojektion auf diese Tafel zyklographisch sofort liefert. Die Methode der Zyklographie knüpft aber an den Fall dieser Kegeldurchdringung, wo beide Kegelmittelpunkte in der Tafel liegen, die Lehre von den Kreisbüscheln und Kreisnetzen und den Nachweis ihrer räumlichen Abbilder, der tafelsymmetrischen gleichseitigen Hyperbeln und gleichseitigen Rotationshyperboloide mit ihren Eigenschaften; sie entdeckt die Eigenschaften der konjugierten Büschel von Kreisen und damit die fundamentale metrische Verwandtschaft der reziproken Radien oder der Inversion, welche die ganze Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme beherrscht. Durch die einfache Parallelverschiebung der Tafel gelangt sie von den Kreisen, die einen gegebenen reellen Kreis orthogonal bez. diametral schneiden, zu denen, welche einen gegebenen Kreis unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden, mit dem räumlichen Abbild in denselben Hyperboloiden; und mit dem strengen und elementaren Nachweis, daß solche Hyperboloide sich immer nur in Kegelschnitten durchdringen, stellt sie die Kegelschnitte in den Zusammenhang einer Geometrie der Kreissysteme, dessen Bedeutung weit über die der Gruppe von metrischen Eigenschaften hinausgeht, welche die Projektivitätstheorie schon geliefert hat. Der Formenkreis dieser Theorie: Kreis und Kugel, gleichseitige Hyperbel und gleichseitige Rotationskegel und Rotationshyperboloide, ist ein einheitlicher, nach ihr selbst, wie nach der Projektivitätslehre, welche den Kreis und die gleichseitige Hyperbel aus denselben gleichwinkligen Strahlenbüscheln, unter Gleichheit bez. Gegensatz ihres Drehungssinnes hervorgehen läßt. Die Behandlung dieser Formen ist nur begonnen, aber weitaus nicht erschöpft worden — wird vielmehr

einen Hauptteil des zweiten Bandes von diesem Werke bilden; denn sie ward hier nur soweit geführt, als es die Darlegung der Methode selbst unmittelbar mit sich brachte, aus der sie entsprangen. Die Methode selbst zwingt auch zur Erweiterung und Verallgemeinerung dieser Formen. Der Prozeß der Projektion fügt zu den Kegelschnitten die allgemeinen Kegel zweiten Grades, von denen vorher nur gewisse Spezialformen hervorgetreten sind; die Methode der zentrisch kollinearen Modellierung, die seine naturgemäße Erweiterung über das ebene System auf den Raum ist, führt in verschiedenen Arten vom gleichseitigen Rotationskegel zu denselben allgemeinen Kegeln zweiten Grades; sie bildet aber auch aus der Kugel und dem einfachen gleichseitigen Rotationshyperboloid die fünf Arten der Flächen zweiten Grades, eine zukünftig zu untersuchende Flächengruppe, von gleicher Bedeutung für die Geometrie des Raumes, wie die Kegelschnitte für die Geometrie der Ebene und die Kegel zweiten Grades für die des Bündels,

Es war ein Hauptergebnis unserer Methodenentwicklung, daß die Symmetrien der ebenen und räumlichen Systeme als spezielle Fälle der involutorischen Kollineation sich ergaben — wir fügen hier hinzu, auch die Symmetrien in den Bündeln von Strahlen oder Ebenen. Die Symmetrie ebener Systeme nannten wir achsial bez. zentral, je nachdem die entsprechenden Punktepaare in gleich gerichteten bez. durch ein endlich entferntes Zentrum gehenden Geraden in gleichen Entfernungen auf entgegengesetzten Seiten der Achse bez. des Zentrums liegen, — jene speziell orthogonal, wenn diese Geraden zur Achse rechtwinklig sind. Man bildet ohne Schwierigkeit die entsprechenden Symmetrien im Bündel, und faßt alle in den projektivisch allgemeinen Involutionsdefinitionen zusammen, wie folgt:

Je zwei entsprechende Punkte involutorisch vereinigter symmetrischer ebener Systeme liegen in einerlei Strahl durch das Symmetriezentrum und sind von diesem durch die Symmetrieachse harmonisch getrennt; je zwei entsprechende Strahlen

Je zwei entsprechende Ebenen involutorisch vereinigter symmetrischer Bündel gehen durch einerlei Strahl in der Symmetrieebene und werden von dieser durch die Symmetrieachse harmonisch getrennt; je zwei entsprechende Strahlen

gehen durch einerlei Punkt der Symmetrieachse und werden von dieser durch das Symmetriezentrum harmonisch getrennt. Die sich selbst entsprechenden Punkte außer dem Zentrum liegen in der Achse und die sich selbst entsprechenden Strahlen außer der Achse gehen durch das Zentrum der involutorischen Symmetrie.

liegen in einerlei Ebene durch die Symmetrieachse und werden von dieser durch die Symmetrieebene harmonisch getrennt. Die sich selbst entsprechenden Ebenen außer der Symmetrieebene gehen durch die Achse und die sich selbst entsprechenden Strahlen außer der Symmetrieachse liegen in der Ebene der involutorischen Symmetrie.

Die Symmetrien der Räume, die wir bisher kennen gelernt und beachtet haben, unterschieden wir als zentral und planar und können sie in folgenden Erklärungen zusammenfassen:

Je zwei entsprechende Punkte liegen in demselben Strahl aus dem Zentrum und sind von diesem durch die Symmetrieebene harmonisch getrennt. Auf jeder Ebene durch das Zentrum findet Involution der entsprechenden Elemente statt, mit ihrer in der Symmetrieebene liegenden Geraden als Achse.

Je zwei entsprechende Ebenen gehen durch denselben Strahl in der Symmetrieebene und sind von dieser durch das Zentrum harmonisch getrennt. An jedem Punkt der Symmetrieebene findet Involution der entsprechenden Elemente statt mit dem von ihm nach dem Zentrum gehenden Strahl als Achse.

Je zwei entsprechende Gerade liegen in einer Ebene durch das Symmetriezentrum, gehen durch einen Punkt der Symmetrieebene und werden durch jenes und durch dieses harmonisch getrennt. Die sich selbst entsprechenden Punkte außer dem Zentrum liegen in der Symmetrieebene, die sich selbst entsprechenden Ebenen außer der Symmetrieebene gehen durch das Zentrum; die sich selbst entsprechenden Geraden gehen durch das Zentrum oder sie liegen in der Symmetrieebene.

Die speziellen gewöhnlich auftretenden Formen entsprechen bei den ebenen Systemen der unendlich fernen Lage der Achse, bez. der Lage des Zentrums in der Richtung der Normalen zur Achse und werden durch Halbierung der Strecken und Winkel charakterisiert; bei den Bündeln durch die Orthogonalität

von Symmetrieachse und Symmetrieebene, welche die Halbierung der Linien- und Flächenwinkel aber auch die gewisser Strecken im Gefolge hat; bei den Räumen entsprechen sie der unendlich fernen Lage des Symmetriezentrums in der Richtung der Normalen zur Symmetrieebene bez. der unendlich fernen Lage der Symmetrieebene unter analogen Folgen.

Wir wissen, daß durch kollineare Umformung diese speziellen im allgemeinen in die vorher erwähnten allgemeinen Formen übergehen. (§ 42).

Wir finden nun diese Symmetrien an den aufgezählten Objektformen der bisherigen Entwicklung wieder, an den ursprünglichen in den speziellen und an den methodisch daraus entwickelten in den zugehörigen allgemeinen Formen, als naturgemäß unverlierbare Eigenschaften derselben.

Der gleichseitige Rotationskegel ist als Figur im Strahlenbündel symmetrisch in Bezug auf seine Achse und deren Normalebene durch die Spitze, d. h. seine Mantellinien und die zugehörigen Tangentialebenen ordnen sich nach den obigen Gesetzen in symmetrische Paare; das Gleiche tun nach denselben Gesetzen die Punkte seiner entsprechenden Paare von Mantellinien, und zwar sowohl in Normalen zur Symmetrieebene als in Normalen zur Symmetrieachse; überdies teilen sich seine Mantellinien und die zugehörigen Tangentialebenen auch in orthogonal symmetrische Paare in Bezug auf jede durch seine Achse gehende Ebene; zentrisch symmetrisch in Bezug auf seinen Mittelpunkt ist er natürlich auch.

Jedes gleichseitige Hyperboloid ist wiederum für seinen Mittelpunkt zentrisch symmetrisch, für seine Hauptebene und für jede durch seine Achse gehende Ebene orthogonal planarsymmetrisch; seine Punkte teilen sich daher auch in jeder dieser Ebenen in Paare, welche orthogonal symmetrisch zur Rotationsachse liegen, d. h. die Achensymmetrie der gleichseitigen Hyperbel und des rechtwinkligen Linienpaares als ihrer Grenzform findet in jeder Meridianebene dieser Rotationsflächen statt; die Paare der zu solchen Punkten gehörigen Tangentialebenen schneiden sich in Normalen zur Rotationsachse und der betreffenden Meridianebene, d. h. sie schneiden jene und gehen der Hauptebene der Fläche ebenso parallel wie die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte.

Die Kugel endlich zeigt uns das Gleiche, nur in noch vollständigerer Weise; sie ist zentrisch symmetrisch für ihren Mittelpunkt und orthogonal planar-symmetrisch für jede ihn enthaltende Ebene; daher teilen sich auch die Punkte ihrer Oberfläche in Bezug auf jeden ihrer Durchmesser in Paare, welche zu ihm orthogonal symmetrisch liegen, und die zugehörigen Tangentialebenen sind Ebenenpaare, deren Schnittlinien diesen Durchmesser rechtwinklig schneiden, wie die Verbindungslinien jener Punktepaare. Sie zeigt uns aber zugleich die allgemeine Form dieser Symmetrie; wir haben in § 60, 13 gesehen, daß in Bezug auf die Kugel zu jeder geraden Linie g des Raumes, durch welche zwei Tangentialebenen an sie gehen, eine andere h zugeordnet oder konjugiert ist, welche die Berührungspunkte A, B derselben mit der Kugel verbindet; da nun evident ist, daß jede durch h gelegte Ebene einen Kreis durch A, B aus der Kugel schneidet, in Bezug auf welchen der Pol von h im Schnittpunkt seiner Ebene mit g liegt, so werden irgend zwei Punkte der Kugel auf einer sowohl g als h schneidenden Geraden von ihren Schnittpunkten mit diesen Geraden harmonisch getrennt. Man kann auch zeigen, daß die Schnittlinie der zu solchen Punkten gehörigen Tangentialebenen der Kugel eine Transversale der Geraden g und h ist und mit ihnen Ebenen bestimmt, welche von jenen harmonisch getrennt werden. Beiderlei Eigenschaften werden durch die kollineare Umformung nicht zerstört, gehen also auf die durch diese aus der Kugel entstehenden Flächen zweiten Grades über. (Vergl. § 41, 6 f.). Und wir werden im zweiten Bande mit den dazu nötigen Mitteln sehen, daß dies eine allgemeine Eigenschaft aller Flächen zweiten Grades ist. Hier formulieren wir sie als eine dritte wesentliche involutorische Symmetrie räumlicher Figuren, die mit zwei windschiefen Achsen, und beschreiben sie wie folgt:

Je zwei entsprechende Punkte liegen in einerlei Transversale zu den Symmetrieachsen und werden durch ihre Schnittpunkte mit diesen harmonisch getrennt; die Punkte in den Symmetrieachsen sind die sich selbst entsprechenden Punkte.

Je zwei entsprechende Ebenen gehen durch einerlei Transversale der Symmetrieachsen und werden durch ihre Verbindungsebenen mit diesen harmonisch getrennt; die Ebenen durch die Symmetrieachsen sind die selbst entsprechenden Ebenen.

Je zwei entsprechende Gerade haben mit den Symmetrieachsen unendlich viele gemeinsame Transversalen — Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punktepaare und Schnittlinien der durch sie gehenden entsprechenden Ebenenpaare — und werden in und an denselben durch die Schnittpunkte und die Verbindungsebenen mit jenen harmonisch getrennt. Nur die Achsen entsprechen je sich selbst.

Infolgedessen findet auf jeder durch eine Achse gehenden also sich selbst entsprechenden Ebene zwischen ihren entsprechenden Elementen involutorische Zentralkollineation statt für die Achse als Achse und ihren Schnittpunkt mit der andern Achse als Zentrum; und in jedem auf einer Achse liegenden Punkte involutorische Zentralkollineation mit der Achse als Achse und der Ebene von dem Punkte nach der andern Achse als Kollineationsebene. Wir kommen im dritten Bande unter dem Titel „Geschaarte involutorische Kollineation" darauf zurück.

Wenn durch zentrisch kollineare Umwandlung die eine der Achsen ins Unendliche gebracht, also zur Stellung eines Ebenensystems und die andere Achse zu demselben rechtwinklig gemacht wird, was immer auf unendlich viele Arten geschehen kann, so erhalten wir die einfachen Erscheinungen der, wir wollen sagen, Rotationssymmetrie, welche vorher an den speziellen Formen unserer Formengruppen geschildert sind. Umgekehrt verwandelt sich Rotationssymmetrie mit einer Achse a und mit einer Stellung b durch kollineare Umformung in geschaarte involutorische Kollineation mit den Modellgeraden a_1 und b_1, deren letzte in der Ebene $\mathbf{Q}_1$ liegt. Erhalten bleibt die Rotationssymmetrie im Modell, wenn ihre Achse im Endlichen die Normale von C auf $\mathbf{S}$ ist.

Aber wir fassen auch diese Art der Symmetrie wohl mit Recht als allgemeine Eigenschaft des Raumes. Denn man kann mit ganz elementaren an die Bestimmung und Modellierung der Körperformen anknüpfenden Betrachtungen zeigen, daß die erhaltenen Arten der Symmetrie ebenso notwendig als erschöpfend sind in dem Raum unserer Anschauung. Man denke sich das Netz eines Polyeders gezeichnet, kopiere es in drei kongruenten Exemplaren und bilde sodann aus ihnen das Modell des Polyeders zweimal so, daß dieselbe obere Seite der Netzebenen zur Außenfläche der Polyeder I und II wird,

das dritte mal aber so, daß die andere untere Seite der Netzebene Außenfläche des Polyeders *III* wird. Die entsprechenden Ecken seien mit denselben Buchstaben $A, B \ldots$ bezeichnet, und zur leichteren Verfolgung der möglichen Zusammenlegungen sei eine der Flächen $ABCD$ ein Rechteck, und diese werde mit entsprechender Fläche zunächst *a*) zur Deckung der Körper *I* und *II* zusammengelegt. Aus dieser Lage *a*) drehe man den Körper *II* um je 180^0 um die drei Achsen, deren erste AB, CD senkrecht halbiert, deren zweite mit BC, DA dasselbe tut, indes die dritte im Mittelpunkt von $ABCD$ auf seiner Ebene senkrecht steht, in die neuen Lagen *b*), *c*), *d*); man erhält Achsen- oder Rotationssymmetrie in Bezug auf die jedesmalige Drehungsachse als Achse im endlichen Raum. Die Körper *I* und *III* können nicht zur Deckung gebracht werden, sondern ihre einfachste Aneinanderlegung mit Deckung der Punktepaare A, B, C, D ist die Lage a^*) der Symmetrie in Bezug auf die Ebene $ABCD$; von dieser Lage ausgehend drehen wir wieder das Polyeder *III* um die Achsen von vorhin um 180^0 und erhalten in der Lage b^*) und in der Lage c^*) Symmetrie in Bezug auf die Ebenen, welche die Gegenseitenpaare AB, CD und bez. BC, DA des Rechtecks senkrecht halbieren, in der Lage d^*) aber Symmetrie in Bezug auf den Mittelpunkt des Rechtecks $ABCD$ als Zentrum. Andere Symmetrielagen der Polyeder sind bei der vollkommenen Unbestimmtheit ihrer übrigen Ecken und Flächen nicht möglich; die Wahl einer rechteckigen Fläche erleichtert die Vorstellung, ist aber nicht erforderlich. Es kann also Symmetrien räumlicher Figuren außer nach diesen drei Typen nicht geben.

Die Anwendung des Prinzips der Dualität auf die gefundenen Resultate zeigt nun, daß die eine Symmetrieform der Ebene in ihren zwei speziellen Erscheinungen, oder die des Bündels, daran geknüpft ist, daß es in der Ebene nur zwei Elemente, Punkt und Gerade gibt, wie im Bündel nur Ebene und Strahl, von denen eben ein Paar als sich selbst entsprechende Elemente der involutorischen Symmetrie auftreten. Weil es im Raume dreierlei Elemente Punkt, Ebene und Gerade gibt, von denen die zwei ersten einander und das dritte sich selbst dual gegenüber stehen, so gibt es im Raume zwei wesentlich verschiedene Symmetrien, von denen die erste zwei spezielle

Erscheinungsformen darbietet; die zentrische und die planare Symmetrie mit einem sich selbst entsprechenden Punkt und einer sich selbst entsprechenden Ebene — diese, bez. jener, unendlich entfernt —, und die achsiale oder Rotationssymmetrie mit zwei windschiefen rechtwinkligen Achsen, von denen die eine unendlich fern, also die Stellung der Normalebenen zur andern ist. Auch das ist ein Grund für die Vollständigkeit der Reihe jener Typen. Der Gegensatz zur Kongruenz ist, wie man sieht, nicht wesentlich in unserm Sinne; der gemeinsame Charakterzug der Symmetrien ist die vertauschbare oder involutorische Korrespondenz der Elementenpaare.

So gibt uns auch die Betrachtung der hervorgetretenen Grundformen ein allgemeines Resultat für das System der Geometrie, welches für die Fortsetzung unserer Untersuchungen von Wert ist. Die metrischen und die projektivischen Eigenschaften der Figuren und Systeme stehen in dem Zusammenhang, daß die Theorie der Involution von den einen zu den andern führt; darum haben wir die Formen derselben auch mit der Methode der Zyklographie in inniger Verbindung gefunden.

Und noch ein anderes ist zu erörtern: Die Theorie der Involution führte ja auch, und zwar an der Hand der konstruierenden Geometrie, zur Einordnung imaginärer Elemente in den Raum der reellen Elemente, d. h. zu ihrer Darstellung und Bestimmung durch solche (vergl. S. 177, 178 f., 187, 194 f., 197, 215 f., 227, 233 f., 251, 261 f.; auch die der Zyklographie gewidmeten §§ (7) und (36) bis (36^e) — schon die Modulausdrücke in (7) enthalten den Keim für das spätere Auftreten des Imaginären). Sie setzt dadurch aber tatsächlich in den Stand, alle Elementarkonstruktionen mit den imaginären Raumelementen ebenso durchzuführen, wie mit den reellen.

Wir wissen, daß eine elliptische Involution in einem Elementargebilde erster Stufe zwei, wie wir sagten, konjugiert imaginäre Doppelelemente definiert, die ihr angehören, und wir haben diese bei den Involutionskonstruktionen der Kegelschnitte und der Kegel zweiten Grades ganz so wirksam als Bestimmungselemente gefunden, wie zwei reelle Peripherieelemente derselben. Auf Grund dessen, darf man sagen, kennen wir drei Arten imaginärer Elemente in konjugierten Paaren, nämlich Paare konjugiert imaginärer Punkte in reellen

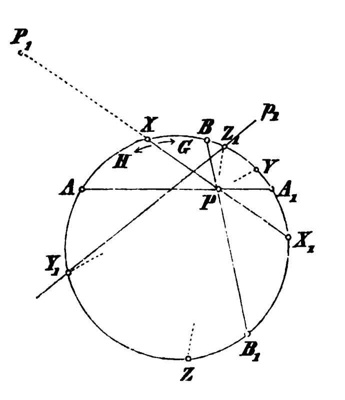
Geraden, Paare konjugiert imaginärer Ebenen durch reelle Gerade, und Paare konjugiert imaginärer Geraden durch reelle Punkte und in reellen Ebenen. Und es ist ein einfacher und genialer Gedanke v. Staudts, der die Unterscheidung des einen von zwei konjugiert imaginären Elementen vom andern liefert: Die Betrachtung des Bewegungssinnes. Denn die geordnete Gruppe z. B. ABA_1B_1 von zwei Paaren A, A_1 und B, B_1 einander trennender reeller Elemente in einem Elementargebilde erster Stufe kann von dem Elemente A als Anfangselement geordnet durchlaufen werden sowohl in dem einen Sinne mit ABA_1B_1 wie in dem andern mit AB_1A_1B, während bei der hyperbolischen Involution weder dieses noch jenes möglich ist; man zieht daraus den Schluß, daß der das Elementargebilde vom gewählten Anfangselement aus durchlaufende Gedanke in dem einen Bewegungssinn zuerst das eine Doppelelement z. B. G_i und dann erst das andere H_i erreiche, dafür aber mit dem entgegengesetzten Bewegungssinn zuerst H_i und später G_i; und wir haben nur dem Zeichen des Anfangselements A einen den Bewegungssinn anzeigenden Pfeil beizufügen und an denselben das Zeichen des zuerst erreichten Doppelelements zu setzen, an den entgegengesetzten Pfeil bei A aber das des zweiten Doppelelements in dem durch die elliptische Involution definierten Paar der konjugiert Imaginären. Das allein Ausnahme bildende Zusammenfallen der Doppelelemente ist ja zugleich ihre Realität, wie wir aus der Lehre von der parabolischen Involution wissen.

Verbindet man damit das Prinzip der perspektivischen Lage zunächst in der Form, wo eine elliptische Involution im Strahlenbüschel perspektivisch liegt zu einer elliptischen Involution in gerader Reihe oder im Ebenenbüschel, zu dem Schlusse, daß dann auch die Doppelelemente der ersten mit denen der zweiten inzident sein d. h. vereinigt liegen müssen, so hat man die Konstruktion der sechs Probleme, in denen ein reelles mit einem imaginären Element zusammentritt: a) Verbindungsgerade eines reellen mit einem imaginären Punkte — b) Schnittgerade einer reellen mit einer imaginären Ebene — c) und d) Verbindungsebene eines reellen Punktes bez. Schnitt einer reellen Ebene mit einer imaginären Geraden — e) und f) Verbindungsebene bez. Schnittpunkt einer reellen Geraden mit

einem imaginären Punkte bez. einer imaginären Ebene. Die reelle Gerade bei f) schneidet z. B. aus dem die imaginäre Ebene bestimmenden elliptisch involutorischen Ebenenbüschel $\mathbf{ABA_1B_1}$ vier Punkte ABA_1B_1 aus, die mit dem vom Büschel auf diese Reihe übertragenen Bewegungssinn den Punkt G_i bestimmen, in dem die reelle Gerade die Doppelebene $\mathbf{G}_i$' des Büschels schneidet.

Aufgaben, in welchen zwei imaginäre Elemente zusammentreten, erfordern die Anwendung des Prinzips der perspektivischen Lage in der Form, wo zwei gleichartige elliptische Involutionen perspektivisch zueinander d. h. perspektivisch zu einer andersartigen dritten liegen, sodaß auch ihre Doppelelemente inzident sind mit den entsprechenden Doppelelementen der dritten. Und weil dazu die zwei ersten Involutionen durch perspektivische Gruppen mit demselben Anfangselement bestimmt sein müßten, so fordern diese Aufgaben gleichmäßig ein Mittel zu ihrer Darstellung aus einem willkürlichen Anfangselement in ihr durch eine Gruppe von zwei Paaren, die zu einer gegebenen solchen Gruppe projektivisch ist.

Dieses Mittel gewährt die Übertragung der Involution auf einen Kreis. Sei in der untenstehenden Figur ABA_1B_1 die so übertragene Bestimmungsgruppe, sodaß zu ihr der Punkt P oder AA_1, BB_1 als Pol im Hilfskreis gehört, und sei X das mit übertragene neue Anfangselement, sodaß XP sein entsprechendes X_1 in der neuen involutorischen Gruppe liefert — so wähle man auf XPX_1 den vierten Punkt der gegebenen Gruppe in P_1 (natürlich außerhalb des Kreises) und ziehe von ihm an den Kreis die beiden Tangenten P_1Y_1, P_1Z_1 (oder ermittele seine Polare p_1) und bestimme auf den Geraden Y_1P und Z_1P die entsprechenden Y und Z in der Involution. Damit ist



$$(XPX_1P_1) = (Y_1 \,.\, XPX_1P_1) = (XYX_1Y_1)$$

und auch

$$(XPX_1P_1) = (Z_1 \,.\, XPX_1P_1) = (XZX_1Z_1),$$

d. h. man hat auf dem Hilfskreis die Darstellungen der gegebenen elliptischen Involution AA_1BB_1 durch die zu XPX_1P_1 projektivischen Gruppen XYX_1Y_1 im Sinne der Uhrzeigerdrehung bez. XZX_1Z_1 im entgegengesetzten Sinn, die Darstellungen der konjugiert imaginären Elemente G_i und H_i im Hilfskreis. Wäre die Gruppe XPX_1P_1 harmonisch, so geht die Polare p_1 von P_1 durch P und es fällt Y auf Z_1 und Z auf Y_1, oder dieselbe Gruppe gibt die Darstellungen in beiderlei Sinn für die Involution ABA_1B_1, nämlich XYX_1Y_1 und XY_1X_1Y.

Damit löst man die sechs Aufgaben a) und b) Konstruktion des Schnittpunktes bez. der Verbindungsebene von zwei imaginären Geraden in derselben reellen Ebene oder durch denselben reellen Punkt; c) und d) Schnittpunkte bez. Verbindungsebene einer imaginären Geraden mit einer imaginären Ebene oder einem imaginären Punkte; e) und f) Schnittlinie von zwei imaginären Ebenen durch denselben reellen Punkt und Verbindungslinie zweier imaginären Punkte derselben reellen Ebene. Man hat z. B. in c) eine elliptische Strahleninvolution in der reellen Ebene E und eine elliptische Ebeneninvolution, die aus ihr eine zweite elliptische Strahleninvolution schneidet; diese haben einen gemeinsamen Strahl x und lassen sich von ihm aus mit dem je gegebenen Bewegungssinn durch projektivische Gruppen $xyx_1y_1\ldots$ darstellen, welche durch Schnitt der y, x_1, y_1 Punkte Y, X_1, Y_1 der zu beiden zugleich perspektivischen Reihe XYX_1Y_1 liefern, die mit dem übertragenen Bewegungssinn den imaginären Schnittpunkt darstellt.

Alles das ist mit den in diesem Bande enthaltenen Mitteln graphisch ausführbar, am einfachsten in der Form der Zentralprojektion. In allen Fällen treten wieder nur imaginäre Elemente von den drei uns längst bekannten Arten als Lösungen auf; in Zusammenfassung solche, die mit gewissen reellen Elementen inzident oder vereinigt liegen.

Die beiden Probleme aber von der Verbindungslinie von zwei imaginären Punkten, die nicht in derselben reellen Ebene liegen, weil ihre reellen Geraden sich kreuzen, und von der Schnittlinie von zwei imaginären Ebenen, die nicht durch denselben reellen Punkt gehen, weil ihre reellen Geraden sich kreuzen — Probleme, die offenbar

stets zusammen vorliegen — führen nicht auf ein solches reelles Element; es entspringt aus ihnen eine neue Art von imaginären Elementen, die weder einen reellen Punkt enthält noch in einer reellen Ebene liegt und deshalb als rein imaginäre Gerade bezeichnet werden mag, zum Unterschied von der punktiert-planierten imaginären Geraden unserer früheren Kenntnis. Als Gerade, weil dies neue imaginäre Element mit jedem reellen Punkt (Projektionszentrum) eine imaginäre (projizierende) Ebene bestimmt und ebenso mit jeder reellen Ebene (Bildebene) einen imaginären (Spur-)Punkt.

Jene wird nämlich bestimmt durch die Darstellung der beiden die zwei imaginären Punkte in den windschiefen Geraden t_1 und t_2 bestimmenden elliptischen Involutionen von den Schnittpunkten ihrer gemeinsamen projizierenden Transversale aus durch projektivische Gruppen, weil diese als zu ihnen zugleich perspektivisch das elliptisch involutorische projizierende Ebenenbüschel liefern, dessen im übertragenen Bewegungssinn zuerst erreichte Doppelebene jene projizierende Ebene ist.

Dieser Durchstoßpunkt entspringt aus der Darstellung der elliptisch involutorischen Spurenbüschel der imaginären Ebenenbüschel des zweiten Problems von ihrem gemeinsamen Strahl aus mit den übertragenen Bewegungssinnen; er ist graphisch bestimmt als der im übertragenen Sinn zuerst erreichte imaginäre Doppelpunkt der zu beiden Darstellungen perspektivischen Involution in ihrer Perspektivachse. Auch das ist mit den bekannten Mitteln höchst einfach auszuführen.

Weil aber die Behandlung dieser Probleme doch eng verbunden ist mit der Konstruktion der einfachen Hyperboloide, die die rein imaginäre Gerade samt den Trägern der sie bestimmenden Punkte oder Ebenen enthalten, und doch die Behandlung dieser Flächen erst im zweiten Bande dieses Werkes folgen kann (vergl. oben nur § 41, 8 und für spezielle Fälle § 11, 6 und § (36^b)) so ist die volle Erledigung dieser Dinge auf eine spätere Stelle zu verschieben. Genug, daß wir sehen, wie die Methode der darstellenden Geometrie auch hier zu gründlicher Einsicht leitet.

Quellen- und Literaturnachweisungen
zum ersten Teil.

Einleitung. 1) S. 1. Man vergl. No. 1 von Monge's „Géométrie descriptive".

2) S. 3. Monge hat die Perspektive zu den Anwendungen der „Géom. descr." neben die Schattenkonstruktiou, die Gnomonik, etc. gestellt. Daß die Zentralprojektion als mathematisches Abstraktum des Sehprozesses die Grundlage und der natürliche Ausgangspunkt der darstellenden Geometrie und daß die Bestimmung der geraden Linie und nicht die des Punktes das Ursprüngliche in ihrer Entwicklung sein müsse, habe ich zuerst betont in einer kurzen Abhandlung „Über das System in der darstellenden Geometrie" (Jan. 1863) in der „Zeitschrift f. Math. u. Physik" Bd. 8, p. 444 f., welche schon die wesentlichen Grund linien meiner späteren Ausführung enthielt; die allgemeine Zentralprojektion hatte ich in meiner Dissertation entwickelt (1859). Vergl. unten

3) S. 4. Nur die mit der Zentralprojektion in meiner Auffassung unmittelbar verbundene Methode der Abbildung der Punkte des Raumes durch die Kreise der Ebene hielt ich bis in die neueste Zeit zurück, in der Überzeugung, daß Jakob Steiner ihr das im Jahre 1826 als druckfertig und demnächst erscheinend angekündigte Werk von 25—30 Bogen „Über das Schneiden der Kreise in der Ebene und auf der Kugelfläche und das Schneiden der Kugeln im Raume" gewidmet habe. Erst als bei nahender Vollendung der Ausgabe der gesammelten Werke Steiners durch die K. Akad. in Berlin (1881, 1882) die Hoffnung aufgegeben werden mußte, diese Schrift an das Licht treten zu sehen, habe ich diesen Teil meiner Gesamtauffassung elementar entwickelt in dem Buche „Zyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme" (Leipzig 1882, mit 16 lithogr. Tafeln), nachdem ich seit 1879 noch immer zweifelnd einige Abhandlungen in der „Vierteljahrschrift der Züricher Naturforschenden Gesellschaft" vorausgeschickt hatte. Jetzt ist hinzuzufügen, daß das Steinersche Manuskript von 1826 mit vielen andern aus der Zeit von 1814—1827 in Bern in einer Kiste auf dem Estrich der Bibliothek der Naturforschergesellschaft aufgefunden worden ist; jedoch auch, nach Mitteilung des Herrn Prof. Bützberger, daß jenes Manuskript von der Methode der Zyklographie nichts enthält.

Während die Zentralprojektion selbst zu den projektivischen Verwandtschaften führt, liefert die Zyklographie die fundamentale metrische Verwandtschaft für die höhere Geometrie und den ganzen von Kreis und Kugel handelnden Hauptteil der elementaren metrischen Geometrie.

4) S. 5. Von Desargues, wie es scheint, sind diese Grundsätze der perspektivischen Raumanschauung zuerst ausgesprochen worden. Vergl. die Anmerkungen zu §§ 1—11.

5) S. 7. Die organische Verbindung der Geometrie der Lage mit der darstellenden Geometrie, das mit der leitenden Stellung der Zentralprojektion zusammenhängende Programm des Verfassers, ist mehr und mehr als dem heutigen Entwicklungsstandpunkt allein gemäß anerkannt worden; die Gründe, die zu demselben geführt haben, werden im Buche selbst überall hervortreten. Der Schlußsatz der Einleitung spricht einen dabei führenden Gedanken aus.

Abschnitt A.

Zu dem Abschnitt §§ **1—11**, der die allgemeine Entwicklung der Zentralprojektion als Darstellungsmethode enthält, sind besonders zu erwähnen die Schriften von Desargues (1636), welchen Poncelet den Monge seines Jahrhunderts genannt hat, ein Buch von Brook Taylor (1719) und eines von J. H. Lambert (1759), als Schriften, in denen wir die strengen Grundlagen der Zentralprojektion finden — sämtlich vor Monge. Von Desargues' Schriften gebe ich weiterhin noch einzelne Nachweisungen.

In Brook Taylors „New principles of linear perspective (London 1715 u. 1719) — italienisch mit Zusätzen von Francesco Jaquier als „Elementi di Perspettiva" (Rom 1755) — findet man die Bestimmung der Geraden aus Durchstoßpunkt und Fluchtpunkt und der Ebene durch Spur und Fluchtlinie, verbunden mit den nächstliegenden einfachen Anwendungen.

Ebenso und in umfassenderer Entwicklung in J. H. Lamberts Werk „Die freie Perspektive oder Anweisung, jeden perspektivischen Aufriß von freien Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen" (Zürich 1759, dazu ein 2. Teil, ebenda 1774) — besonders in dem Abschnitt V „Von der Entwerfung schiefliegender Linien und Flächen und dessen, was darauf vorkommt". Insbesondere erscheint die Knotenlinie oder Spur und die Grenzlinie oder Fluchtlinie der Ebene in den §§ 165, 166 daselbst. Man findet den Augenpunkt H der Grenzlinie, den Punkt H unserer Figuren S. 10, 14, 34 etc. bis S. 53 im Text, in seinem § 168; den Fluchtpunkt der Normalen zu einer Ebene in einer Ebene S. 36, 38 etc. in seinem § 182 und seine Verwendung zur Bestimmung der in solchen Normalen gelegenen Strecken in seinen §§ 185 f. Man vergleiche besonders die Aufgaben 14) S. 101 und 15) S. 105 daselbst.

Die nämlichen Grundlagen sind von Cousinery in der Schrift „Géométrie perspective ou principes de projection polaire appliquée à la description des corps" (Paris 1828) als neu dargeboten, und auch als Erweiterungen der Perspektive von den Berichterstattern der französischen Akademie Fresnel und Mathieu anerkannt, sowie noch von Chasles, dem Geschichtsschreiber der Geometrie, hervorgehoben worden. (Vergl. „Geschichte der Geometrie". Deutsch von Sohnke, S. 192.) Ich habe Lamberts Priorität in meiner Dissertation 1859 erwiesen, ohne noch Brook Taylors Buch zu kennen. (Vergl. die Programmabhandlung der höheren Gewerbeschule zu Chemnitz für Ostern 1860: „Die Zentralprojektion als geometrische Wissenschaft".) Ich will erwähnen, daß Taylors Werk bald auch zu einer ausführlichen praktischen Perspektive den Anlaß gegeben hat: Joseph Highmoore „The Practice of Perspective on the Principles of Dr. Brook Taylor". 4to. (London 1763.) Mit 48 vortrefflich gezeichneten Tafeln.

Lamberts Werk ist das vollständigste und unserer Zeit nächststehende unter denen der drei genannten grundlegenden Geometer. Hier nur noch zwei spezielle Beziehungen, nämlich zu § 9, daß der Grundsatz für die Winkelmessung in der Zentralprojektion sich bei Lambert in § 216 findet; und zu § 10, 21 f., daß bei Brook Taylor (Jaquier's Übersetzung S. 61) die Aufgabe gelöst ist: Aus der Zentralprojektion

eines rechtwinkligen Parallelepipeds den Hauptpunkt und die Distanz zu bestimmen.

Die zahlreichen anderen Aufgaben mit ihren Lösungen glaube ich zuerst gegeben zu haben.

Zu § 6* ist anzuführen, daß ich die Zentralprojektion mit einer festen Ebene U im Endlichen an Stelle der unendlich fernen Ebene zuerst, aber sofort unter vollständiger Entwicklung ihrer Elemente, mitgeteilt habe in der IV. meiner „Geom. Mitteilungen" in Bd. 24 der „Vierteljahrsschrift der Züricher Naturforschenden Gesellschaft" (1879) S. 205 f. Daß sich nun aus ihr auch die Parallelprojektionen ergeben, welche mittelst eines Bildes bestimmen, zeigte ich ebenda S. 213 f. Alles dies war aber schon seit einer Reihe von Jahren von mir zum Gegenstand der Beschäftigung in meinem nächsten Wirkungskreise gemacht worden.

Zu § 7. Die Ableitung der Zentralprojektion eines Objekts aus dem Aufriß in der Bildebene und den Ordinaten y glaube ich zuerst als die bequemste betont zu haben. Vergl. die genannte Programmabhandlung von 1860.

Zu § (7). Die zyklographische Lehre von den linearen und von den planaren Kreissystemen veröffentlichte ich zuerst in der vorher genannten No. IV der „Geom. Mitteilungen" S. 222, 223 — noch immer in Zweifel, ob sie wirklich neu sein könne. Durch das Verschwinden des Steinerschen Manuskripts (siehe oben unter 2), und nun nach seiner Wiederauffindung durch seinen Inhalt ist diese Neuheit konstatiert. Die Ausführung der Konstruktionen für die Kreise der linearen Reihe, welche einen gegebenen Punkt enthalten oder einen gegebenen Kreis berühren, mittelst der Schnittpunkte der Geraden mit gleichseitigen Rotationskegeln von zur Tafel normaler Achse, findet man in „Zyklographie" Art. 30 f.; die für Kreise der linearen Reihe, welche mit einer gegebenen Geraden Winkel von vorgeschriebenem Kosinus machen, ebenda Art. 33, von Aufgaben über zwei und drei lineare Kreisreihen in Art. 36 f., von solchen über planare Systeme in Art. 52 f.

§ 11, 6. Dieser besondere Kegel ist zuerst von Hachette in der „Correspondence sur l'école polytechnique" Bd. 1, S. 179 gebildet worden; vergl. Steiner in „Systemat. Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander" (Berlin 1832) § 53, 4) rechts. Man nennt ihn jetzt den orthogonalen Kegel und ich darf für denselben auf den zweiten Band des Werkes verweisen, wo er in Zusammenhang mit dem orthogonalen Hyperboloid (besonders vergl. dort § 36, 12 f.) wieder hervortritt. Für seine andere allgemeine Eigenschaft, die ich entdeckt habe, und ihren Zusammenhang mit dieser verweise ich auch auf No. I meiner „Geom. Mitteilungen" in Bd. 24 der „Vierteljahrsschrift" etc. S. 154 f.: Jeder Kegel dieser Art entsteht auch aus unendlich vielen Paaren von gleichwinkligen projektivischen Ebenenbüscheln. Natürlich ebenso das Hyperboloid von § 11, 6 unter b).

Für eine Zentralprojektion aus dem Zentrum in einem Punkte des Raumes von vier Dimensionen auf einen ihm angehörenden Raum von drei Dimensionen läßt sich das Schema, das in den §§ 1—11 dieses Buches für die Zentralprojektion aus dem Raum von drei Dimensionen auf die Ebene sich ergeben hat, gleichfalls anwenden; auch der Gedanke der „Zyklographie" ist einer solchen Erweiterung fähig. Man vergl. meine Abhandlung „Zur Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungsmethoden" in Band 27 der „Vierteljahrsschrift der Züricher Naturf. Gesellschaft" S. 125 f., speziell S. 174.

Zu den §§ 12 und 13, mit der Entwicklung der Mittel zur Überwindung der praktischen Schwierigkeiten bei der Ausführung der theo-

retisch erledigten Konstruktionen, bemerke ich, daß die Transformationen zuerst von mir als der Inbegriff dieser Mittel gefaßt worden sind. Man findet unter den Anmerkungen und Zusätzen des zweiten Teils von Lamberts Werk in der VIII. Anm. zum § 136 des ersten Teils mit der Überschrift „Verwandlung eines Gemäldes für einen andern Gesichtspunkt" eine Konstruktion, in welcher der betreffende Spezialfall der Verschiebung des Zentrums zu erkennen ist. Ohne dieselbe bemerkt zu haben, entwickelte ich die beiden Konstruktionen, welche bei den Transformationen des Zentrums, der Bildebene und des Objekts gleichmäßig zur Anwendung kommen, zuerst in meiner Programmschrift von 1860 im § 16 derselben und gab dann ihre weitere Durchfühıung in der Abhandlung „Über die Transformationen in der darstellenden Geometrie" im 9. Bd. der „Zeitschrift f. Math. u. Physik" S. 331—355. Seitdem sind die Transformationen der Zentralprojektion mehrfach behandelt worden.

Zu § **12**, 7. In der Schrift von Desargues „Méthode universelle de mettre en perspective les objects données réellement" (Paris 1636) — siehe „Oeuvres de Desargues réunies et analysées par Poudra" (Paris 1864) Bd. 1, S. 55—95 — ist als allgemeine Methode des perspektivischen Zeichnens die Auftragung der projizierenden oder Koordinaten-Parallelepipeda der Objektpunkte (nach der Redeweise des Textes auch weiterhin z. B. S. 299 f., § 46) in Bezug auf drei zueinander rechtwinklige Ebenen gelehrt.

Zu § **14**. Man kann vergleichen Poncelet „Traité des propriétées projectives des figures" (Paris 1822, 2. Ausg., mit einem 2. Bd. vermehrt 1865), speziell S. 9 f. und Möbius „Der baryzentrische Kalkul" (Leipzig 1827), 2. Abschnitt „Von den Verwandtschaften der Figuren" S. 181—368; insbesondere das 7. Kapitel, S. 301 f., namentlich S. 321. Die symmetrisch gleichen entsprechenden Reihen und Büschel hier in § 14 S. 58 f. des Textes fehlen in den Quellen; ihre einfache Bestimmung im Text (vergl. auch § 15, 14) ist neu.

Neuerlich ist in einem älteren wenig bekannten Buche G. Walkers „Conic Sections" (Nottingham 1794) ein ziemlich allgemeiner Spezialfall der Kollineation ebener Systeme entdeckt worden: Ein Vierseit bewegt sich so, daß zwei Gegenecken fest sind und zwei andere in festen Geraden bleiben; dann sind die beiden letzten Gegenecken entsprechende Punkte P, P' von vereinigten kollinearen Ebenen in nicht zentrischer Lage. Der Schnittpunkt der festen Geraden und die Verbindungsgerade der festen Punkte entsprechen sich selbst, jedoch nicht Strahl für Strahl und Punkt für Punkt.

Zu § **15**. Die Konstruktion entsprechend gleicher Strecken in projektivischen Reihen für gegebene Anfangspunkte ist von Steiner in seinen Vorlesungen gegeben worden (siehe Bd. 2 der „Vorlesungen über synthetische Geometrie" von Schröter, § 12). Mir ist sie als Antwort auf eine erste metrische Frage der praktischen Perspektive um so bedeutungsvoller erschienen, als ihr in die Augen springender Zusammenhang mit der Zusammenlegung der Bild- und Originalreihe zur Involution sofort die Theorie der involutorischen Reihen elementar aufschließt — auch durch die Verbindung mit den beiden Arten der Kreisbüschel.

Zu § **16**. Die Theorie der Doppelverhältnisse von vier Elementen findet man zuerst bei Möbius a. a. O. S. 243—265. Man vergl. Desargues „Proposition fondamentale de la pratique de la perspective" („Oeuvres" p. Poudra Bd. 1, S. 403, 423); auch Chasles' „Aperçu historique" (Bruxelles 1837) oder in Sohnke's Übersetzung „Geschichte der Geometrie" (Halle 1839), Note 14—16 S. 344 f. Nur der Fall 16, 13 fehlt bei Möbius und ist von G. Salmon 1852 und wieder von Cremona 1862 hervorgehoben worden.

Zu § **16**, *16 bemerke ich, daß dieser gemeinsame Charakterzug der allgemeinen bildlichen Projektionsmethoden, als nicht bloß für die Ebene, sondern für alle Regelflächen geltend, schon in meiner Dissertation (Programmabhandlung von 1860) S. 39 hervorgehoben worden ist.

Zu den §§ **16**, **17** vergl. man v. Staudt „Geometrie der Lage" (Nürnberg 1847) § 9, S. 49 f. und den 3. Bd. dieses Buches. Die vom darstellend geometrischen Standpunkt aus selbstverständliche Betrachtung der Ebenenbüschel gab zuerst J. Steiner in „System. Entwicklung" etc. S. 69 f.

Die Konstruktion § **17**, 8 ist eine der frühesten Anwendungen der Projektivitätslehre auf die Zentralprojektion, die ich gemacht habe.

Die Relationen in § **18**, 10, welche sich auf die symmetrischen Elemente zu c und s in Bezug auf die entsprechenden Rechtwinkelpaare vereinigter projektivischer Büschel beziehen, waren neu.

Zu § **19**. Die Theorie der Charakteristik Δ der zentrischen Kollineation ebener Systeme und ihre geometrische Deutung und Verwertung gehört mir an (vergl. Abschnitt C, speziell § 38; § 39, 2 f.); ihre fundamentale Bedeutung zeigt der Bd. 3 dieses Werkes auf. Ebenso gab ich zuerst die Kollineationen an, bei denen das Zentrum in der Achse liegt (§ **19**, 8), samt ihren Spezialfällen (§ 22^b, ^{e}).

Zu § **19**, 11. Dieser Satz findet sich wohl zuerst bei Desargues in den „Oeuvres" p. Poudra Bd. 1, S. 413 und 430.

Zu § **20**. Involutorische Reihen und Büschel betrachtete zuerst Desargues in „Brouillon project d'une atteinte aux évènements de rencontre d'une cone avec un plan" (Paris 1639) oder „Oeuvres" p. Poudra Bd. 1, S. 103—230; vergl. S. 119—157 und weiterhin S. 246—260. Vielleicht hat ihn die Betrachtung der Bilder symmetrischer Figuren zu dieser vollkommenen Einsicht geführt, die erst nach 200 Jahren durch Chasles von neuem gewonnen ward. Ich werde weiterhin angeben, in welcher erstaunlichen Vollständigkeit Desargues bereits diese Theorie kannte, namentlich auch in ihren Konsequenzen für die Lehre von den Kegelschnitten.

Das Rätselhafte dieser historischen Tatsache finde ich höchst einfach aufgeklärt, wenn ich bedenke, in wie ausgedehnter Weise sich Desargues mit der Praxis des perspektivischen Zeichnens beschäftigt hat; ich finde es sehr natürlich, daß aus der denkenden Beobachtung des perspektivischen Verhaltens aller der zahlreichen symmetrischen Reihen und Büschel, welche in elementar geometrischen, architektonischen, etc. Figuren vorkommen, in seinem Geiste die Gesetze der allgemeineren Beziehung aufgingen, von welcher jede Symmetrie ein spezieller Fall ist, die Gesetze der Involution; daß die Anwendung auf das Beispiel des Kreises ihm die Theorie der Involution am Kegelschnitt geliefert hat, u. s. w.

Zu § **20**, 14. Diese Ableitung der Konstruktion der Involution aus zwei Paaren mittelst des vollständigen Vierecks bez. Vierseits war neu.

Zu § **21**. Die Entwicklung der von Steiner in der „System. Entwicklung" §§ 16 u. 17 angegebenen Konstruktion für die Doppelpunkte in vereinigten projektivischen Reihen aus der Anschauung der zentrisch kollinearen ebenen Systeme gab ich zuerst in der Vorrede dieses Buches (2. Aufl.) an mit der Meinung, daß auch in Steiners mitgeteilten Entwicklungen der darstellend geometrische Gedankengang erkennbar sei, den ich herstellte.

Die Anwendung in § **21**, 7 (vergl. § 18, 3) war neu.

Zu § 22[b]. Von der Konstruktion flächengleicher Figuren handelte ich zuerst in Bd. 6 der „Zeitschrift f. Math. u. Physik" S. 56. Den Satz bezüglich ihrer symmetrischen Figuren findet man zuerst in meiner Abhandlung „Zur Reform des geometrischen Unterrichts" im 22. Bd. der „Vierteljahrsschrift der Züricher Naturf. Gesellsch."

Zu § 22[b] u. [d], wo die Symmetrien als Spezialformen der Involution aufgezeigt sind, nenne ich die Schrift von Ch. Paulus „Zeichnende Geometrie zum Schulunterricht uud zum Privatstudium" (Stuttgart 1866) als eine elementare Behandlung der Konstruktionen in der Ebene, die in diese Einsicht mündet.

Zu § 22[f] u. [g]. Die Kollineationen mit singulären Elementen wurden von mir zuerst behandelt und systematisch benutzt, wie sie denn aus der Methode des Projizierens sich mit Notwendigkeit ergeben. Doch kann ich die Anmerkung nicht unterlassen, daß während des Druckes der 2. Aufl. dieses Werkes die Abhandlung von T. A. Hirst „On the Correlation of two planes" erschien, in der von den singulären Projektivitäten zuerst eine Anwendung in anderer Richtung gemacht ist. (Proceedings of the London Mathematical Society" Bd. 5, S. 40 f.).

Zu § 23 vergleiche man den 8. Abschnitt „Umgekehrte Aufgaben der Perspektive" in Lamberts „Freie Perspektive (1759) S. 168—196.

Überblick zum Abschnitt A. Die Betrachtung des Orthogonalsystems mit dem Distanzkreis in der Zentralprojektion und analog in der Orthogonalprojektion (vergl. § 51 S. 313) gab mir 1858 die Überzeugung, daß das Studium der darstellenden Geometrie von dem der Geometrie der Lage nicht getrennt werden dürfe. Für die Reziprozitäten mit singulären Elementen vergleiche man die Note zu § 22[f] u. [g] vorher.

Abschnitt B.

Zu § 24 vergleiche man J. Steiners „Systematische Entwicklung" § 37, S. 134 und § 43, S. 156. Steiner hat die Beweisfiguren getrennt und die Konsequenz aus ihrer Verbindung nicht gezogen. B. 1) in seinem ersten Teil, wo fünf Punkte der Ebene von unabhängiger Lage als Projektionen von fünf Punkten eines Kreises erkannt werden, war im Grunde, wenn auch in anderer und weniger elementarer Ableitung von Poudra in den „Nouvelles Annales de Mathém." von 1855, S. 218 als ein Mittel gegeben, für den Kegelschnitt der fünf Punkte die Achsen direkt zu konstruieren. Ohne dieses Ziel, nur als elementare Konstruktion des Kegelschnittes, gab sie Schlömilch in seiner Zeitschrift 1894 als neu; bald darnach auch die entsprechende aus fünf Tangenten, die Poudra nicht erwähnte. Ich kann ihnen keinen erheblichen praktischen Wert beilegen wegen ihrer Weitläufigkeit und infolgedessen geringer Genauigkeit. Ich hatte früher (1883) diese Zurückführungen unten bei § 33, 8 mit Poudra's späterem Buch erwähnt und verweise auf die demselben gewidmete Note der alten Auflage unten.
Für § 25 Steiner a. a. O. die §§ 38 f., S. 137 f.

Zu § 25, 2 ist anzumerken, daß dieser Satz von der Involution aus dem Kegelschnittbüschel Desargues angehört; siehe a. a. O. Bd. 1, S. 186.

Zu §§ 27, 28 vergleiche man in J. Steiners „Systematische Entwicklung" § 42, S. 149; für § 28, 10 seine „Vorlesungen" Bd. 2, § 23.

Zu § 29 ist zu vergleichen J. Steiners „Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst des Lineals und eines festen Kreises" (Berlin 1833) § 20, S. 90 f. Die Erledigung der daselbst behandelten Aufgaben findet sich weiterhin im Text, jedoch nicht durchweg nach Steiner'scher Wegweisung; ich will die Hauptstellen angeben. Steiner

hat a. a. O. 21 Aufgaben, von denen die ersten 7, sodann 16, 17 und 20, 21 die Hauptaufgaben sind. Für jene ersten 7 finden sich der Reihe nach die Lösungen im Texte § 21, 5 f. für 1, § 29 für 2 und 3, § 29, 2 u. 5 für 4 und 5, § 33, 22 für 6 und 7. Die Aufgaben 8—15 sind Spezialfälle und Kombinationen der vorigen; 16 und 17 findet man gelöst unter § 29, c; 18 und 19 sind Zusammensetzungen aus ihnen; endlich sind 20, 21 die beiden Formen des Ponceletschen Problems, für welches man die Lösung im Texte S. 269 f. im Überblick zum Abschnitt B unter 2 und 4 findet und die zugehörige Note vergleichen wolle.

Mit der letzten Aufg. 22 kehrt Steiner zu dem Punkte zurück, von dem er ausgegangen ist in der einleitenden Übersicht, zur Ausführung aller Konstruktionen in der Ebene mit Hilfe des Lineals und eines festen Kreises. Mir war dieser feste Kreis immer der Distanzkreis der Zentralprojektion, der als Vertreter des Beobachtungszentrums die Raumwelt konstruierend zu bestimmen gestatten muß, also zugleich der Quell der Zyklographie. Ich habe längst J. Steiner für einen tüchtigen aber ganz geheimen darstellenden Geometer gehalten; für Belege aus diesem Werke kann man S. XII des Vorwortes zu Bd. 3 nachsehen. (Vergl. meine „Zyklographie“ Art. 24.)

Zu § **30** bemerke ich, daß die Theorie von Pol und Polare bei einem Kegelschnitt bereits bei Desargues (a. a. O. Bd. 1, S. 162 und S. 186) zu finden ist.

Die Konstruktion § **30**, 1 findet man in anderer Auffassung bei J. H. Lambert a. a. O., 2. Teil, S. 172.

Zu § **31** kann für weiteres Studium empfohlen werden Seydewitz' „Das Wesen der involutorischen Gebilde in der Ebene als gemeinschaftliches Prinzip individueller Eigenschaften der Figuren“. (Heiligenstadt 1846.)

§ **31**, 9. Die neue direkte Konstruktion der Zentra in kollinearen Ebenen (vergl. S. 122) ist eine erste Frucht der Einordnung der imaginären Raumelemente in die reellen. Vergl. die Schlußübersicht S. 400 f.

Zu § **31**, 12 f. Für die hier gegebene Behandlung der Probleme über die Reduktion der allgemeinen Involutionen auf die metrisch spezialisierten vergleiche man meine Note „Zu den Elementen der Geometrie der Lage“ im 26. Bd. S. 89 f. der „Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellsch. zu Zürich“. Die zweite Hälfte derselben deckt sich mit § **31**, 14.

Zu § **32** vergl. man J. Steiners „Vorlesungen“ Bd. 2, § 29. Der Begriff des Tripels harmonischer Pole und die Lehre von der Involution harmonischer Pole in Bezug auf den Kegelschnitt findet sich schon bei Desargues, a. a. O. an der unter § 30 zitierten Stelle. Ebenso der Übergang von der Polare zum Durchmesser in § 33; man vergl. auch S. 215 und Fig. 19 seines „Brouillon“ (siehe oben zu § 20) mit Steiners „Vorlesungen“ Bd. 2, § 30.

Endlich ist zu bemerken, daß der darstellend geometrische Gesichtspunkt bei Desargues schon die Übertragung dieser Theorien auf den Kegel und ihre Erweiterung für die Kugel zur Folge hatte, die dann bei Steiner wiederkehrt; ja daß Desargues die Idee von denjenigen Flächen faßte — die Ausführung fehlt — welche sich nach seinem Ausdruck zur Kugel ebenso verhalten, wie die Kegelschnitte zum Kreis — a. a. O. Bd. 1, S. 214. Man vergl. die Beispiele in § 41 des Textes für die notwendige Ergänzung der Idee und die zugehörige Note unten.

Zu § **33**, 8 kann bemerkt werden, daß eine Durchführung der betreffenden Konstruktionsfälle durch Rückgang auf den Kreis für 32 Fälle gegeben wurde von Poudra in „Compléments de géométrie“ (Paris 1868)

S. 416 f. Man vergleiche aber die betreffende Erörterung über Kegelschnitte bei Poncelet a. a. O. in Bd. 1 S. 159 f. der zweiten Ausgabe.

Zu § **33**, 10ᵃ. Die Konstruktion aus den Polinvolutionen in zwei konjugierten Durchmessern waren in der dritten Auflage neu. Die in § **33**, 10ᵇ angegebenen in meinen Konstruktionsübungen von jeher benutzten Verwendungsformen des Pascal'schen und des Brianchon'schen Satzes sind neuerlich zum Teil Pohlke als besondere Erfindungen zugeschrieben worden; die erste (Fig. S. 205) von Herrn H. A. Schwarz in der 2. Aufl. von A. L. Buschs „Vorschule der darstellenden Geometrie" (Berlin 1868), S. 75, Aufg. 70 auf Grund von Pohlkes Vorträgen; die dann folgende zweite auf Grund seines Buches „Darstellende Geometrie" 2. Abtlg. (Berlin 1876), S. 35 f. von R. Baltzer in „Analytische Geometrie" (Leipzig 1882), S. 109.

Zu § **33**, 20. Die gleichzeitige Überführung von zwei Kegelschnitten derselben Ebene in Kreise einer Ebene durch Projektion hat zuerst Poncelet in seinem „Traité" in No. 121 mit dem Satze gegeben: Die Punkte des Raumes, aus welchen zwei beliebige Kegelschnitte derselben Ebene als Kreise projiziert werden können, liegen auf ebenso vielen Kreisen, als es gemeinsame ideale Sehnen der Kegelschnitte gibt; sie haben die Sehnenmitten zu Zentren, jeweilen die halbe Sehne zum Radius und liegen in den Normalebenen derselben. Die Ebene der Bilder ist parallel der Verbindungsebene des Projektionszentrums mit der benutzten idealen gemeinsamen Sehne.

Unsere Entwickelung zeigt, daß alle die Kegelschnitte einer Ebene gleichzeitig in Kreise projiziert werden, welche in einer Geraden dieselbe elliptische Polinvolution haben; da jeder von ihnen durch drei Punkte seiner Peripherie bestimmt wird, so liefern sie alle Kreise der Bildebene. Dabei ist die halbe Distanz des symmetrischen Paares jener Polinvolution der Radius des Ortskreises und seine Mitte das Zentrum des Ortskreises für das Projektionszentrum.

Die Aufgabe, zwei Kreise wieder in zwei Kreise zu projizieren, welche noch neuerlich Schlömilch in seiner „Zeitschrift" durch Rechnung behandelte, ist ein äußerster spezieller Fall; man liest seine Lösung aus Poncelet's Satz unmittelbar ab, da die Potenzlinie der gegebenen Kreise die ideale Sehne und der Radius des kleinsten Orthogonalkreises zu beiden ihre halbe Länge ist. (Vergl. § 33, 12.)

Zu § **34** vergl. man Poncelet a. a. O. No. 232.

Für § **34**, 8 zum Normalenproblem der Kegelschnitte will ich nennen die Abhandlung von K. Pelz im 85. Bd. der „Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien" und weitere ebenda.

Zu § **35** und § **36** bemerke ich, daß beide Spezialfälle der Lehre von den Beziehungen zweier Kegelschnitte in derselben Ebene betreffen; in § 35 ist die Beziehung die spezielle einer Berührung höheren Grades, in § 36 ist der eine Kegelschnitt spezialisiert, nämlich als das Paar der imaginären Kreispunkte der Ebene, der Doppelpunkte der Involution der orthogonalen Paare von Richtungen. Die Ableitung der Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes in § 35, 8 war neu in der 3. Aufl.

§ **36**, 12. Die entsprechenden konfokalen Kegelschnittschaaren in kollinearen Ebenen hat zuerst J. H. S. Smith in der schönen Abhandlung über die Fokaleigenschaften kollinearer Gebilde im Bd. 2 der „Proced. of London Math. Society" S. 211—248 (neu „Collected Papers" Bd. 1) gebracht; an ihre Stelle treten in der allgemeinen (nicht zentrischen) Kollineation der Räume die entsprechenden Schaaren konfokaler Flächen zweiten Grades. Die Entwicklung geschieht durch die Benutzung des absoluten unendlich fernen imaginären Kreises, der allen Kugeln des Raumes gemeinsam ist.

Zu den §§ (**36**) und (**36**^{a}). Die zyklographische Theorie der Kegelschnitte veröffentlichte ich zuerst in Bd. 25 der „Vierteljahrsschrift der Züricher Naturf. Gesellsch.“ S. 217 f., nachdem ich die Konstruktion des Apollonischen Problems § (36^a), 4 ausführlicher in Bd. 24 derselben Zeitschrift S. 199 f. und S. 225 behandelt hatte.

Zu § (**36**^{a}) S. 241. Der Kegelschnitt als Mittelpunktsort eines Kreises, welcher zwei feste Kreise gleichartig oder stets ungleichartig berührt, findet sich schon in L. Gaultier's schöner Abhandlung im **16.** Bd. des „Journal de l'école polyt.“ S. 179 f. (1813).

Zu den §§ (**36**^{b}) und (**36**^{c}). Die zyklographische Theorie der Kreisbüschel und Kreisnetze habe ich auch bereits am letztgenannten Orte gegeben; die jetzige Darstellung unterscheidet sich sowohl von dieser als von der Entwicklung in der „Zyklographie“.

Auch die Entwicklung der Theorie der reziproken Radien in § (**36**^{d}) weicht von der in der „Zyklographie“ gegebenen ab.

Für § (**36**^{e}), die Lehre vom Winkelschnitt der Kreise, vergl. man die „Zyklographie“ behufs weiterer Ausführung; ihr ging die Note voran (Bd 26 der „Vierteljahrsschrift etc.“). „Vom Schneiden der Kreise unter bestimmten reellen und nicht reellen Winkeln“.

Überblick zum Abschnitt **B**. Die Ableitung der Fokalstrahlen und Direktrixebenen des Kegels vom zweiten Grade aus der Zentralkollineation des Rotationskegels für seine Achse als Zentralstrahl war neu. Das Hauptbeispiel 4) ist das berühmte Problem von Poncelet, mit dessen Aufstellung und Lösung derselbe in Bd. 8 der „Annales de Mathématiques“ (1817) dem Herausgeber Gergonne rücksichtlich der Behauptung von der Überlegenheit der analytischen Methode bei der Untersuchung geometrischer Probleme entgegentrat, die dieser wohl im besonderen Hinblick auf seine elegante Lösung des Apollonischen Problems gemacht hatte. Man hat längst diese Lösung synthetisch begründet (vergl. z. B. Salmon-Fiedler „Analytische Geometrie der Kegelschnitte“ (Art. 133, B. 6. Aufl.) und wir wissen, daß die Methode der Zentralprojektion zu allen erforderlichen Hilfsmitteln systematisch hinführt; daß ihre darstellend geometrische Ableitung nach der Idee der „Zyklographie“ erst alle Schwierigkeiten hebt, die bei Spezialfällen auftreten, ist zuerst gezeigt worden in Art. 124 meiner „Zyklographie“. Und daß dieselben Mittel auch die große Reihe der durch Steiner mittelst der Einführung der Idee vom Winkelschnitt eröffneten Probleme lösen, ist in demselben Buche konstruktiv entwickelt. Für die Poncelet'schen Probleme vergleiche man in seinem „Traité“ Bd. 1, Sect. IV, Chap. II; dazu etwa Meier-Hirsch „Sammlung geometrischer Aufgaben“ Bd. 1, S. 263—270.

Abschnitt C.

Zu § **37**. Die strengen Regeln zur Konstruktion der Reliefs wurden zuerst empirisch gegeben von J. A. Breysig, Prof. a. d. Kunstschule in Magdeburg, in der Schrift „Versuch einer Erläuterung der Reliefperspektive“ (Magdeburg 1798). In mathematischer Begründung und ganz unabhängig hiervon gab dieselben Gesetze Poncelet in seinem „Traité des propriétés proj.“ Bd. 1, S. 357—408 in dem „Supplément sur les propriétés projectives des figures dans l'espace“. Man vergleiche auch Möbius' baryzent. Kalkul S. 311—330; und vielleicht Anger „Analytische Darstellung der Basrelief-Perspektive“ (Danzig 1834) oder Magnus „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes“ (Berlin 1837) S. 72—120 und die von mir veranlaßte Abhandlung von Raf. Morstadt „Über die räumliche Projektion“ in der „Zeitschrift für Mathem. u. Physik“ Bd. 12. Meine Ableitung im Text war zum guten Teil neu.

Zu § **40**. Für andere Ausführungen vergleiche man Poudra's „Traité de perspective relief" (Paris 1862).

Zu § **41**. Von den Anwendungen der Konstruktion zentrisch kollinearer Raumfiguren in der dekorativen Kunst handelt außer dem Werke von Breysig besonders eingehend Poudra a. a. O. S. 65—219. Eine vollständige Durchführung einer theatralischen Dekoration findet man in de la Gournerie's „Traité de perspective linéaire" (Paris 1859) S. 247—267 und Tafel 40—45. Der Wert der geometrischen Konstruktion für die Kunst ist vielfach bestritten worden; ich habe auf Grund früherer Versuche und Studien meine Ansicht darüber neuerlich dargelegt in der Abhandlung „Zur Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungsmethoden" in Bd. 27 der „Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellsch. in Zürich" S. 125 f., speziell S. 129—143. Für ihre optische Bedeutung vergleiche Möbius „Entwicklung der Lehre von dioptrischen Bildern mit Hilfe der Kollineationsverwandtschaft" in „Berichte der K. S. Gesellsch. der Wissenschaften zu Leipzig" 1855, S. 8—32.

Die Einmodellierung der Beleuchtungswirkungen, natürlich namentlich für Sonnenlicht, habe ich zuerst ausgeführt.

Die den künstlerischen Anwendungen gegenüber naheliegende Erörterung der Transformationen namentlich des Zentrums in der zentrischen Kollineation der Räume konnte unterbleiben, weil sie auf Früheres zurückkommt. Ich habe sie jedoch bereits in der in der Note zu den §§ 12 und 13 S. 359 angeführten Abhandlung über die Transformationen (S. 355 a. a. O.) als die theoretische Zusammenfassung aller übrigen hervorgehoben.

Zu § **42**. Für die Involution der Grundgebilde erster, zweiter und dritter Stufe vergleiche hier in v. Staudts „Geometrie der Lage" §§ 16 und 17, No. 226—229.

Zu § **42**, 2 vom Kugelrelief sei angemerkt, daß dieselbe Konstruktion im Falle der Vereinigung von **S** mit $\mathbf{Q}_1$ den Schatten- oder Bild-Kegelschnitt der Kugel durch ein System seiner doppeltberührenden Kreise liefert (Brennpunkte als Nullkreise); dabei ist auf den zyklographischen Ursprung derselben Konstruktion in § (36*) B. 2 hinzuweisen. Für die Fülle von Resultaten, die aus dieser Auffassung entspringen, vergl. man meine Abhandlung „Über die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide mit parallelen Achsen" im 5. Bande der „Acta mathematica" S. 331—408 oder die teilweise Wiedergabe in Bd. 2 dieses Werkes.

Zu §§ **42** und **43**. Diese Gedankenentwicklungen gab ich zuerst in meiner Note „Über das System der darstellenden Geometrie" im 8. Bd. der „Zeitschrift für Mathem. u. Physik" S. 414 f., als ich mit Pohlke's „Darstellende Geometrie" noch unbekannt war. Pohlke hat die Zentralprojektion und zentrische Kollineation auch nicht als Grundlage und Quelle behandelt, sondern sie an den Schluß gestellt; so finden wir sie auch schon 1839 in G. Schreiber's „Geom. Portfolio". Eine Ableitung der speziellen Abbildungsmethoden aus den allgemeinen war nirgends gegeben, ebensowenig die besondere Bedeutung der orthogonalen unter den Parallelprojektionen begründet worden.

Bei dem Rückweis auf die durch eine Parallelprojektion bestimmende Methode des § 6* liegt die Frage nahe nach derjenigen zentrischen Kollineation der Räume, welche der Zentralprojektion mit der zweiten Fixebene **U** im Endlichen analog wäre; man sieht sofort, daß sie nichts neues ist, sondern nur die Bestimmung aus Kollineationsebene, Zentrum und Ebenenpaar oder Punktepaar; darum ist sie mit allem Zubehör im Texte nicht berührt worden. Fällt das Bild von **U** auch in die Ebene **S**, so erhält man eben die allgemeine Zentralprojektion des § 6* wieder, und als weitern Grenzfall von dieser die mit einer Abbildung bestim-

mende Parallelprojektion, welche somit das letzte Glied in der Reihe ist. Vergl. § 54* und die bezügliche Note unten.

Zu § **44** vergl. man über Projektivität räumlicher Systeme v. Staudts „Geometrie der Lage" § 10, No. 124, 132—137. Über reziproke räumliche Systeme den 4. Vortrag des 2. Bd. von Reye's „Die Geometrie der Lage" (Hannover 1868) S. 18—26.

Abschnitt D.

§ **46**. Für den Entwicklungsstand der Orthogonalprojektionslehre vor Monge ist ganz besonders lehrreich das schöne Werk von Frézier „La théorie et la pratique de la coupe de pierres et de bois ou Traité de Stéréotomie à l'usage de l'architecture" (Straßbourg 1737; dann Paris 1752; nouv. Ed. 1754—1769; 3 tom. avec 113 pl.).

ibid. Die Lehre von den Halbierungsebenen und Halbierungsachsen mit ihren zahlreichen Konsequenzen in den folgenden Entwicklungen ist von mir eingeführt worden.

§ **46**, 4 und §§ **47**, **51**. Man vergl. die Lehre von den Orthogonalsystemen in Bd. 3.

§ **53**. Von der Achse der Affinität zwischen den beiden orthogonalen Projektionen desselben ebenen Systems handelte wohl zuerst Brasseur in den Abhandlungen der Acad. des sciences etc. de Bruxelles (1853). „Mémoire sur une nouvelle méthode d'application de la géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue". (148 S., 3 Tafeln.) Unbekannt mit dieser Schrift leitete mich 1857 die Betrachtung der speziellen Formen des projizierenden Parallelepipeds (§ 46, 3, 4) auf das System der sechs Halbierungsebenen und der vier Halbierungsachsen des Projektionssystems und ich erkannte das System der Linien h_i und der Punkte H_i der Ebene (§ 47; auch 1) und den Gebrauch der beiden Affinitätsachsen $h'_{x'}{}''$ $h''_{z'}{}'''$ derselben (§ 53). Eine Note „Über die Anwendung der Affinitätsachsen zur graphischen Bestimmung der Ebene" gab ich in der „Zeitschrift für Mathem. u. Physik" (1860), Bd. 4, S. 79, Tafel II. Die Erörterungen und Beispiele über die Normalen und Normalebenen der Halbierungsebenen (§ 47, 10, 14; § 54, 4, 5) waren neu in diesem Werke; sie erscheinen als Spezialfälle zu § 10, 6 und zu § 53, 17 f.

Um dieselbe Zeit (1860) erschien die erste Ausgabe von Pohlke's „Darstellende Geometrie. Erste Abtlg." (2. Aufl., Berlin 1866), in welcher in den §§ 26, 41, 66 die Bestimmung der Affinitätsachse $h'_{x'}{}''$ und in § 71 die Verwendung derselben zur Projektion ebener Systeme gelehrt ist.

Die Ableitung der Affinitätsachsen $h'_{x'}{}''$ und $h''_{z'}{}'''$ der Ebene als zweite Doppelstrahlen konzentrischer projektivischer Strahlenbüschel, und die einfache Herleitung des Prinzipes der Zeichen bei den Flächen ebener Figuren aus der Charakteristik Δ am Schlusse des § 53 ist auch jetzt noch neu.

Wenn man Brasseur's Abhandlung à la recherche des propriétés de l'étendu mit der Entwicklung der Theorie der Kegelschnitte vergleicht, die sich aus der Zentralprojektion des Kreises ergibt (§ 24 f. im Text), so wird der Vorteil unseres Ausgangspunktes und die Natürlichkeit unseres Prinzipes vom Sehprozeß besonders evident.

§ **54**, 3. Siehe Monge's „Géométrie descriptive" No. 19.

§ **54**, 11. Man vergleiche Gugler's „Lehrbuch der deskriptiven Geometrie". (2. Aufl., Stuttgart 1867.) § 145, S. 103.

§ **54**, 19 f. Siehe Monge's „Géométrie descriptive" No. 22. Die dualistische Behandlung der dreiseitigen Ecke in 20 f. gab ich zuerst in

„Zeitschrift für Mathematik und Physik" Bd. 8, S. 448, (1863.) Sie ist nun aufgenommen in das Schriftchen von R. Sturm „Elemente der darstellenden Geometrie" (Leipzig 1874), von dem ich nur bedauere, daß seine Bezeichnung von der meinigen abweicht. (Vergl. die Notiz S. 418 f.)

Dieselbe Lösung führt auch besser wie die gewöhnliche zu den trigonometrischen Formeln. Es ist charakteristisch für das Verhältnis der beiden konstruktiven Darstellungen, daß man aus der unsymmetrischen letzteren neben dem *sinus* Satz der sphärischen Trigonometrie die Formel $\cos\gamma \,.\, \sin a \,.\, \sin b = \cos c - \cos a \,.\, \cos b$ erhält, während sich aus der bezeichneten symmetrischen Konstruktion direkt die Gauß-Delambre'schen Gleichungen und die Neper'schen Analogien ergeben, der Hauptschatz der für die Rechnung bequemen Formeln. Vergl. die dies ausführende Abhandlung von J. Hemmig in Bd. 17 derselben Zeitschrift S. 159 (1872).

Zu § **54**, 26 erwähne ich Steiners Note 21) zu No. 72 seiner Abhandlung über Maximum und Minimum in „Gesammelte Werke" Bd. II, besonders S. 738; am Schluß erscheint das System der Fluchtelemente des regulären Dodekaeders und des regulären Ikosaeders. Der Hinblick auf moderne Arbeiten und auf die Verbindung des Stud. Clausius mit dem Inhalt der Note ist interessant. Vergl. meine „Geom. Mitteilungen" No XI in Bd, 35 der „Vierteljahrsschrift der Züricher Naturf. Ges" S. 343 f.

§ **54***. Die Orthogonalprojektion mit einer festen Ebene **U** im Endlichen ward zuerst von mir entwickelt in „Geom. Mitteilungen" III, Bd. 24 der „Vierteljahrsschrift" S. 213—217. Vergl. die Note zu §§ 42, 43 oben.

§ **57** f. Die Transformationen in der darstellenden Geometrie sind Gegenstand sehr verschiedener Auffassungen und Würdigungen gewesen. Olivier und nach ihm andere haben sie zum Hauptmittel der konstruktiven Lösungen selbst der Grundprobleme der darstellenden Geometrie gemacht; man vergleiche für diese Richtung Tresca's „Traité élémentaire de géométrie descriptive" (Paris, 2. éd. 1864) und Pohlke's „Darstellende Geometrie". Ihnen ist von de la Gournerie (vergl. die Vorrede zu Band 1 des „Traité de géométrie descriptive") und andern entgegengesetzt worden, daß die Methode trotz ihres Alters — sie geht auf Desargues' „Pratique du Trait à preuves" zurück — weder in der Praxis der Stereotomie noch in der Theorie sich solcher hohen Bedeutung würdig erwiesen habe. Gerechte Schätzung scheint mir die Lehre von den Transformationen in der Darstellung von Gugler's „Lehrbuch der deskriptiven Geometrie". Erster Abschnitt, IV. Kapitel erhalten zu haben.

Ich fasse sie einfach als Mittel zur Beseitigung wesentlich technisch-zeichnerischer Schwierigkeiten, wie ich dies in der schon unter §§ 12, 13 genannten Abhandlung getan habe. Eine grundlegende Bedeutung für die darstellende Geometrie kann ich ihnen aus pädagogischen Gründen nicht zuweisen; denn nach meiner Erfahrung ist es besser erst in dem festen Projektionssystem sich ganz heimisch zu machen, ehe man dasselbe in Bewegung zu setzen und zu verändern unternimmt. Dann sind die Lösungen durch Transformation sehr nützliche Übungen. (Vergl. § 59.) Man vergl. auch die Note von G. Torelli im 13. Bd. des „Giornale" von Battaglini S. 352 f.

Die Konstruktion des Mittelpunkts der einem Tetraeder eingeschriebenen Kugel § 58, 8 als Beispiel für den Gebrauch der Parallelverschiebungen findet man in Monge's „Géométrie descriptive" No. 92, jedoch nicht das System der acht Kugeln zu vier Ebenen; die Verwendung des Prinzips der identischen Umklappungen zur Bestimmung der Berührungspunkte ist neu. Die Verbindung der Relationen des Systems (Tafel II Mitte) mit der zyklographischen Theorie der Ähnlichkeitspunkte etc. der Kreise ist leicht zu entwickeln.

§ 60. Ich hoffe, daß die Verbindung der Achsonometrie mit der Lehre von den Transformationen als naturgemäß wird erachtet werden.

Man vergleiche besonders in J. H. Lambert's „Freie Perspektive" den 7. Abschnitt: „Von der perspektivischen Entwerfung aus einem unendlich entfernten Gesichtspunkte". S. 149—167 und Fig. XXVI. Dazu die ausführliche Behandlung in Pohlke's „Darstellende Geometrie". S. 72—100. Von den deutschen Schriften, welche über Achsonometrie speziell in neuerer Zeit erschienen sind, nenne ich die älteste, Möllinger's „Isometrische Projektionslehre (Perspektive)". (Solothurn 1840) und eine neuere von Delabar „Die Polar- und Parallelperspektive". (Freiburg 1870.) Die Einführung einfacher Verhältnisse zwischen den Maßstäben gab J. Weisbach in dem Aufsatze: „Die monodimetrische und anisometrische Projektionsmethode" in „Polytechnische Mitteilungen von Volz und Karmarsch" 1844; eine elementare und praktische Darstellung des ganzen Verfahrens derselbe in „Anleitung zum achsonometrischen Zeichnen". (Freiberg 1857.) Man vergleiche dazu (besonders für § 60, 4) die Abhandlungen von Schlömilch in der Zeitschrift „Der Zivilingenieur". Bd. 2, S. 196, Bd. 5, S. 221 und in „Zeitschrift für Mathem. u. Physik". Bd. 4, S. 361.

Ich erwähne noch die Abhandlungen von K. Pelz im 81. und 84. Bd. der „Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien" mit dem Titel: „Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Achsonometrie" und die weiteren in den Bänden 87 und 90 derselben.

Die isometrische Projektion gab Farish 1820 in den Abhandlungen der „Cambridge Philosophical Society" — ausgehend von der Orthogonalprojektion des Würfels als reguläres Sechseck. (Figur S. 349, Grundriß.)

Die direkte Behandlung der wahren Größen, die ich gebe, § 60, 11—12 war neu; sie ist ebenso wesentlich für die Benutzung orthogonal achsonometrischer Zeichnungen wie für die Herstellung derselben — in beiden Fällen für den Sachverständigen gesprochen. Die Anwendung einfacher Verhältnisse zwischen den Maßstäben hat für ihre Herstellung einige Vorteile und für die Benutzung durch den Laien.

§ 61. Der Hauptsatz des Paragraphen verdient den Namen des Pohlke'schen Satzes; man vergleiche die Darstellung desselben in der Schrift seines Entdeckers a. a. O. 2. Aufl. § 147 und dazu die Abhandlung von H. A. Schwarz im 63. Bde. des „Journal f. d. r. u. a. Mathem.", der den ersten elementaren Beweis des Satzes gab; von Th. Reye in der „Vierteljahrschrift d. Naturf. Gesellschaft zu Zürich" 1866, S. 350 und die von v. Deschwanden am gleichen Orte, 1861, S. 254; 1862, S. 159 und 1864, S. 223. Der im Text mitgeteilte Beweis beruht auf einer Bemerkung Steiners S. 226, S. 231 oder 147, 157 § 53 seiner „Systemat. Entwicklung." Einen Beweis, der dem ursprünglichen aber nicht veröffentlichten Beweis Pohlke's selbst (1853) analog sein muß, gab K. Pelz im Juni-Heft des 76. Bdes. der „Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien".

Von späteren Arbeiten nenne ich noch die von A. Beck im „Journ. f. Mathem.", Bd. 106, S. 121 und die Notiz von F. Schur in „Mathem. Annalen", Bd. 25, S. 596; sowie den Aufsatz von Chr. Beyel über Achsonometrie und schiefe Parallelprojektion in Bd. 4, S. 237 des „Archiv für Math. u. Physik" 3. Reihe. Die Transformation in der orthogonalen Achsonometrie betrifft ein älterer Aufsatz mit der Unterschrift F. N. in Battaglini's „Giornale di Matem.", Bd. 12, S. 154.

Schlußüberblick S. 385f., speziell S. 388f. Die Erörterung der Transformationen in der allgemeinen Parallelprojektion war bis zur dritten Auflage nicht veröffentlicht.

Sodann S. 398 f. Zu der gegebenen Vervollständigung der Lehre von den Symmetrieverhältnissen im Raume vergleiche man meinen Aufsatz „Über Symmetrie" im Bd. XXI der „Vierteljahrsschr.", S. 50 f. Im letzten Teil (S. 400 f.) des Schlußüberblicks ist eine Zusammenfassung und Ergänzung der über imaginäre Elemente im Laufe der Entwicklung hervorgetretenen Einsichten gegeben, die gegenüber der Menge von Berührungen mit denselben notwendig erschien.

v. Staudt hat die Theorie der imaginären Raumelemente in seinen späteren Ausführungen zur „Geometrie der Lage" von 1847 niedergelegt, die als „Beiträge zur Geometrie der Lage" in drei Heften von 1856 bis 1860 erschienen sind. Man vergl. für die Unterscheidung der beiden Imaginären eines konjugierten Paares § 4, No. 71, § 7, No. 116 und für die Darstellung mit vorgeschriebener Projektivität § 4, No. 83.

Den wesentlichen Gang und den Hauptinhalt dieses ersten Teiles gab ich in der Absicht, zu verwandten Bestrebungen anzuregen, in der Abhandlung „Die Methodik der darstellenden Geometrie zugleich als Einleitung in die Geometrie der Lage" 182 S., 3 Tafeln, im 55. Bde. der „Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften." (Wien 1867.) Dieselbe bildet mit meinen früher genannten Abhandlungen (1860—1863) den Ausgangspunkt der Entwicklung der darstellenden im Sinne der projektivischen Geometrie, welcher nun die Zukunft unbestritten zu gehören scheint.

Die wohlbedachte aber unvermeidliche Abweichung meiner Entwicklung von der seit Monge eingebürgerten Behandlungsweise der darstellenden Geometrie habe ich in der oben §§ 42, 43 genannten Note über das System in der darstellenden Geometrie durch den Satz bezeichnet, es folge aus der Natur der Sache, daß die Behandlung der geraden Linie — nicht des Punktes — das Fundamentale in dem Aufbau der darstellenden Geometrie sein muß. (Vergl. auch die B. auf S. 133 besonders 3.) Ich habe sodann in Bd. XXI der „Vierteljahrsschrift etc." S. 65 f. die Notwendigkeit dieser Abweichung näher erläutert mit den Worten: Monge hat die Bewunderung, die er vollauf verdient, gerade in dem Gebiete, das man seine Schöpfung par excellence nannte und das doch weder die eigenste noch auch die wichtigste seiner Schöpfungen ist, also vor allem in der darstellenden Geometrie, viel zu sehr in der Form der unbedingten Nachahmung erfahren, und diese ist in jedem Betracht die schwächste der Huldigungen, die man einem großen Manne widmen kann". Poncelet und Steiner waren seine berufenen Fortsetzer in dieser Untersuchungsrichtung und man kann sie auch in diesem Gebiete nicht mehr ignorieren, indem man sich auf Monge's Autorität stützt, nachdem ich gezeigt habe, wie alles, das Alte und das Neue, aus einem natürlichen Prinzip der Anschauung hervorgeht, das die unabweisliche Grundlage der darstellenden und eine sehr gute Grundlage aller Geometrie ist.

Es scheint nach neuesten Erörterungen passend zu sein, daß ich hier einige Worte über meine Bezeichnungsweise sage, die durch alle Darstellungsmethoden hindurch nun zur Erscheinung gekommen ist.

Die Bezeichnung muß in den Konstruktionen auf dem Zeichnungsblatte sich geeignet erweisen zu sicherer Verfolgung der Operationen, muß also durch ihre Zeichen Punkte von geraden Linien, von Ebenen u. s. w. unterscheiden lassen; und sie soll so viel wie möglich sprechend sein, also an das Bezeichnete erinnern, sodaß unnötige Belastung des Gedächtnisses vermieden wird. Hierzu dient die Unterscheidung durch Alphabete und die geeignete Wahl der Buchstaben in ihnen.

Ich habe die großen Zeichen des Alphabets A, B, C . . . L, M, N, O, P, . . X, . . für Punkte und die kleinen a, b, c, . . f, g, h, l, m, n, . . . x, . . . für gerade Linien gewählt; Ebenen sind mit den großen **E**, **F**, **G** . . . unterschieden worden, wo sie bezeichnet werden müssen Wenn Punkte oder Gerade der Bildebene angehören, sodaß ihre Projektion mit ihnen selbst zusammenfällt, so genügt der Buchstabe allein; die Projektion eines Elements außerhalb der Bildebene erhält den Projektionsstrich, also A', P', Q'. . . g', l'. . .; im Falle mehrerer Projektionen, neben der ersten die zweite mit A'', P'', . . g''. . . und die dritte durch A''', P''', . . g'''. . . unterscheidend; analog die Spuren einer Ebene als erste, zweite, dritte, aber weil sie nicht allein Projektionen sind, sondern die Linien selbst, durch Indizes rechts unten unterschieden s_1, s_2, s_3, wobei, wenn nötig, das Zeichen der Ebene selbst etwa **E** angehängt wird; sprechend wie hier die s und **E**, so noch bei Punkten, etwa A als ein Anfangspunkt, M als ein Mittelpunkt, r als ein Radius, also zugleich die Länge bezeichnend, N als Fußpunkt einer Normale, L als ein Leuchtpunkt etc.

Erinnere ich noch die Einklammerung (A), (g) als Zeichen eines Resultats der Umklappung, ferner die Bezeichnung der Winkelgrößen durch griechische Buchstaben α, β, γ, φ, ψ . . . und des Gebrauchs der α_1, α_2, α_3 für die Neigungswinkel einer Ebene zu den Koordinatenebenen, der β_1, β_2, β_3 entsprechend für die gerade Linie, so ist des Wesentlichsten wohl gedacht.

Ich halte auch Konventionen für sehr nützlich wie Bezeichnung und Unterscheidung der Doppelelemente vereinigter projektivischer Elementargebilde erster Stufe durch F_1, F_2 bez. f_1, f_2 und $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$; oder bei der Involution G, H; g, h; **G**, **H**, daher auch imaginär G_i, g_i, $\mathbf{G}_i$ u. s. w. Die Kollineation bietet, aus der Zentralprojektion entspringend, Gegenpunkte R, Q', Gegenachsen r, q', Gegenebenen **R**, **Q**$'$ und Achsen und Ebenen der Kollineation s, **S**. Ich will nicht alles anführen, es genügt das Vorige zur Erläuterung des Prinzips oder der Absicht.

Aber willkürlich d. h. Sache der Wahl bleibt der Ausgangsentscheid, Punkte oder Gerade großes bez. kleines Alphabet oder umgekehrt.

Ich will nur sagen, was mich seiner Zeit für meine Wahl bestimmt hat. Es war der Blick auf den mathematischen Elementarunterricht. Beim Beginn des algebraischen Rechnens werden die Buchstaben a, b . . . für gegebene, x, y . . . für unbekannte Zahlen gebraucht, man versinnlicht sie etwa bei der Unterscheidung des Positiven und Negativen als von einem Nullpunkt ab in Geraden aufgetragene Längen u. s. w. Anderseits bezeichnen die geometrischen Elementarbücher zu Beginn Ecken der gedachten und gezeichneten Figuren durch große A, B, C . . . Das war schon so (man vergl. Euler's Schriften) ehe die darstellende Geometrie ein Unterrichtsgegenstand war. Es ist aber auch so geblieben; aus der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts ist mir z. B. nur ein bedeutender Autor bekannt, der das Umgekehrte systematisch durchführt, M. G Paucker in seinen: „Fundamente der Geometrie" 2 Bde. Mitau 1842 und „Die Bildlehre" 1846. 266 S. mit 100 Taf. Fügungen — eine projektivische Geometrie, deren Einwirkung wohl vorzüglich die Neuerungssucht in den Benennungen geschadet hat.

Mir schien, die darstellende Geometrie sollte sich dem anschließen, anstatt Änderungen zu machen, die das Gedächtnis der Lernenden belasten ohne eigentlich Nutzen zu bringen.

Das war mein Gedankengang und ich sehe keinen Grund ihn zu verlassen, habe aber anderseits gar nicht die Absicht ihn als allein richtig hinzustellen. Übereinstimmung wäre freilich sehr wünschenswert.

Nachtrag und bemerkte Druckfehler.

S. 293 zu § 43 als B. 6). Man zeichne nach der Anordnung von S. 282 den Umriß der Kugel M, r für das Auge in C auf die Ebene **S** $\mathbf{Q}_1$ (bez. ihren Schlagschatten für Licht aus C auf dieselbe) — natürlich im Kreuzriß. Er ist die Projektion ihres Querschnittes mit der Polarebene **P** von C in ihr auf **S**, also ein Kegelschnitt, den man aus seinen doppelt berührenden Kreisen aus Punkten der Hauptachse durch Punkte und Tangenten erhält: den Projektionen der zu **S** parallelen Kreise der Kugel. Die Endpunkte ihres zu **S** normalen Durchmessers liefern die doppelt berührenden Nullkreise d. h. die Brennpunkte des Umrißkegelschnittes (§ 36, 2 und § 31, 9); die Schnittlinien ihrer Tangentialebenen mit **P** geben in ihren Bildern die zugehörigen Direktrixen. (Vergl. II, § 43.) Zu jeder schneidenden Ebene parallel **S** gibt das Bild ihrer Schnittlinie mit **P** auf der Hauptachse des Umrisses den Schnittpunkt der zugehörigen beiden Tangenten an diesen.

S. 56, B. 2) Schluß, lies Tafel II, oben rechts a).
„ 59 Zl. 8 von oben lies b′ statt b'.
„ 64 „ 17 von oben lies k statt K.
„ 102 „ 18 und 22 von oben sowie Zl. 5 von unten lies § 16, 14.
„ 105 „ 16 von unten lies § 20, 11.
„ 129 „ 12 von oben lies § 37 f.
„ 169 „ 17 von unten lies 11 statt 13.
„ 180 „ 1 von unten lies 6 statt 5.
„ 181 „ 22 von oben lies aus statt außer.
„ 182 „ 12 von oben lies 6 statt 5.
„ 210 „ 14 von unten lies und statt oder.
„ 272 „ 16 von unten lies ebenen statt ebene.
„ 272 „ 19 von unten lies einer statt seiner.
„ 272 „ 20 von unten lies zu ihrem statt zum.
„ 272 in B. 11) lies L statt L.
„ 297 in B. 2) Zl. 6 lies K_3 und K_1 statt K_1 und K_1.
„ 363 in B. 14) lies Aufg. 13 statt 3.

Alphabetisches Sachenregister
für den ersten Teil.

Die Zahlen bezeichnen die Seiten des Buches; die gesperrt gedruckten Worte gelten immer auch für die durch — mit ihrem Satze verbundenen nachfolgenden Anführungen; Autorennamen sind nicht angeführt, weil die Literaturnoten über sie bequem Auskunft bieten. Selbstverständlich wiederholen sich manche Titel in den entsprechenden Registern des zweiten und dritten Teils; doch schien eine Hervorhebung derselben unnötig.

Abbildung als Modellierung 3, 276.
— auf die Ebene als Grenzfall 289 f., 382, 385 f.
— konforme, der Kugel auf die Ebene 256 f.
— zyklographische der Punkte des Raumes 4, 24 f., 236 f.
— elementare Methoden 3.
Abhängigkeit entsprechender Strecken in perspektivischen Reihen 61 f.
— Winkel in perspektivischen Büscheln 84 f.
Achse der Kollineation 57.
— perspektivischer Büschel 77.
— perspektivische von projektivischen Reihen 77 f.
— Strahlenbüscheln 78.
Achsen der Achsonometrie 366 f., 377 f.
— der Koordinaten 299.
— der Involution im Büschel 99, 177.
— der Kegelschnitte 202, 208 f.
— der Kegelschnitt(Kreis-)bilder 208.
— der Kegel zweiten Grades 267 f.
— der Projektion 299.
Achsendrehung der Objekte 353 f.
— der Projektionsebenen 359 f.
Achsenschnittpunkte der Ebene 302, 305, 312, 365 f.
Achsonometrie, orthogonale 340, 364 f.
— schiefe 377 f.
Ähnlichkeit bei zentraler Lage von ebenen Systemen 45, 114, 277.
— von Kegelschnitten 210.
— von Kreisen 26.
— von räumlichen Systemen 287.
— bei allgemeiner Lage 117, 210.
— der Reihen 79, 89 f., 159.
Ähnlichkeit bei zentraler Lage von Dreiecken 110.
Ähnlichkeitsachsen von Kreisen 26 f., 297.
— von Kugeln 297.
Ähnlichkeitsebenen von Kugeln 297.
Ähnlichkeitspunkte von Kreisen 26, 150 f., 297.
— von Kugeln 297.
Ähnlichkeitsstrahlen, konjugierte, von zwei Kreisen 240.
Affinität bei zentraler Lage von ebenen Systemen 112, 119, 347.
— von Kegelschnitten 148, 209, 211.
— von Räumen 286, 382.
— bei allgemeiner Lage von ebenen Systemen 117.
— von Kegelschnitten 150.
— von Räumen 383.
Affinitätsachsen des ebenen Systems mit seinen Projektionen 321.
— zwischen den Projektionen des ebenen Systems 319 f., 321 f., 327.
Apollonisches Problem 242.
Arten der Kegelschnitte 147 f., 201.
Asymptoten der Kegelschnitte 147, 154 f., 158, 201.
Asymptotenkegel der Hyperboloide 248, 285 f.
Aufgabengruppen nach der Entbehrlichkeit gewisser Elemente des Projektionssystems 16 f., 19, 29 f., 33, 66, 80 f., 90, 384, 389 f.
Aufrichtung aus der Bildebene 44, 373.
— aus einer Projektionsebene, etc. 330, 364, 373 f.

Beleuchtung der zentrisch kollinearen Modelle (Reliefs) 282 f.
Berührung, einfache einer Geraden mit einer Kurve 136.

Berührung, einfache zweier Kegelschnitte 161.
— zweier Kegel zweiten Grades 267.
Berührung höherer Ordnung 218 f.
Bewegungssinn in elliptischen Involutionen 401.
Bild (Projektion) 2, 3.
— der Ebene 16 f., 301 f.
— der Geraden 11 f., 306.
— des Punktes 13, 298 f.
— achsonometrisches 365 f., 374 f.
— siehe auch Modelle.
Bildbreite 59.
Bildebene (-fläche) 2, 3, 8.
— der Achsonometrie 362, 374, 380.
Bildkreise der Punkte, einer Geraden, einer Ebene 24 f.
— eines Kegelschnittes 254 f., 261.
— eines gleichseitigen Rotationskegels 28, 236 f.
Bildlichkeit 1, 51 f., 282 f., 292 f., 382.
Brennpunkte eines Kegelschnittes 222 f., 262.
— imaginäre 226 f.
Brennpunktachse 224.
Brennpunkt und Direktrix in Projektionen 235, 328.
Brennsehnen, konjugierte 228.
Brennstrahlen 229, 239 f.
Brianchonsches Sechsseit 156 f., 160.
— Sechsflach 264.
Bündel von Ebenen 127.
— von Strahlen 18, 118, 127.
Büschel, entsprechend gleiche gleichsinnige in kollinearen Ebenen 57, 61, 124.
— ungleichsinnige 58 f., 66.
— von Ebenen 18.
— projektivische 68 f.
— von Geraden 9, 18.
— parallele 78.
— projektivische 68, 76, 162 f.
— von Kegeln zweiter Ordnung 266.
— von Kreisen 243 f. (konjugierte auch 251).
— von Kegelschnitten 143 f., 166 f., 192, 197, 211 f.
— von parallelachsigen gleichseitigen Rotationshyperboloiden 260.
— von gleichwinkligen Kreisen zu drei Kreisen 255.
— von sphärischen Kreisen 257.

Cavalier-Perspektive als schräge Achsonometrie 382.
Charakteristik einer Zentralprojektion 89 f., 94 f.
Charakteristik einer zentrischen Kollineation 89 f., 275, 277 f.
— ebener Systeme in der zentrischen Kollineation der Räume 277 f.
— einer Orthogonalprojektion der Ebene 290, 320, 329.
— einer Parallelprojektion 290.
Charakteristikenverhältnis zweier Orthogonalprojektionen der Ebene 320 f., 329.

Darstellung imaginärer Elemente nach gegebenem Anfang und Doppelverhältnis 402.
Data des Projektionssystems, für gewisse Aufgabengruppen entbehrlich 16 f., 19, 29 f., 66, 81, 90, 384, 389 f.
Diagonalen der Vierecke 75.
— aus fünf Punkten 154.
Diagonalpunkte der Vierseite 75.
— aus fünf Geraden 158, 178.
Direktrix der Reziprozität 213 f.
— der reziproken Radien (Inversion) 253 f.
Direktrixebenen der Kegel zweiten Grades 268.
Direktrixen eines Kegelschnittes 223 f., 227 f., 232 f., 238.
Distanz der Projektion 8.
— des Zentrums von einer Ebene 17.
— eines Punktes von den Halbierungsebenen 305.
— von einer Ebene 315, 360.
— von einer Geraden 360.
Distanz, reduzierte 52 f.
— von zwei Geraden 42, 316, 343, 360.
— von zwei Projektionen einer Geraden 361.
— von zwei Punkten 21 f., 310, 374.
Distanzkreis 8.
Distanzpunkte 24, 44.
Dodekaeder, reguläres 339 f., 347.
Doppelelemente einer Involution 66, 99 f., 102 f., 106 f., 177.
— vereinigter projektivischer Gebilde erster Stufe 106 f., 162 f., 180.
Doppelverhältnis 67 f.
— als einfaches 71.
— einer Zentralprojektion u. s. w. siehe Charakteristik.
Doppelverhältnisse von vier Elementen eines Elementargebildes erster Stufe 67 f., 72 f.
— eines Gebildes zweiter Stufe 125.
— eines Kegelschnittes 139 f.

Drehung um Achsen zentrisch kollinearer Ebenen 93.
— der Objekte 353 f.
— der Projektionsebenen 359 f.
Dreieck u. -seit im Kegelschnitt 158.
Dreiecke aus Basisecken und Winkeldifferenz 109.
— einem gegebenen ähnlich projiziert 333.
— entsprechende kongruente 87.
— perspektivische 92 f.
— sphärische 335 f., 372.
Dualität 130 f.
— der Projektionsprozesse 134.
— der Symmetrien 399 f.
Durchdringung von Flächen zweiten Grades in ebenen Querschnitten 286.
— gleichseitigen parallelachsigen Rotationshyperboloiden 248 und Rotationskegeln 239.
— von Polyedern 347 f.
— von Prismen u. Pyramiden 350, 391 f.
Durchmesser des Kegelschnittes 191, 200 f.
— konjugierte Paare unter vorgeschriebenen Winkeln 201.
— Involution derselben 201.
Durchstoßpunkt und Durchstoßpunkte der Geraden 8, 11, 19, 306.
— der rein imaginären Geraden 404.

Ebene durch drei Punkte 30, 316 f.
— aus Affinitätsachsen 319 f.
— Charakteristiken 329.
— Charakteristikenverhältnissen 329.
— Fluchtlinie und Spur 17.
— Spuren 312 f.
— Winkel- und anderen -bedingungen 17, 37 f., 304 f., 334 f., 338 f., 361 f.; 17 f., 30, 39 f., 314 f., 325 f.
Ebenen aus dem Spurendreieck 303 f.
— drei Kreisen 27.
— aus der Lage gegen Projektions- und Halbierungsebenen u. -achsen 304 f.
— imaginäre durch eine reelle Gerade 401.
— symmetrisch gleiche entsprechende in zentrisch kollinearen Räumen 278.
Ecke, dreiseitige 335 f.
— trirektanguläre 42, 315.
Elementargebilde 126 f.
Elemente der Gebilde 126 f.
Ellipse 147, 172, 201 f., 209, 223, 231, 238, 241, 249.
Entfernung, s. Distanz.
Entwickelungsgang der darstellenden Geometrie 6.
Erzeugnisse der Verbindung projektivischer Elementargebilde erster Stufe 141 f.
Evolute des Kegelschnittes 217, 221.
Exzentrizität, numerische 223, 234.

Fixebene der allgemeinen Zentralbez. Parallelprojektion 19 f., 340 f., 386 f.
Flächen ebener Figuren nach dem Sinne 323 f.
Flächengleichheit als spezielle Kollineation 113, 115, 323.
Flächen zweiten Grades 286.
Fluchtpunkt der Geraden 11 f.
Fluchtlinie der Ebene 16.
— des gleichseitigen Rotationshyperboloids und -kegels mit zur Tafel normaler Achse 248.
— einer Kegelfläche 48.
Fokalsehnen, konjugierte 228.
Fokalstrahlen der Kegel zweiten Grades 268.
Formen der Zentralprojektion des Parallelepipeds 31 f.
— des Tetraeders 60.
Formen des regulären Krystallsystems 56, 384.

Gattung des Kegelschnittes durch fünf Punkte 167 f.
Gegenachsen der zentrischen Kollineation 57, 147 f.
— kollinearer Ebenen 121, 124, 178 f.
Gegenebenen der zentrischen Kollineation 274.
— kollinearer Räume 294.
Gegenpunkte der projektivischen Reihen 62 f., 79.
— der Involution derselben siehe Zentralpunkt.
Geometrie der Lage 2.
Gerade 306 f.
— aus zwei Punkten 29 f., 310.
— Durchstoß- und Fluchtpunkt 11 f.
— Bildern und Distanzen von drei Punkten 80.
— zwei Projektionen 309 f.
— zwei Durchstoßpunkten 311.
— Winkel- und anderen -bedingungen 13, 19, 42, 311, 326; 334 f., 343, 362 f.

Gerade nach einem unzugänglichen Punkt 160, 174, 352.
— nach zwei unzugänglichen Punkten 174.
— imaginäre durch reellen Punkt in reeller Ebene 401.
— ohne reelle Elemente 403.
— parallele 13, 30 f., 311.
— schneidende 19, 30, 316 f.
— des einfachen Rotationshyperboloids 248.
— nach ihren Lagen zu Projektions- und Halbierungsebenen u. -achsen 307, 311.
Gleichungen der gleichseitigen Rotationshyperboloide und -kegel mit zur Tafel normaler Achse 250.
— der Kegelschnitte 202 f., 243 f.
Halbierung einer Strecke 16.
— einer Dreiecksfläche 159.
Halbierungsachsen der Ebene im rechtwinkligen System 302 f., 314.
— und -ebenen im rechtwinkligen System 300 f., 368.
Halbierungsebenen eines Flächenwinkels 38.
Harmonische Ebenen der allgemeinen Zentral- bez. Parallelprojektion 75 f., 388.
— Eigenschaften des Vierecks und Vierseits 73 f., 145.
— Gruppen und Involution 97.
— Kegelschnitte in Büschel und Schar 144.
— Kollineation 91, 94 f., 286 f.
— Teilung 70 f.
Hauptachsen und -ebenen des Kegels vom zweiten Grade 267.
Hauptfluchtpunkt der Ebene 23, 34 f., 53.
Hauptkreis eines Kegelschnittes 230.
Hauptpunkt der Zentralprojektion 8.
Hauptteilungspunkte der Ebene 23, 43.
Helligkeit der Ebene im Büschel 363.
Hexaeder, reguläres 42 f., 54, 284, 301, 349.
Hilfskegelschnitt bez. -kreis 163.
Horizont 23, 44.
Hyperbel 147, 150, 154 f., 158, 166 f., 172, 184, 201 f., 206, 220, 223, 231, 234, 238, 241, 249.
— gleichseitige 140, 168, 206, 211, 217, 225 f., 243 f., 253, 258 f.
— aus dem Kreis 226.
Hyperboloide, einfache 47, 245 f., 260 f., 286, 288, 396.
Hyperboloide, zweifache 251, 260, 296.

Identität der Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse 159, 191.
Ikosaeder, reguläres 339, 349.
Imaginäre konjugierte Paare von Elementen in Gebilden erster Stufe 178, 187, 195, 201, 216, 400 f.
Inversion 253 f.
Involution der Gebilde erster Stufe 64 f., 95 f., 144 f., 169 f., 174 f.
— Arten derselben: Zirkulare 177 f., 206 f., 222 f.
— elliptische 65, 99 f., 104, 178, 180 f., 201, 245, 255.
— hyperbolische 65, 95 f., 104, 181, 201, 245, 255.
— parabolische 107, 193, 201.
— symmetrische 180, 184, 206, 222.
Involution aus projektivischen Gebilden mit denselben Doppelelementen 184 f.
— aus zwei Paaren 100 f., 176, 182.
— in der Zentrale einer Linse 112.
— konjugierter Durchmesser 199 f.
— von sechs, fünf und vier Elementen 144 f.
— harmonischer Pole 186 f.
— Polaren bei Kegelschnitten 186 f.
— Polarebenen bei Kegeln zweiten Grades 266.
— Polarlinien bei Kegeln, etc. 266.
Involutionen gemeinsame von zwei Kegelschnitten 198.
— aus vier Elementen 174.
Involution zentrisch kollineare, der Gebilde zweiter Stufe 95 f., 112 f., 128.
— der Räume 286 f.
Involutorische Gebilde aus projektivischen Gebilden erster Stufe 64 f., 98 f., 184.
— Eigenschaften des Vierecks, Vierflachs, Vierseits und Vierkants 144 f., 266, 306.
— der Kegelschnitt- und Kegelbüschel und -scharen 44 f., 266.

Kegel aus orthogonalen Ebenenbüscheln 46, 180 f.
— aus orthogonalen Strahlenpaaren ebener Strahlenbüschel 158.
— perspektivische 275 f.
— zweiter Ordnung bez. Klasse 13, 265.
— zweiten Grades 158.

Kegel aus fünf linearen Bedingungen 264 f.
— durch einen Kegelschnitt und drei Punkte des Mantels 268 f.
— im Büschel der Rotationshyperboloide 260.
Kegelschnitte als Durchdringungen parallelachsiger gleichseitiger Rotationshyperboloide und -kegel 239, 248 f.
— als in Paaren zentrisch kollinear 149.
— als in Paaren kollinear verwandt 148.
— als Kreisprojektionen 136 f., 146 f., 160 f.
— als mit sich selbst in Involution 170 f.
— als Querschnitte der gleichseitigen Rotationshyperboloide und -kegel 237 f., 248.
— aus Brennpunkt, Direktrix und und Exzentrizität oder Punkt (Tangente) 223, 233 f., 238.
— aus Brennpunkt und drei Punkten oder Tangenten 231 f., 242.
— aus den Brennpunkten und Punkt oder Tangente 231.
— aus dem Krümmungskreis im Scheitel und einem Element 220.
— aus dem Krümmungskreis in einem Punkte und zwei Elementen 220.
— aus doppelt berührenden Kreisen 261 f., 293.
— aus drei Bildkreisen 242.
— aus fünf Bedingungen als Kreisprojektionen 139, 202.
— aus fünf Bedingungen, worunter ein Tripel 193.
— aus fünf gleichartigen Elementen, worunter zwei bez. zweimal zwei konjugiert imaginäre 196 f., 230 f.
— aus fünf linearen Bedingungen 141 f., 145, 152 f., 190 f., 198, 202, 219.
— aus fünf ungleichartigen Elementen, worunter ev. konjugiert imaginäre 145, 166 f., 177, 212 f.
— aus Polaritätsbedingungen 175 f., 193 f.
— aus zwei Durchmessern mit den Involutionen 203 f.
— aus zwei Grundkreisen 241.
— aus zwei Kreisen durch Winkelschnitt 261.
— degenerierte 143, 160.
— durch zwei Vierecke mit gegebener Schnittsehne 184.
Kegelschnitte in doppelter Berührung 195.
— konfokale, kollinear entsprechende 231.
— mit einerlei Brennpunkt 232.
— Parallelprojektion derselben, speziell orthogonale 211, 325 f.
Kehlkreis des einfachen Rotationshyperboloides 246.
Körper, reguläre 42, 48 f., 339 f., 349 f., 354, 371.
Kollinearfiguren (verwandte) der Kegelschnitte und des Kreises 146 f., 222 f., 235.
— der Kugel 284.
— des Rotationszylinders 284.
— der (gleichseitigen) Rotationshyperboloide 285 f.
— des Dreiecks u. des Vierecks 59 f.
— des Tetraeders 278.
— des Würfels 284.
Kollineation ebener Systeme und deren Überführung in zentrische Lage 119 f., 178 f.
— der Bündel 127 f.
— der Räume 3, 293 f.
— mit singulären Elementen 91, 115 f., 120, 134.
Kollineationsebene 273.
Kollineationsstrahlen 57, 273, 276.
Kongruenz der ebenen Systeme 97, 115, 117.
— der Projektionen einer Ebene 326.
— der Räume 287.
Kongruenzprojektion der Ebene 61, 332, 389 f.
Konjugierte Elemente in Bezug auf einen Kegelschnitt 185 f., 200 f.
Konstruktionen ersten Grades (Lineal) 75, 100 f., 145, 152 f., 157 f., 174, 177.
— zweiten Grades (Zirkel) 161 f., 176 f., 191 f., 236—262.
— projektivischer Gebilde 76 f., 81 f., 119 f., 132; 293 f.
Koordinaten, Cartesische 52 f., 299, 309, 340.
Kotierte Darstellung 344, 388.
Kreis 48, 136 f., 146 f., 168, 178, 191, 196, 207 f., 215, 218 f., 227 f., 236 f., 326, 332 f., 370, 372 f.
— nicht reeller 36 f., 216, 255.
— unendlich ferner aller Kugeln 262.
Kreisbüschel aus einem Netz 248.
— aus zwei Netzen 247.
— entsprechende in kollinearen Ebenen 207.

Kreisbüschel mit reellen Grund- bez. Grenzpunkten 35, 64, 86, 180, 226, 243 f., 251 f., 256.
Kreise aus drei Tangenten 213.
— berührend zu drei Kreisen 242.
— durch einen Punkt 28.
— in doppelter Berührung mit einem Kegelschnitt 261 f.
— gleichwinklig zu einer Geraden 26.
— einem Kreise (speziell berührend oder konzentrisch) 251 f.; 28, 261.
— zwei Kreisen 254.
— orthogonal zu einem Kreise 246, 249.
— denen ein fester Kreis diametral ist 246.
— sich selbst invers im Büschel oder Netz 256
Kreiskegel 263, 318, 343.
Kreispunkte, imaginäre, im Unendlichen der Ebene 180.
Kreisreihen, lineare 25 f.
Kreissysteme, planare 26 f.
Krümmungskreis, -mittelpunkt und -radius eines Kegelschnittes 219 f.
Kugel 182, 208, 247, 250, 262, 284, 333, 354 f., 361, 363, 372, 375.
— durch vier Punkte 318.
Kugeln berührend zu vier Ebenen 354 f.
— berührend zu vier Tetraederkanten 358 f.
— gleichwinklig zu 2, 3, 4 Kugelpaaren, bez. zu fünf Kugeln 257.
Kurven zweiter Klasse, zweiter Ordnung 141 f.
— zweiten Grades 137 f., 161 f.

Lage der Geraden bez. der Ebene siehe Richtung bez. Stellung.
— Linealkonstruktion siehe Konstruktionen ersten Grades.

Maßstäbe der orthogonalen bez. der schiefen Achsonometrie 366 f., 369, 377, 381, 383.
Mantellinien der Zylinder und Kegel zweiten Grades und der einfachen Hyperboloide 263 f., 248, 286, 364.
Metrische Relationen in vereinigten projektivischen Gebilden erster Stufe mit reellen Doppelelementen 87, 106 f.
— in zentrisch kollinearen Ebenen und Räumen 57 f., 66 f., 275, 278.
Mittelpunkt des Kegelschnittes 200 f., 210 f.
Mittelpunkt des Kreisbildes 208.
— der Kugel durch vier Punkte 318.
Mittelpunkte der Kugeln zu vier Ebenen 354 f.
Modelle, technische bez. künstlerische 1, 288.
Modellierungsmethoden 4, 128, 276 f.
Modul der linearen Kreisreihe 25.
— des planaren Kreissystems 26.
— des hyperboloidischen od. Winkelschnittsystems 259 f.

Neigungskreise für Ebenen u. Gerade 9 f
Neigungswinkel siehe Tafelneigung und Winkel.
Netz eines Körpers (Prisma) 347.
— geometrisches 124.
— von Kreisen 246 f., 250.
— sphärisches 257.
— der gleichwinkligen zu zwei Kreisen 254.
— von Kugeln, speziell der gleichwinkligen zu zwei Kugeln 257.
Netzhyperboloide, zentrisch oder exzentrisch gelegen 246 f., 260 f.
Normale der Geraden durch einen Punkt 37.
— zu zwei Geraden 42, 316.
Normalebenen der Geraden 36, 303, 316, 318. 375.
— der Halbierungsachsen bez. -ebenen 315, 323 f., 326.
— zu einer Ebene bez. der Tafel oder einer Halbierungsebene durch eine Gerade 21, 37, 316.
Normalen der Ebene 36, 303, 313, 315, 341.
— eines Kegelschnittes 216 f., 221 f.
Normalschnitt eines Ebenenbüschels 69, 361, 380.
— eines Prismas 347, 364.
Nullkreis 206 f.
— Nullkreise entsprechende kollinearer Ebenen 206.
Nullstrecken, entsprechende in projektivischen Reihen 65.
Nullwinkel, entsprechende in projektivischen Büscheln 85 f.

Organismus der Raumformen 2, 129, 400.
Originalbreite 59.
Originalpunkte eines Kreises 24.
Orthogonale Elemente des Bündels 130 f.
— Kreise 191 f., 244 f.

Orthogonale Parallelprojektion, gewöhnliche und allgemeine 21, 291, 298 f., 340 f., 388 f.
Orthogonalität der Bildkreise des Kegelschnittes zu einem Kreise 254.
— von Ebenen und Geraden 36 f., 303.
Orthogonalprojektion der Verschwindungselemente auf die Tafel 12.
— des rechten Winkels als rechter Winkel 305.
Orthogonalsystem in der Ebene 131, 215.
Orthogonale Projektionen der Reliefs und der zentrisch kollinearen Modelle 279 f.
Ortskreis der Schnitte rechtwinkliger Tangentenpaare des Kegelschnittes 178, speziell der Parabel 231.
— in Beziehung zu d. Krümmungskreisen 222.
Oskulation d. Kegelschnitte 218 f.
— vierpunktige zwischen Kegelschnitt und Parabel 221.
— von Kreis u. Kegelschnitt 219 f.

Paar, gemeinsames, vereinigter Involutionen 183 f.
— symmetrisches einer elliptischen Involution 66, 99. 177.
Paare mit gegebener Mitte in vereinigten projektivischen Reihen 110 f.
— invers entsprechender Kreise für einen Kreis im Büschel oder Netz 255 f.
— von Ebenen bez. Geraden als Kegel zweiter Ordnung oder Klasse 264.
— von Geraden bez. Punkten als Kurven zweiter Ordnung od. Klasse 264.
Parabel 148, 155, 166, 168, 172, 178, 201 f., 217, 220 f., 228, 231 f., 235, 237 f., 249.
— in Büschel und Schar von Kegelschnitten 166, XIX f.
Parallelebenen d. Zentralprojektion 12.
Parallelepiped aus Kanten bez. Schichten 31 f., 46, 317.
— projizierendes 300.
Parallelismus von Ebenen bez. Geraden 13, 17, 311, 313.
Parallelogrammschnitte des Tetraeders 33.
Parallelogrammschnitte der vierseitigen Ecke 33, 347.
Parallelprojektion, gewöhnliche und mit einer Fixebene im Endlichen 3, 6, 290; 20 f., 291, 340 f., 343.
Parallelverschiebung der Tafel 55 f., 351, spez. zyklographisch 238, 260.
Pascal'sches Sechseck bez. Sechskant 151 f., 160, 264.
Perspektive 3, 51 f.
— umgekehrte 80, 122 f., 178 f.
Perspektivische Lagen von Gebilden erster Stufe 76 f. — (zweiter und dritter s. zentrische Kollineation.)
Perspektivische Kegel u. Pyramiden 275 f.
— Raumansicht 4 f.
— Vierecke u. -seite 102 f.
Perspektivisches Zentrum und perspektiv. Achse projektiv. Büschel und Reihen 78 f., 82 f., 100 f.
Perspektivisch machen derselben 83.
Pol, Polare einer Involution im Kegelschnitt 169 f.
Pol- und Polarinvolutionen der Kegelschnitte aus den proj. Erzeugungen 188 f.
Polardreiecke 185 f.
Polarecke einer gegebenen 335.
Polarfiguren, reziproke 210 f.
Polarität der Kegelschnitte, speziell des Kreises 213 f.
Polarsystem in der Ebene 131, 173, 193 f., 213 f.
Polreihe und Polarenbüschel im Kegelschnitt 185 f.
Polstrahlen- u. Polarebenenbüschel bei Kegeln zweiten Grades 265.
Polyeder 24, 344 f.
Polygon, insbesondere aus Bedingungen der Ein- und Umschreibung 46, 109 f., 269 f.
Potenz, projektivische, speziell der Involution 62, 99.
— reziproker Radien 253 f.
Potenzebenen von zwei Kugeln 256.
Potenzkreise und potenzhaltende Punkte von zwei Kreisen 253 f.
Potenzlinie von drei Kugeln bez. zwei Kreisen 151, 244, 249 f., 256, 297.
Potenzpunkt von drei Kreisen bez. vier Kugeln 250.
Prinzip der Dualität und der Reziprozität 130, 215, 399 f.
— der perspektivischen Lage b. Verbindung imaginär. Elemente 401.
— der Übertragung auf den Kegelschnitt 162.

Prisma 364.
Projektion, stereographische der Kugel 256 f.
— desselben Objekts aus zwei Zentren 118, 134, 293.
— von Kegelschnitten in Kreise 139 f., 196, 210 f., 412.
Projektionsmethode 3.
Projektionsprozeß als Raum bildend 6, 129.
Projektivische Eigenschaften der Bilder 57 f.
— der Kegelschnitte, der Kegel zweiten Grades und des Kreises 139 f., 141, 175, 263 f.
Projektivische Punkt- u. Tangentensysteme eines Kegelschnittes 162 f., 271.
Projektivitäten mit singulären Elementen 165.
Projizierende Ebene 9, 306, 314.
— der rein imaginären Geraden 401.
— Projizierende Gerade 8 f.
— Kegel und Pyramiden 9 f., 263.
— Strahlen 6, 8, 298, 369.
Punkte einer Ebene aus Bedingungen 315, 318, 325.
— einer Geraden durch Bedingungen 334.
— imaginäre in einer reellen Geraden 402.
— mit zwei achsensymmetrischen oder zusammenfallenden Projektionen 309.
Pyramiden 340, 342.

Quadrat 42, 54, 73 f., 123.
— als Querschnitt des parallelepipedischen Mantels 383.
Querschnitt des einfachen Hyperboloides 48.
— des gleichseitigen Rotationshyperboloides und -Kegels 237 f.
— einer Kugel 333.
— eines Polyeders 344.
— von Prismen, Pyramiden und pyramidalen Flächengruppen 342, 345 f.

Radialkonjugierte Punkte in Bezug auf den Kreis 191, siehe Inversion, reziproke Radien.
Radialachse, etc. siehe Potenzlinie, etc.
Realität u. Nichtrealität der Doppelelemente vereinigter projektivischer, spez. involutorischer Gebilde erster Stufe 88, 99, 104 f.
Realität u. Nichtrealität der Direktrix eines Polarsystems 214 f.
Rechteck, Projektionen desselb. 318.
Rechtwinkelinvolution 177 f., siehe zirkulare.
Rechtwinkelpaare, entsprechende in projektivischen Büscheln 83 f., 91 f.
Reduzierte Flucht- und Teilungspunkte 53.
Regionen der Ebene, vier, sieben, sechs 18, 305.
Reihen, ähnliche, kongruente 66, 79, 90.
— entsprechend gleiche symmetrische bez. kongruente 58, 66, 80.
— perspektivische 62 f.
— projektivische 76, 79, 93 f.
— vereinigte projektivische 93 f., 162 f.
Relief und Reliefperspektive 282.
— des Zylinders, der Kugel, etc. 284, 288.
— betrachtet aus einem vom Zentrum verschiedenen Punkte 296.
Reziprozität der Elementargebilde zweiter bezw. dritter Stufe 130 f., 213 f., 294.
— involutorische mit Bezug auf einen Kegelschnitt 132, 213 f.
— mit singulären Elementen 133 f.
Reziprokalfiguren 213 f.
Reziproke Radien 4, 253.
Rhombendodekaeder 46, 353.
Richtung der Geraden 5, 8.
Rotationshyperboloide, spez. gleichseitige 246 f., 260 f., 285 f.
Rotationskegel, spez. gleichseitiger 28, 207, 318, 343, 364.
— zu den Dreiflachen des Tetraeders 356.

Schar von Kegelschnitten bez. Kegeln zweiter Klasse 143 f., 167, 178, 197, 213, 231, 266.
Schattengrenze auf der Kugel 208, 375.
Schein des Objektes, speziell der Ebene 3, 13, 18.
Scheitel (reelle und ideale) der Kegelschnitte 202.
Scheitel, Scheitelkreis u. Scheitelberührungskugel des gleichseitigen zweifachen Rotationshyperboloides 246, 260.
Scheiteltangente der Parabel 235.
Schicht 17.
Schichtung gleicher Parallelepipeda 46.

Schnitt 3.
Schnittlinie von zwei Ebenen 30, 314 f., 316 f., 325, 342.
Schnittpunkt von drei Ebenen 30.
— Ebene und Gerade 30, 315 f., 325.
Schnittpunkte, dritter und vierter (event. vierter) von zwei Kegelschnitten 165 f.
— zwischen Gerade u. Kegelschnitt 161 f., 167, 184, 241 f.
Schwerpunkt des Dreiecks 16.
Sectio spatii 111.
Sehprozeß als Quelle der elementaren Abbildungen 3.
Sichtbarkeit in den Projektionen 292, 345, 348.
Sinn der Bewegung in Gebilden erster Stufe 59, 77, 104 f.
— der Koordinaten der Punkte einer Ebene 305.
— entsprechender in projektivischen Gebilden 77.
Sonnenuhren 363.
Spur, bez. Spuren und Spurendreieck der Ebene, spez. der Bildebene der Achsonometrie 9, 16, 301 f., 312 f., 369, 383 f.
Spurparallelen der Ebene 314, 318.
Stellung der Ebene 5, 9.
— der Bildebene 368, 380.
Stereoskopische Bilder 52.
Strecken der Geraden (vier) 13, 308.
— -abtragung 16.
— entsprechend gleiche in projektivischen Reihen, speziell von gegebener Länge 63 f., 79.
Symmetrie als Involution 112 f. 287, 394 f.
— achsiale, speziell bei Flächengleichheit 113, 117 f.
— der Kegelschnitte 200, 202.
Symmetrie, zentrische 114 f., 117 f., 287, 394 f.
— der Kegelschnitte 201.
— gescharte der Raumfiguren oder Symmetrie mit zwei windschiefen Achsen 397.
— planare 287, 395 f.
Symmetriegesetz des Systems der Geometrie 129 f.
Symmetrieeigenschaften der Gestalten in Bildern u. Modellen 118 f., 289, 397 f.
Symmetrische Büschel und Reihen 114, siehe Involution.
System der Geometrie, natürliches 129.
System, ebenes aus Bedingungen 319 f., 329.
Szenische Darstellungen 283.

Tafelneigung bez. -neigungen der Ebene und der Geraden 10, 304; 8, 308, 374.
Tafelordinaten und Gesetze derselben 22 f.
Tangente einer ebenen Kurve (Kreis, Kegelschnitt) 136.
— eines Kegelschnittes als Polare 192.
Tangenten des Kegelschnittes aus einem Punkte 161 f., 191.
— gemeinsame zweier Kegelschnitte 169.
Tangentialebenen der Kugel durch eine Gerade bez. in ihren Schnittpunkten 375 f.
Teilpunkt und Teilverhältnis, bez. dessen Änderung durch Projektion 22 f., 67, 310.
Teilung der Ebene in Rhomben, Quadrate, reguläre Sechsecke 5.
— des Raumes in kongruente Würfel 43.
— harmonische der Strecken und Winkel 70 f.
— von Strecken 15.
Teilungskreise der Geraden einer Ebene 35.
Teilungspunkte einer Geraden 15, 22, 54, 66.
Teilverhältnis 22.
Transformation des Zentrums 50 f.
— speziell ins Unendliche 55.
— des Objekts 55 f., 352 f.
— der Tafel 55, 351, 359 f.
— durch reduzierte Distanz 52.
— in der Achsonometrie 376 f.
— in der allgemeinen und gewöhnlichen Zentralprojektion 45, 49 f.
— in der Orthogonalprojektion 351 f.
— in der allgemeinen Parallelprojektion 387.
— und Umlegung 360.
— zur Lösung von Problemen 353 f., 360 f.
Transversale zu zwei Geraden durch einen Punkt 30, 325.
— kürzeste, einer Ebene parallele 334.
— unter gleichen bez. vorgeschriebenen Winkeln 39, 41, 337.
Transversalen zu drei Geraden 361.
Trennung konjugiert-imaginärer Elemente 401.

Tripel harmonischer Pole und Polaren für einen Kegelschnitt, bez. für zwei Kegelschnitte 185, 201.
Typische Bilder des Parallelepipeds 32.

Übergang zwischen Pol und Polare bei Kegelschnitten 173 f.
Umlaufungssinn u. Flächenzeichen ebener Figuren 324.
Umlegung der Normalebenen zur Tafel 21, 56.
— der projizierenden Ebenen 14 f., 21, 33, 46.
— einer Ebene in eine Projektionsebene od. parallel zu ihr 330 f.
— in die Tafel oder ihr parallel 33, 43, 45, 330 f., 341, 366, 371 f.
— als Kongruenzprojektion siehe diese.
Umlegungen, entgegengesetzte 15, 33, 90, 98, 118.
— identische 339 f., 356.
Unendlich ferne Ebene 5, 19 f., 273 f.
— Punkte 59.
Unveränderlichkeit der Doppelverhältnisse bei Schein- und Schnittbildung 68.

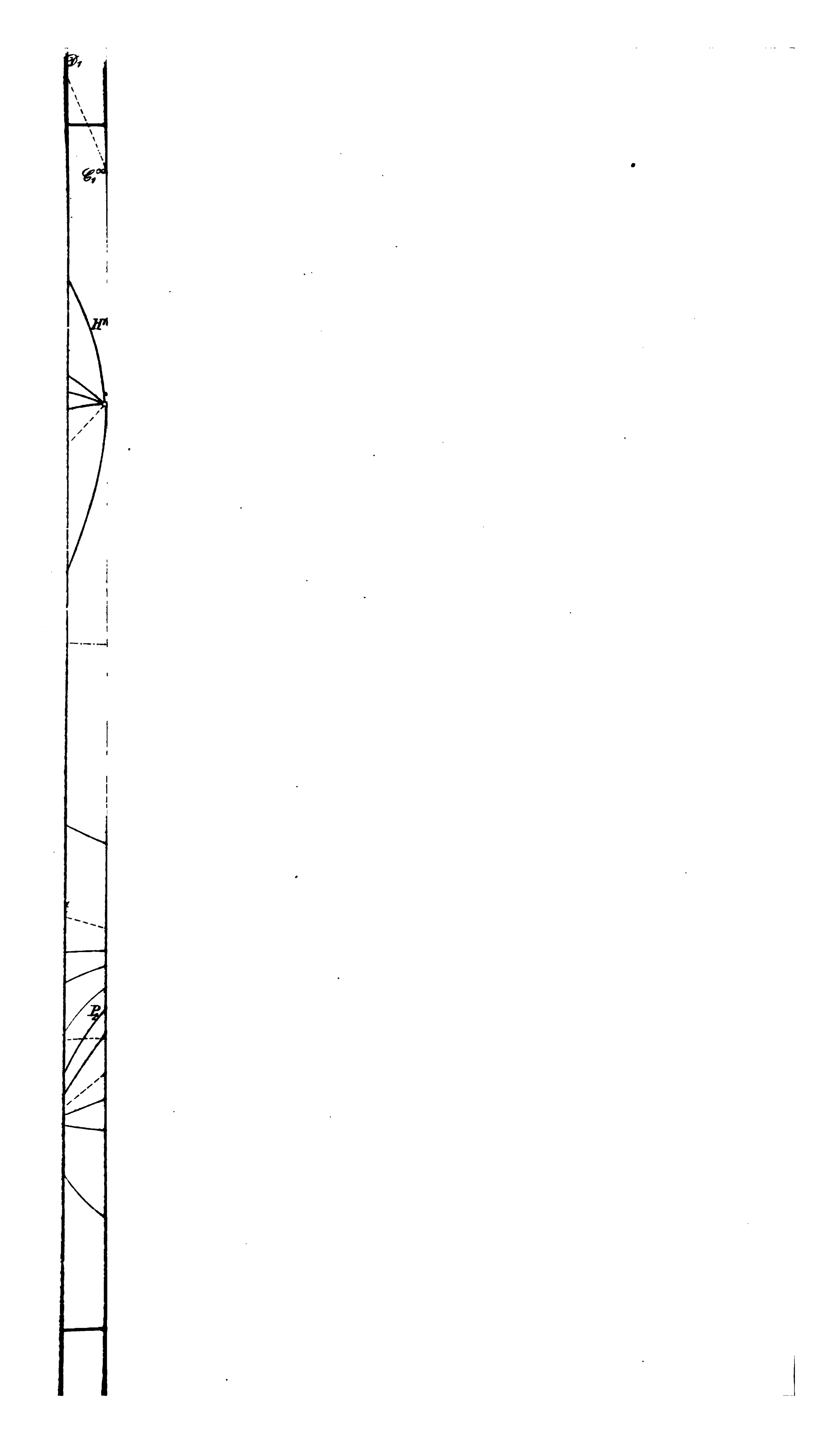
Vereinigte entsprechende Reihen und Büschel in zentrisch kollinearen Ebenen 88 f.
Vereinigung der Projektionen in der Zeichnungsebene 308.
— projektivischer Gebilde erster Stufe zur Involution 64 f. 98 f.
Verhältnis entsprechender Flächen ebener Figuren in Orthogonalprojektion 313 f.
Verjüngungsmaßstab 114.
Verkürzungsverhältnisse der Achsonometrie siehe Maßstäbe.
— der Projektionen der Geraden 290, 310.
Verschwindungsebene 10, 29.
Verschwindungslinie der Ebene 17.
Verschwindungspunkt der Geraden 12 f.
Vertauschbarkeit des projektivischen Entsprechens 96 f., 286.
Verwandtschaft, geometrische ebener Systeme 56 f.
— metrische der Inversion 4, 253.
— projektivische der Ebenen, Bündel und Räume 131 f., 293 f.
Vierecke u. Vierseite 74 f., 102 f.
— im Kegelschnitt 144 f., 157 f.
Vierecke u. Vierseite, perspektivische 102 f.
— der Würfelpunkte einer Ebene 302 f., 312, 314, 318.
Vierecke mit zwei festen Diagonalpunkten, Vierseiten eingeschrieben 111.
— projektivisch kollinear entsprechende, in zentrische Lage übergeführt 121 f.
Vierkant u. Vierflach 144 f., 266, 272.
Volumengleiche Räume in zentrischer Lage 288.
Vorzug der orthogonalen Parallelprojektion vor der schiefen 291, 293, 388 f.

Winkel von Ebenen 35 f., 331, 342, 361.
— von Geraden 33 f., 330, 361.
— speziell der Affinitätsachsen einer Ebene 331.
— von Gerade und Ebene 35 f., 331, 361.
— von Gerade und Kreis 26, 237 f.
— von Kreisen 251, 258 f.
— entsprechend gleiche in projektivischen Büscheln 84 f., 99; speziell rechte und von gegebener Größe 84 f., 91 f.
Winkelgleichheit als Projektivität 140, 168, 180.
— bei der Inversion oder reziproken Radien 255 f.
Wurfparabel 155.
Würfelpunktlinien, vier 301.

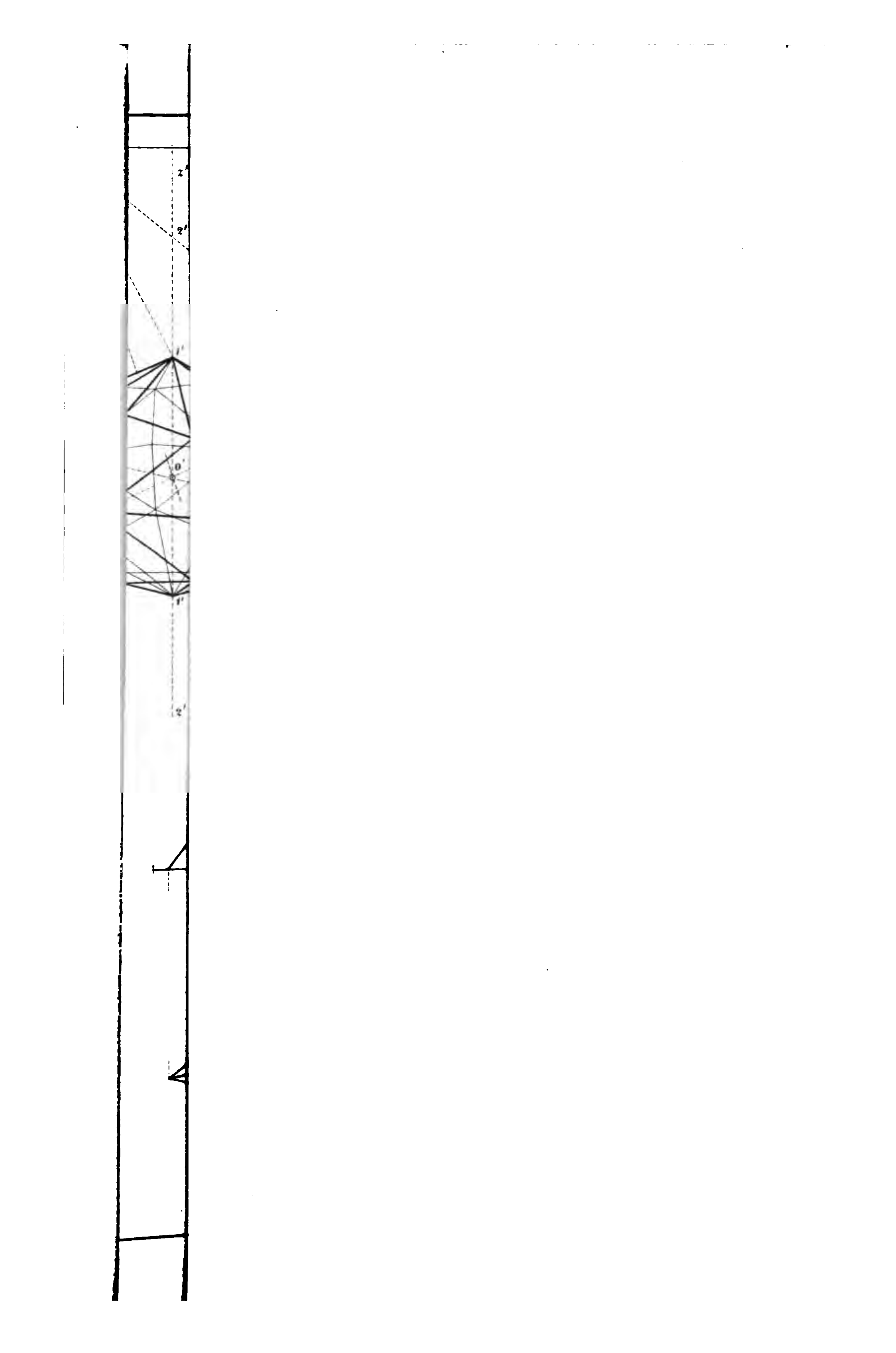
Zeichenkunst 2.
Zeichnungen und Zeichnungsebene (-fläche) 1 f., 8.
Zeichenwechsel der Charakteristik 90.
— des Charakteristikenverhältnisses 323 f., 329.
Zentralkollineation d. Bündel 127 f., 266 f.
— der Kegel zweiten Grades 265, 284.
— involutorische 94 f., 286 f.
Zentralprojektion, 3, 6, 8 f., 289 f.
— allgemeine 19 f., 37, 45, 386.
— aus einer orthogonalen und den Distanzen oder Höhen 23, 45.
— symmetrischer Figuren 115, 117, 146 f.
— der Kegelschnitte als Kreise oder gleichseitige Hyperbeln 211 f., 412.
— des Kreises 48 f., 207.

Zentralprojektivische Lage zweier Vierecke 121 f.
Zentralpunkt d. Involution 98, 177.
Zentrische Kollineation der ebenen Systeme 3, 56 f., 108 bis 125, 346 f.
— der Flächen zweiten Grades 284 f.
— der Kegelschnitte 48 f.
— der Kreise 150, 160 f.
— der Kugeln 297.
— der Räume 128, 273 f., 295.
— involutorische 286 f.
— mit singulären Elementen 116.
Zentrum der Kollineation 3, 57, 273.
— der Involution 98, 286.
— der Projektion 8.
— einer Parallelprojektion 290 f.
— perspektivisches für projektivische Büschel 82 f.
Zentrum für projektivische Reihen 62 f.
Zusammenfallen von zwei Affinitätsachsen der Ebene 326.
Zweck d. darstellenden Geometrie 1 f.
Zwei Parallelprojektionen als bestimmend 134 f., 292, 309, 314, 365 f.
Zyklographie 4, 24, 236 f.
Zyklographische Darstellung der Ebene 26 f.
— der Geraden 24 f.
— der gleichseitigen Hyperbel etc. 243 f., 247.
— des gleichseitigen Rotationshyperboloids 246 f.
— des gleichseitigen Rotationskegels 28.
— des Kegelschnittes 236 f., 239 f., 249, 258 f.
— der Kugel 247.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.







z'
2'
1'
O'
1'
2'

